I. <u>Funktionen</u>

Funktionen beschreiben mathematisch den Zusammenhang zwischen 2 Größen bzw. Mengen.

Allgemein: $y = f(x)$ $\quad y \leftrightarrow x$

$\uparrow$ abhängige Variable (y) $\qquad \uparrow$ unabhängige Variable (x)

Funktion: Gegeben seien die Mengen A und B. Ist jedem Element $x \in A$ eindeutig ein Element $y \in B$ zugeordnet, so nennt man die Menge $\{(x;y) \mid x \in A \text{ ist ein } y \in B \text{ eindeutig zugordnet}\}_{A \times B}$ eine Funktion von A in B.

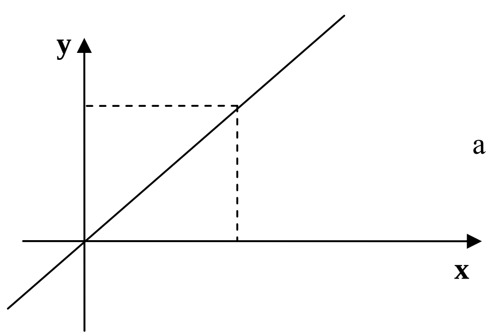
Definitions- (D) und Wertebereich (W): Ist f eine Funktion von der Menge D in die Menge B, so nennt man D den *Definitionsbereich* von f, die Elemente von D heißen *Argumente*. Die Menge B heißt *Zielmenge*. Ist $(x;y) \in f$, so heißt der dem Argument x eindeutig zugeordnete zweite Wert y Funktionswert von x. Man schreibt $y = f(x)$ (gelesen: y gleich f von x). Die Menge aller Funktionswerte heißt *Wertebereich* W der Funktion. Es ist $W = \{f(x) | x \in D\}$.

Im folgendem werden nur die häufigsten in den Naturwissenschaften vorkommenden Funktionen besprochen:

1.) Lineare Funktionen:

$y = a.x \rightarrow$ linearer Zusammenhang zwischen x und y
a = Konstante, $a \neq 0$

x	y
0	0
1	a
2	2a



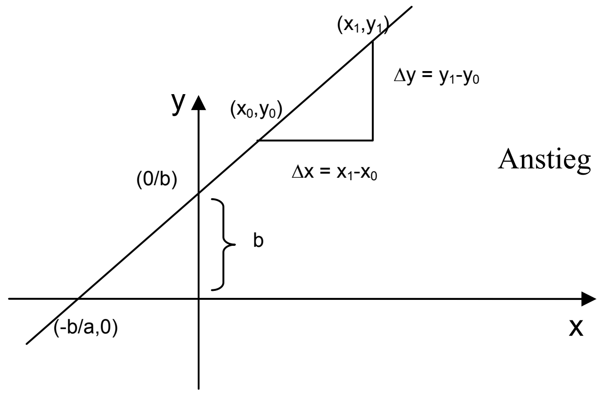
a gibt Steilheit der Geraden an

Bsp: $m = V.\rho$
$m = f(V)$

diese Funktion geht durch den Nullpunkt

Allgemeiner Fall: Gerade geht nicht durch den Nullpunkt

$y = a.x + b$
a,b.....Konstante;
a = Steigung,
b = Abschnitt auf der y- Achse für x = 0



Anstieg $a = \dfrac{y_1 - y_0}{x_1 - x_0}$

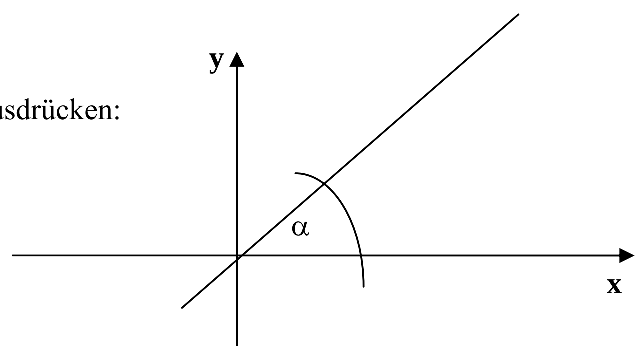
b gibt die Lage auf der y-Achse relativ zum Nullpunkt an

$x = 0 \rightarrow y = b$

$y = 0 \rightarrow x = -\dfrac{b}{a}$

Bsp : $V(T) = V_0 + aT$

Steigung durch Winkel ausdrücken:



$$y = a.x$$

$$a = \frac{y}{x}$$

$$\tan(\alpha) = \frac{y}{x} = a$$

$\Rightarrow$ tan α gibt die Steigung an

<u>Sonderfälle:</u>

(a) $y = -a\,x + b$; negative Steigung

(b) $y = x$; $\alpha = 45$; $\tan \alpha = 1$

(c) $y = b$

2. Potenzfunktionen:

n…Grad der Funktion

Allgemein: $y = ax^n$; a,n …Konstante

z.B. n = 2…quadratisch
n = 3…kubisch

lineare Funktionen sind ein Sonderfall der Potenzfunktion : $y = ax^1$

<u>Quadratische Funktion:</u>

Potenzfunktion 2. Grades

$y = a\,x^2$ => Parabel, $(a \neq o)$

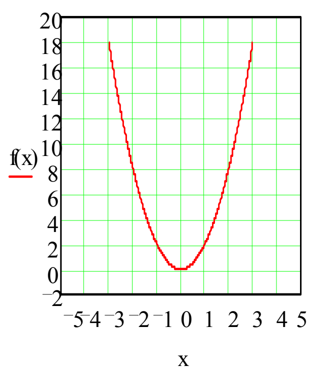
z.B. Würfel: Fläche = $6\,a^2$

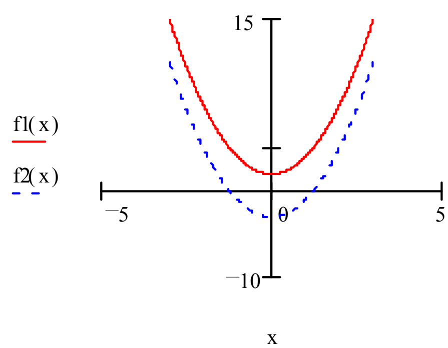
Wurfparabel (freier Fall) : $s = \frac{g}{2} t^2$

Bsp: a =2

x	y
0	0
1	a
2	4a
-1	a
-2	4a

$a := 2$
$b1 := 2$
$b2 := -3$
$f1(x) := a \cdot x^2 + b1$
$f2(x) := a \cdot x^2 + b2$





→Nullpunkt

$y = ax^2$

$y = ax^2 + b$

b verschiebt die Parabel auf der y-Achse

$y = ax^2 - b$

$x = 0 \rightarrow \quad y = -b$

$y = 0 \rightarrow ax^2 = +b$

$$x = +\sqrt{-\frac{b}{a}}$$

$y = -ax^2$

$y = -ax^2+b$

umdrehen der Parabel :

Multiplikation mit –1 (siehe Vektor)

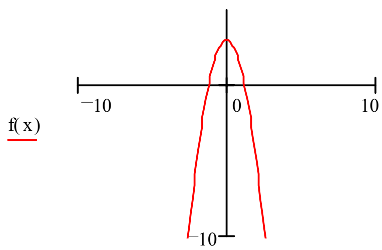
Beispiel: Wurfparabel

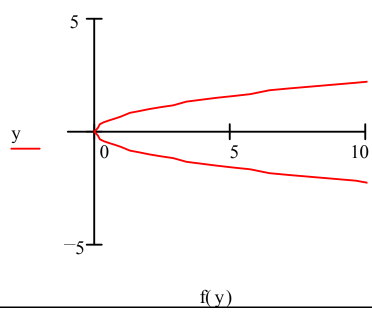
$y = -ax^2+b$

$a1 := 2$

$b1 := 3$

$f(x) := -a1 \cdot x^2 + b1$



$y := -3, -2.9 .. 3$ $f(y) := a1 \cdot y^2$  	Frage: $x \leftrightarrow y$ $x = ay^2$ oder $y^2 = p.x$; $(p=\frac{1}{a})$

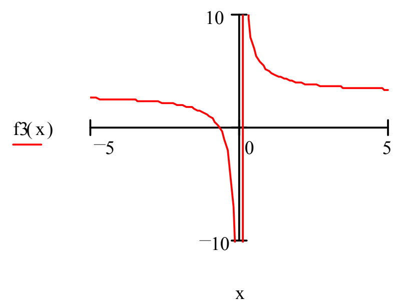
Inverse Potenzfunktion

a) $y = \frac{a}{x} + b \quad = \quad ax^{-1} + b$

$a \neq o \qquad y = \frac{1}{x}$

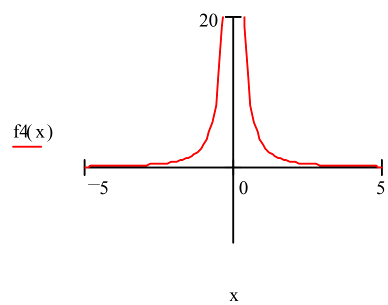
Hyperbel

$f3(x) := a1 \cdot x^{-1} + b1$ (Ungenauigkeit der Darstellung in der Umgebung von x = 0)



b) inverse quadratische Funktion: kommt in den Naturwissenschaften sehr häufig vor.

$f4(x) := b1 \cdot x^{-2}$



$y = \frac{a}{x^2} = ax^{-2}$

$a \neq o$

Beispiel: Gravitationsgesetz, Coulombgesetz

$$F(r) = \frac{1}{4\pi\varepsilon} \frac{Q_1 Q_2}{r^2}$$

Kraft zwischen zwei Körpern nimmt mit Abstandsquadrat ab

3.) **Polynome**

allg. $y = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} \ldots + a_o$

n…. Grad, höchste Potenz

z.b. Polynom 2ten Grades

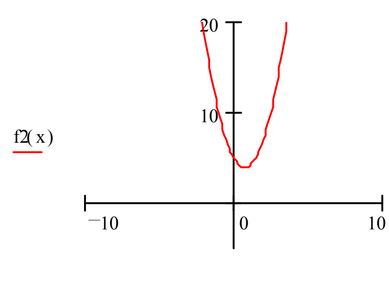
$y = ax^2 + b.x + c \qquad a \neq 0$

Bsp. Mit: $a1 := 2$

$b1 := 3$

$c1 := 5$

$f2(x) := a1 \cdot x^2 - b1 \cdot x + c1$



b.x- Term verändert die Parabel insgesamt und verschiebt die Kurve entlang der x-Achse

Einfache Verschiebung entlang der x-Achse
um den Wert a1 nach rechts:

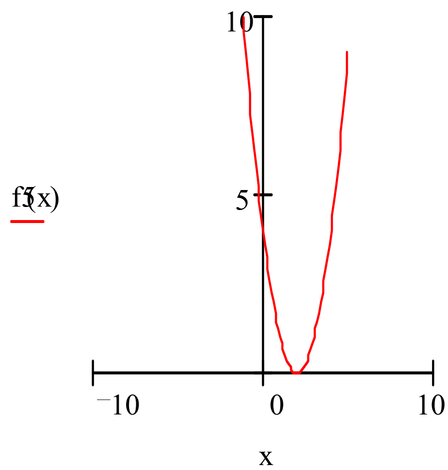
$f5(x) := (x - a1)^2$

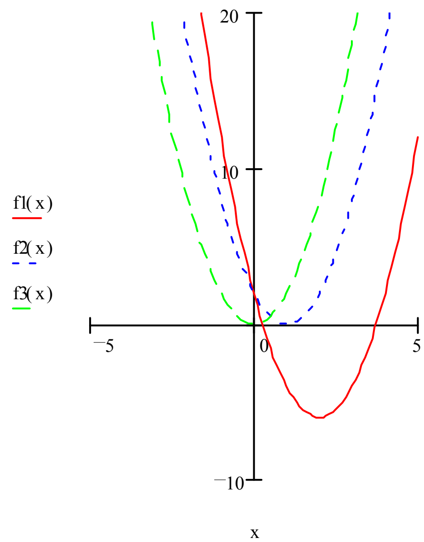
$a1 = 2$

$f1(x) := a1 \cdot x^2 - 8 \cdot x + 2$

$f2(x) := a1 \cdot x^2 - 4 \cdot x + 2$

$f3(x) := a1 \cdot x^2$





4.) Quadratische Gleichungen:

Normalform: $ax^2 + bx + c = 0$ $x^2 + px + q = 0; \quad p = \frac{b}{a}, \quad q = \frac{c}{a}$

$$\Rightarrow \quad x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \qquad x_{1,2} = -\frac{p}{2} + \sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2 - q}$$

Frage: Für welche Werte von x gilt ?

$$y = ax^2 + bx + c = 0$$

oder: Wo schneidet die Parabel die x-Achse

Diskriminante $D = b^2 - 4ac$

$D < 0$ keine reelle Lösung, 2 komplexe Lösungen
$D > 0$ 2 reelle Lösungen
$D = 0$ 1 reelle Lösung

z.B. $2x^2 - 9x - 5 = 0$

$$x^2 - \frac{9}{2}x - \frac{5}{2} = 0$$

Lösung durch Ergänzen auf vollständiges Quadrat:

$$(x - \frac{9}{4})^2 = \frac{5}{2} + \frac{81}{16}$$

$$x_{1,2} = \frac{9}{4} \pm \sqrt{\frac{81}{16} + \frac{5}{2}}$$

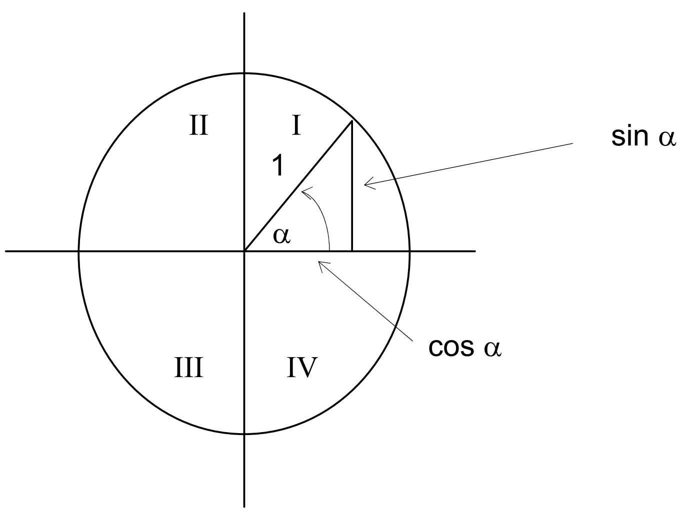
$$x_1 = \frac{9}{4} + \frac{11}{4} = \frac{20}{4} = 5$$

$$x_2 = \frac{9}{4} - \frac{11}{4} = -\frac{2}{4} = -\frac{1}{2}$$

5.) Periodische Funktionen:
(Trigonometische Funktionen)

z.B. $\sin\alpha, \ \cos\alpha$

Einheitskreis (Radius mit der Länge 1, Rotationsrichtung linksdrehend).

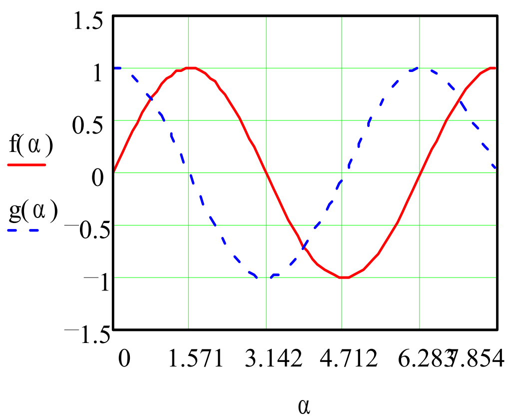


Vorzeichen:

	I	II	III	IV
sin(α)	+	+	-	-
cosin(α)	+	-	-	+

Sin und Cos-Funktion

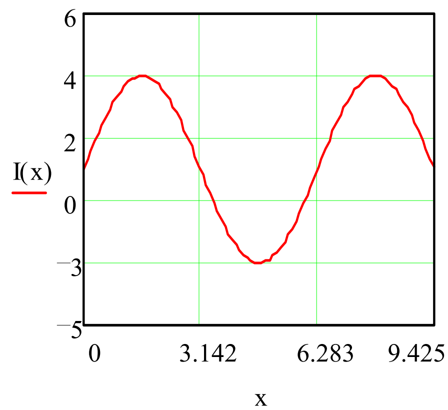
$f(\alpha) := \sin(\alpha)$
$g(\alpha) := \cos(\alpha)$



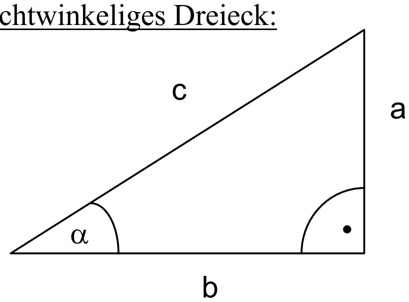
Bsp.: Harmonische Schwingung

Amplitude: I = 3

$I(x) := I \cdot \sin(x)$



Rechtwinkeliges Dreieck:



$\sin\alpha = \frac{a}{c}$ [-1, 1]

$\cos\alpha = \frac{b}{c}$ [-1, 1]

$\tan\alpha = \frac{a}{b} = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}$ **R**

$\cot\alpha = \frac{b}{a} = \frac{\cos\alpha}{\sin\alpha} = \frac{1}{\tan\alpha}$ **R**

im Englischen oft verwendet:

$$\sec\alpha = \frac{1}{\cos\alpha}$$

$$\operatorname{cosec}\alpha = \frac{1}{\sin\alpha}$$

Winkelfunktion und Umkehrfunktion: Arcus-Funktion

z.B. y = sin x $\Rightarrow$ x = arcsin y

Trigonometische Formeln:

$$\cos^2\alpha + \sin^2\alpha = 1$$

$$\cos 2\alpha = \cos^2\alpha - \sin^2\alpha$$

$$\sin 2\alpha = 2\sin a\cos\alpha$$

Trigonometrische Polynome:

Allg.: $y = a_0 + a_1\cos(\omega t) + a_2\cos(2\omega t) + \ldots.. + a_n\cos(n\omega t)$
$+ b_1\sin(\omega t) + b_2\sin(2\omega t) + \ldots\ldots + b_n\sin(n\omega t)$

$\omega = 2\pi f$, ω = Kreisfrequenz, f = Umdrehungen/t
$\omega.t = [t^{-1}].[t]$ = dimensionslos

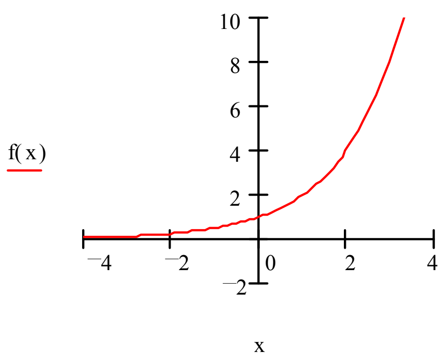
Anpassung periodischer Daten durch ein trigonometrisches Polynom :
Harmonische Analyse oder Fourier- Analyse (später: Fourier Reihe)

$$y = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty}(a_n\cos nx + b_n\sin nx)$$

6.) **Exponentialfunktion:**

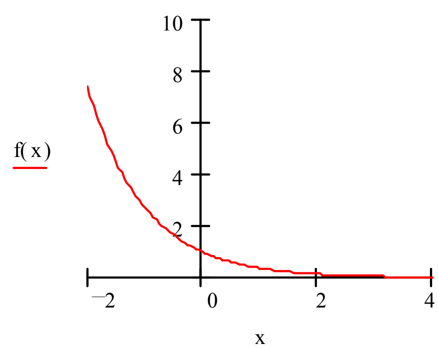
Steigende e-Funktion

$F(x) = 2^x$ oder $f(x) = e^{\ln(2)x}$



Fallende e-Funktion

$f(x) := e^{-x}$



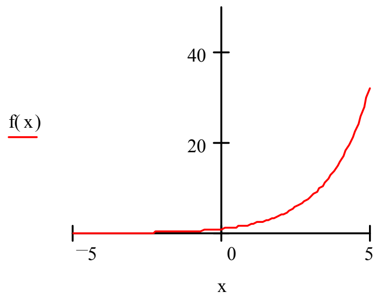
$y = a^x$ $\quad$ a>o, a $\neq 1$ $\quad$ $a^{-x} = \dfrac{1}{a^x}$

$y = ba^x$

Variable in Exponenten (Namen!)
(Potenzfunktion: Variable in Basis)

z.B. $y = 2^{x}$

$f(x) := 2^{x}$

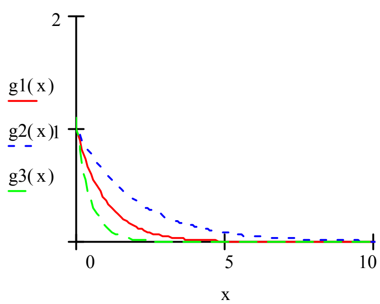


Sonderfall : Basis e

$y = a.e^{bx}$ Zunahme

noch wichtiger: $y = a.e^{-bx}$ Abnahme

$g1(x) := e^{-x}$ $g2(x) := e^{-\frac{x}{2}}$ $g3(x) := e^{-2\cdot x}$



Diese Funktion hat in den Naturwissenschaften eine extreme Bedeutung, sie ist vielleicht die wichtigste Funktion überhaupt

Die Exponentialfunktion ($e^{\pm x}$) tritt stets dann auf, wenn die Zu- oder Abnahme einer Größe dem jeweiligen Wert dieser Größe proportional ist.

(später: Differentialgl: $\frac{dy}{dx} = -kx$)

Beispiel: Radioaktiver Zerfall

$$N_{(t)} = N_{(o)}\, e^{-\lambda x}$$

λ = Zerfallskonstante
Der Exponent muss dimensionslos sein, daher ist die Einheit von λ $[t^{-1}]$

Beispiel:

$$\frac{dN}{dt} = \lambda N$$

Zeitpunkt t:

Zerfall der Ausgangssubstanz: $N_{1(t)} = N_{(0)} e^{-\lambda t}$

Anwachsen des Zerfallsproduktes: $N_{2(t)} = N_{(0)} (1 - e^{-\lambda t})$

2 verschiedene Halbwertszeiten:

$t2 := 10$

$t1 := 5$

Anfangsaktivität:

$N0 := 2$

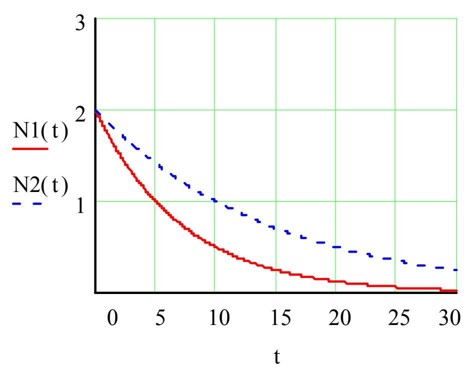
Zerfallskonstanten:

$\lambda 1 := \frac{\ln(2)}{t1}$

$\lambda 2 := \frac{\ln(2)}{t2}$

$N1(t) := N0 \cdot e^{-\lambda 1 \cdot t}$

$N2(t) := N0 \cdot e^{-\lambda 2 \cdot t}$



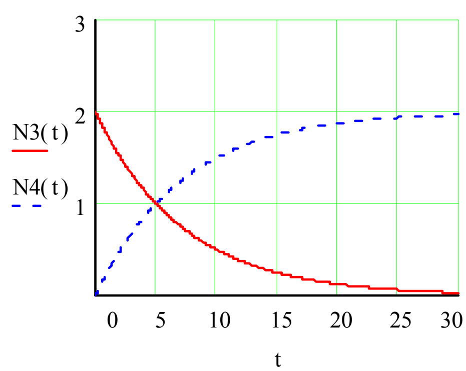
Halbwertszeit HWZ: Nach der HWZ (oder $t_{1/2}$)ist nur mehr die Hälfte der Ausgangsaktivität vorhanden.

$\lambda = \ln(2)/HWZ$

Der radioaktive Zerfall des zerfallenden Elementes führt zum Anwachsen des Zerfallsproduktes:

$N3(t) := N0 \cdot e^{-\lambda 1 \cdot t}$

$N4(t) := N0 \cdot \left(1 - e^{-\lambda 1 \cdot t}\right)$



Rechenregeln:

$a^n = ...$ n=0,1,2...

(a) $a^0 = 1$

(b) $a^n . b^n = (a.b)^n$ (gleicher Exponent)

$a^n : b^n = \left(\frac{a}{b}\right)^n$

(c) $a^n . a^m = a^{n+m}$ (gleiche Basis)

$a^n : a^m = \frac{a^n}{a^m} = a^{n-m}$

(d) $(a^n)^m = a^{n.m}$

7) Logarithmus - Funktionen:

Def: Ist die Umkehrfunktion der Exponentialfunktion

Bemerkung: Andere Umkehrfunktionen sind leicht berechenbar oder eigene Funktionen

z.b. $y = a.x \rightarrow x = \frac{y}{a}$

$y = x^2 \rightarrow x = \pm\sqrt{y}$

eigene Funktion

$y = a^x \rightarrow x = \log_a y;$ *sprich: x ist der Logarithmus von y zur Basis a*

$a > o, \quad a \neq 1$

Sonderfälle : Basis e :

$y = e^x \Rightarrow x = \log_e y = \ln y$

ACHTUNG: ln $\equiv$ log im Englischen

Basis 10: $y = 10^x \Rightarrow x = \log_{(10)} x$ wird

Beispiele:

Log 10 = 1, $\log 10^2 = 2$, $\log 10^3 = 3$

log1 = 0 und ln 1 = 0. (Jede Zahl “hoch” 0 ist eins)

ln e = 1, $\ln e^2 = 2$, $\ln e^3 = 3$

Rechenregeln:

$$\log x_1 + \log x_2 = \log x_1 x_2$$

$$\log x_1 - \log x_2 = \log \frac{x_1}{x_2}$$

$$a \log x = \log x^a$$

$$\frac{1}{n} \log x = \log \sqrt[n]{x}$$

Logarithmieren: Rechenoperationen werden um eine Hierarchie niedriger, bzw. beim Entlogarithmieren umgekehrt um eine Hierarchie höher. z.B. Add. ↔ Multip.

Halblogarithmische Darstellung

2 verschiedene Halbwertszeiten:

$t2 := 10$

$t1 := 5$

Anfangsaktivität:

$N0 := 2$

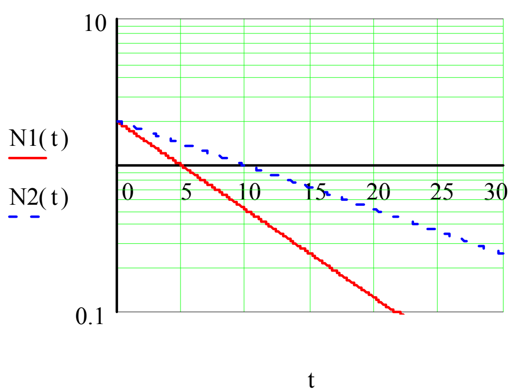
Zerfallskonstanten:

$$\lambda 1 := \frac{\ln(2)}{t1}$$

$$\lambda 2 := \frac{\ln(2)}{t2}$$

$$N1(t) := N0 \cdot e^{-\lambda 1 \cdot t}$$

$$N2(t) := N0 \cdot e^{-\lambda 2 \cdot t}$$



Aus der Steigung der Geraden kann der Exponent bestimmt werden, in diesem Fall $-\lambda_1$ und $-\lambda_2$. :

Beispiele: (Rechenregeln)

(1) Zurückführen auf einfache Ausdrücke

$$\log \frac{2\sqrt{a+b}\,a^3 b^2}{\sqrt[3]{c}\,(a+c)^2} = \log 2 + \frac{1}{2}\log(a+b) + 3\log a + 2\log b - \frac{1}{3}\log c - 2\log(a+c)$$

(2) Zusammenfassen von Logarithmen:

log (a+b) + 2 log (a-b) - $\frac{1}{2}\log(a^2-b^2)$ = log $\frac{(a+b)(a-b)^2}{\sqrt{a^2-b^2}}$

(3) Halbwertszeit $t_{1/2}$

$t = t_{1/2}$: $N_{(t)} = N_{(o)}\, e^{-\lambda t}$

$$\textit{Für } t = t_{1/2} \textit{ gilt}: \frac{N_{(0)}}{2} = N_{(0)}.e^{-\lambda.t_{1/2}}$$

$$\frac{1}{2} = e^{-\lambda.t_{1/2}}$$

(Umkehrfunktion: Logarithmieren)

$$\ln\frac{1}{2} = -\lambda.t_{1/2}$$

$$\underbrace{\ln 1}_{o} - \ln 2 = +\lambda.t_{1/2}$$

$+\ln 2 = +\lambda t_{1/2}$

$$t_{1/2} = \frac{\ln 2}{\lambda}$$

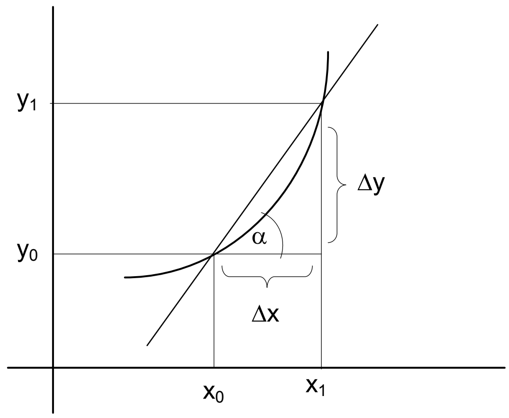
Umrechnen log $\rightarrow$ ln

$y = 10^{x}$ $\quad$ $y = 10^{\log y}$

$e^{\ln y} = e^{\ln 10.\log y}$

daher : $\ln y = \ln 10.\log y$

II. Differentialrechnung



Bedeutung der Differentiation:
Wie schnell (oder wie stark) ändert sich eine Funktion an einer bestimmten Stelle ?

(a) brauchen mindestens **2 Punkte**, um eine Steigung (Differenz) bilden zu können

(b) möchte hier Steigung in <u>einem</u> Punkt $\rightarrow$ Differentiation

Differenzenquotient:

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{(y_1 - y_0)}{x_1 - x_0} \qquad \tan\alpha = \frac{\Delta y}{\Delta x}$$

Je kleiner Δx wird, umso genauer passt sich Sekante der tatsächlichen Kurve an:
Im Grenzfall für $\Delta x = 0$ wird die Sekante zur Tangente
(wenn die Funktion f(x) schon eine Gerade ist, dann ist die Sekante immer schon eine Tangente. Der Differentialquotient ist dann konstant. Ist die Funktion keine Gerade, dann ist der Differentialquotient keine Konstante).

Sprechweise: Δx geht gegen Null: $\Delta x \rightarrow dx, \quad \Delta y \rightarrow dy$

$\boxed{\text{Aus dem Differenzenquotient wird der} \rightarrow \text{Differentialquotient}}$

Differentialquotient:

$$\underbrace{\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}}_{arithm.Def} = \underbrace{\frac{dy}{dx}}_{y'} = \underbrace{\tan\alpha}_{geometr.}$$

$\frac{dy}{dx}$ stellt die Steigung der Funktion f(x) in Punkt x dar.

Schreibweisen: $\frac{dy}{dx}$, f'(x), y' (sprich: f-Strich von x, y-Strich)

<u>Beispiel</u>:
Betrachte die Funktion y = x²; Diese Funktion hat an jedem Punkt eine andere Steigung. Mithilfe der Differentialrechnung kann nun eine Funktion für die Steigung an jedem beliebigen Punkt gefunden werden:

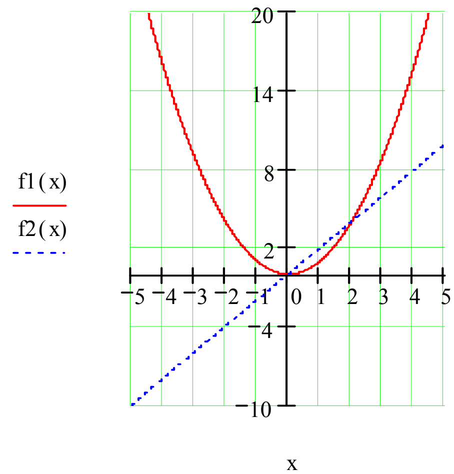
$$y = f(x) = x^2$$
$$y_1 = (x_0 + \Delta x)^2$$
$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{y_1 - y_0}{x_1 - x_0}$$
$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{(x_0 + \Delta x)^2 - x_0{}^2}{x_1 - x_0}$$
$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{x_0{}^2 + 2x_0\Delta x + \Delta x^2 - x_0{}^2}{\Delta x}$$
$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{2x_0\Delta x + \Delta x^2}{\Delta x}$$
$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = 2x_0 + \Delta x$$

Grenzübergang :

$$\frac{dy}{dx} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} 2x_0 + \Delta x = 2x$$

$f1(x) := x^2$

$f2(x) := 2 \cdot x$



Parabel f(x) =x² und Ableitung f'(x) = 2x

Spezielle Abkürzung, wenn y = f(t) (Zeitfunktion)

$$\frac{dx}{dt} = \dot{x}$$

<u>Rechenregeln:</u>

$y = k$	$y' = 0$	
$y = x$	$y' = 1$	
$y = k\,x$	$y' = k$	
$y = x^n$	$y' = n.x^{n-1}$	
$y = \ln x$	$y' = \frac{1}{x}$	
$y = \log x$	$y' = \frac{1}{\ln 10.x}$	
$y = a^x$	$y' = a^x \ln a$	
$y = e^x$	$y' = e^x$	*(ln e=1)*
$y = \sin\alpha$	$y' = \cos\alpha$	

$y = \cos\alpha \qquad y' = -\sin\alpha$

$y = \tan\alpha \qquad y' = \dfrac{1}{\cos^2\alpha}$

$y = \cot\alpha \qquad y' = \dfrac{-1}{\sin^2\alpha}$

Summenregel: $y = u(x) + v(x)$
$y' = u'(x) + v'(x)$

Produktregel : $y = u(x) \cdot v(x)$
$y' = u'(x) \cdot v(x) + u(x) \cdot v'(x)$

Quotientenregel : $y = \dfrac{u(x)}{v(x)}$

$$y' = \frac{u'(x) \cdot v(x) - v'(x) \cdot u(x)}{v(x)^2}$$

Kettenregel : $y = f(u(x))$
oder $y = f(u)$ *und* $u = u(x)$
$y' = f'(u(x)) \,.\, u'(x)$

$$\frac{df}{dx} = \frac{df}{du} \cdot \underbrace{\frac{du}{dx}}$$

df/du ist die äußere, *du/dx* ist die innere Ableitung

<u>Ableitung höherer Ordnung :</u>

Allgemein: $y^{(n)} = \dfrac{d^n y}{dx^n}$

Beispiele: $y = f(x) = x^4$
$y^{I} = 4x^3$
$y^{II} = 12x^2$ Bsp : wird bei Kurvendiskussionen gebraucht
$y^{III} = 24x$
$y^{IV} (= y^{(4)}) = 24$
$y^{V} = 0$

Beispiel aus der Physik :

Geschwindigkeit: $v = \dfrac{ds}{dt}$ (1. Ableitung des Weges nach der Zeit)

Beschleunigung: $a = \dfrac{dv}{dt} = \dfrac{d^2 s}{dt^2}$ (2. Ableitung des Weges nach der Zeit)

Partielle Differentiale:
Was passiert bei einer Funktion von zwei oder mehreren Variablen, z.B. f(x,y) ?

z = f (x,y)

Mit der Schreibweise $\frac{\partial z}{\partial x}$..... wird ausgedrückt, daß es sich um ein partielles Differential handelt.

$\frac{\partial z}{\partial x}$..... separate Ableitung der Funktion z von x

$\frac{\partial z}{\partial y}$..... separate Ableitung der Funktion z von y

→ jetzt gleichzeitige Abhängigkeit:

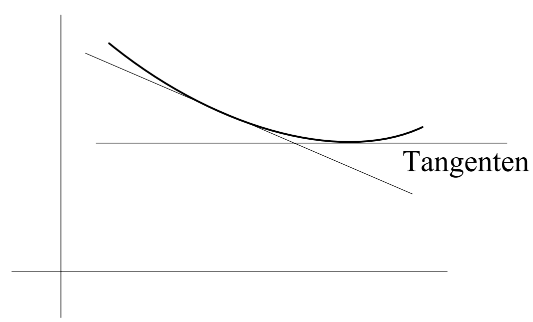
totales Differential dz = $\frac{\partial z}{\partial x}dx + \frac{\partial z}{\partial y}dy$

Beispiel: z = f (x,y) = $x^3 + 7x^2y - 5y^6$

$$\frac{\partial z}{\partial x} = 3x^2 + 14xy$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = 7x^2 - 30y^5 ; \qquad dz = (3x^2 + 14xy)dx + (7x^2 - 30y^5)dy$$

Kurvendiskussion



1. Ableitung: Die Steigung der Tangente bei (lokalen) Extremwerten, das sind Minima und Maxima, wird 0. ⇒ y' = 0 (d.h. Steigung = 0)

2. Ableitung: * An Wendepunkten ist die 2. Ableitung y'' = 0 !
* Aus der 2. Ableitung läßt sich feststellen, ob es sich bei dem Extremwert um eine Maximum oder ein Minimum handelt.
→ Maximum: y'' < 0
→ Minimum: y'' > 0

Beispiele:

1) $y = 3x^2 - 2x + 15$

$y` = 6x - 2$

$y = \frac{3x^2}{(4-x)}$ (Anwendung der Quotientenregel: $\frac{u}{v} = \frac{u'v - v'u}{v^2}$)

$y' = \frac{6x(4-x) - 3x^2(-1)}{(4-x)^2}$

$y' = \frac{24x - 6x^2 + 3x^2}{(4-x)^2}$

$y' = \frac{-3x^2 + 24x}{(4-x)^2}$

2) $y = (x^2 - 5)^3$

$y' = 3(x^2 - 5)^2 \underbrace{2x}_{innereAbleitung} = 6x(x^2 - 5)^2$

3) y = sin (ωt + ß)

y' = ω.cos(ωt + ß) ; (ω ist die innere Ableitung)

4) y = tan x

$y' = \left(\frac{\sin x}{\cos x}\right)' = \frac{\cos x \cos x - \sin x(-\sin x)}{(\cos x)^2}$

$y' = \frac{\cos^2 x + \sin^2 x}{\cos^2 x} = \frac{1}{\cos^2 x}$