ÜBUNGSAUFGABEN UND PROJEKTE - UE (2 SSt.) zur VO (4 SSt.) STOCHASTISCHE MODELLBILDUNG (SS 2010)

Aufgaben aus der Kombinatorik (Wiederholung)

Lösen Sie die folgenden Textaufgaben und stellen Sie für jede der einzelnen Aufgaben fest, welche(s) kombinatorische Hilfsmittel Sie dabei von der im Anhang bereitgestellten Liste von Hilfsmitteln verwenden.

1. A braille letter is formed by rising at least one dot. in a 6 dot matrix. The letter ”e”, for example, is written

   $$\begin{array}{cc} \mathrm{o} & \bullet \\ \bullet & \mathrm{o} \\ \bullet & \bullet \end{array}$$

   Punctuations, marks also have specified dot patterns, as do common words, suffixes and so on. In all, how many different characters can be formed using braille?

2. Morsezeichen werden aus den Symbolen ”·” und ”-” gebildet. Wieviele Zeichen lassen sich insgesamt darstellen, wenn ein Zeichen durch eine Folge von höchstens 5 und mindestens 1 Elementarzeichen verschlüsselt werden?

3. In einer Jugendherberge ist in den Zimmern $1, 2, 4, 7, 8$ und 9 je ein Bett frei. Berechne auf wieviele Arten 4 Wanderer auf diese Zimmer aufgeteilt werden können!

4. Wieviele Sitzordnungen gibt es in einer Klasse mit 20 Schülern, wenn (a) 22, (b) 24 Plätze zur Verfügung stehen?

5. Wieviele verschiedene Tanzpaare kann man aus 11 Damen und 11 Herren in einer Tanzschule bilden?

6. Aus 6 Bewerbern soll eine Staffel von 4 Läufern zusammengestellt werden. Berechne die Anzahl der möglichen Staffeln!

7. Einem Kandidaten werden in einer Prüfung 10 Fragen vorgelegt, von denen er (a) 3, (b) 4 Fragen zu ziehen hat. Berechne die Anzahl der Wahlmöglichkeiten!

8. Bei einer Prüfung sind 10 Fragen mit ”ja” oder ”nein” zu beantworten. Wie viele Möglichkeiten gibt es, bei denen genau 8 Fragen richtig beantwortet sind?

9. Auf einer Druckseite mit insgesamt 2000 Zeichen befinden sich 3 Druckfehler. Auf wieviele mögliche Arten können diese entstehen, wenn der Zeichenvorrat aus 35 Zeichen besteht?

10. An art collection on auction consisted of 4 Dalis, 5 Van Goghs, and 6 Picassos, and at the auction were 5 art collectors. The society page reporter only observed the number of Dalis, Van Goghs, and Picassos acquired by each collector. How many different results could she have recorded if all works were sold?

11. Zeigen Sie für $n \in \mathbb{N}$ und $k \in \{0, ..., n\}$

    (a) $\binom{n}{k}$ ist die Anzahl der k-elementigen Teilmengen einer n-elementigen Menge.

    Formal: Sei $U = \{ S \subseteq \{1, ..., n\} \, : \, |S| = k \}$. Dann gilt $|U| = \binom{n}{k}$.

    (b) $\binom{n}{k}$ ist die Anzahl der 0-1-Folgen der Länge n mit genau k Einsen.

    Formal: Sei $\{0,1\}^n_k = \{ (\varepsilon_1, ..., \varepsilon_n) \in \{0,1\}^n \, : \, \sum_{i=1}^n \varepsilon_i = k \}$. Dann gilt $|\{0,1\}^n_k| = \binom{n}{k}$.

12. Es seien $N \in \mathbb{N}$, $n \in \{1, ..., N\}$ und $s \in \{0, ..., N\}$. Zeigen Sie

$$\sum_{k=0}^{n} \binom{s}{k} \binom{N-s}{n-k} = \binom{N}{n}.$$

    Machen Sie diese Formel auch anschaulich klar.

Aufgaben zu § 1 Diskrete Modelle

Lösen sie die folgenden Aufgaben nach dem *Laplace-Prinzip* [1]. Darunter versteht man folgende Vorgangsweise.

Man wählt die Grundmenge Ω so, dass die Annahme gerechtfertigt ist, dass alle Ausgänge dieselbe Chance haben einzutreten. Man bestimmt die Anzahl $|\Omega|$ der Elemente in Ω ('Anzahl der möglichen Fälle'), die Anzahl $|A|$ der Elemente des in Frage stehenden Ereignisses A ('Anzahl der für A günstigen Fälle) und berechnet die W-keit von A nach der Vorschrift $P(A) = |A|/|\Omega|$.

Schreiben Sie jeweils die Grundmenge, auf die Sie sich beziehen, und die betrachteten Ereignisse formal an.

13. Zwei symmetrische Würfel werden geworfen. Bestimmen Sie die Wahrscheinlichkeiten aller möglichen Augensummen, wenn die Würfel

    (a) beide in der üblichen Art, also mit $1, 2, ..., 6$, beschriftet sind,

    (b) in der folgenden Weise beschriftet sind: $1, 2, 2, 3, 3, 4$ und $1, 3, 4, 5, 6, 8$.

[1] **Bezeichnung:** Ein Zufallsxperiment mit endlicher Grundmenge Ω, für welche die Annahme

$$p(\omega) = \frac{1}{|\Omega|} \quad \forall \omega \in \Omega$$

getroffen wird, heißt *Laplace-Experiment.* Die betreffende Annahme heißt *Laplace-Annahme.*

14. Zwei symmetrische Tetraeder werden geworfen.

    (a) Bestimmen Sie die W-keiten aller möglichen Augensummen, wenn beide Tetraeder mit $1, 2, 3, 4$ beschriftet sind.

    (b) Gibt es andere Beschriftungen mit natürlichen Zahlen, für die sich die gleichen Summen mit denselben W-keiten ergeben ?

15. Ein symmetrischer Würfel (mit den Seiten $1, 2, ..., 6$) wird 7 mal geworfen. Dann muss mindestens eine Augenzahl wiederholt auftreten. Berechnen Sie die W-keit dafür, dass die erste Wiederholung beim k-ten Wurf auftritt $(2 \leq k \leq 7)$.

16. Wie groß ist die W-keit, dass in einem gut gemischten Paket Bridgekarten die oberste Karte ein As ist,

    (i) wenn das Paket vollständig ist

    (ii) wenn man weiß, dass drei Karten fehlen, aber nicht welche ?

17. Man wirft vier symmetrische Tetraeder, von denen jeweils drei Seiten kein Auge tragen ('blind' sind), während die vierte Seite des k-ten Tetraeders k Augen trägt $(1 \leq k \leq 4)$. Die geworfenen Augenzahlen werden addiert. Berechnen Sie die W-keiten für alle möglichen Augensummen.

18. Gabriele und Edwin erfinden folgendes Spiel. Sie geben weiße und schwarze Kugeln in einen Topf. Gabriele zieht zwei Kugeln zufällig heraus und gewinnt, wenn sie gleichfärbig sind, andernfalls gewinnt Edwin. Edwin schlägt vor, zwei weiße und eine schwarze Kugel zu verwenden. Ist dieses Spiel fair?

    Wieviele weiße und schwarze Kugeln würden Sie nehmen, um ein faires Spiel zu erhalten? Läßt sich eine allgemeine Regel dafür angeben?

19. In einer Urne befinden sich n Kugeln, wovon 2 schwarz sind und $n-2$ weiß. Person A zieht solange zufällig und ohne Zurücklegen, bis die erste schwarze Kugel gezogen wird; dann zieht Person B solange weiter, bis die zweite schwarze Kugel gezogen wird. Die jeweils gezogenen weißen Kugeln stellen den Gewinn dar. Bestimmen Sie in beiden Fällen die W-keit, genau k weiße Kugeln zu ziehen $(k \in \{0, 1, ..., n-2\})$.

20. Zu den folgenden drei Aufgaben werden Lösungen angeboten. Entscheiden Sie, ob die Lösungen korrekt sind und ersetzen Sie nötigenfalls die falschen durch richtige.

    (a) Aus einem Paket Bridgekarten werden zufällig 3 Karten ohne Zurücklegen gezogen. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, da keine Herzkarte darunter ist?

    Lösung: Die Anzahl der möglichen Fälle ist $\binom{52}{3}$. Die Anzahl der günstigen Fälle erhält man so: Da die erste Karte keine Herzkarte sein darf, hat man beim ersten Zug 39 Möglichkeiten. Nachdem eine davon gezogen ist, hat man 38 Möglichkeiten für eine Nicht-Herzkarte und schließlich beim dritten Zug 37 Möglichkeiten. Somit ist die Anzahl der günstigen Fälle gleich $39 \cdot 38 \cdot 37$, und die gesuchte Wahrscheinlichkeit ist $39 \cdot 38 \cdot 37/\binom{52}{3}$.

(b) Aus einem Paket Bridgekarten werden 10 ohne Zurücklegen zufällig gezogen. Gesucht ist die Wahrscheinlichkeit, da mindestens 9 davon von derselben Farbe sind.

Lösung: Die Anzahl der möglichen Fälle ist $\binom{52}{10}$. Günstige Fälle: Es gibt 4 Möglichkeiten, eine Farbe auszuwählen, und es gibt $\binom{13}{9}$ Möglichkeiten, 9 Karten von einer Farbe zu wählen. Jede dieser $4 \cdot \binom{13}{9}$ Möglichkeiten kann mit einer der restlichen Karten kombiniert werden. Dies ergibt insgesamt $4 \cdot \binom{13}{9} \cdot 43$ günstige Fälle. Die gesuchte Wahrscheinlichkeit ist daher $4 \cdot \binom{13}{9} \cdot 43/\binom{52}{10}$.

(c) Aus einem Paket Bridgekarten wird zweimal mit Zurücklegen zufällig gezogen. Bei jeder Ziehung seien alle 52 Möglichkeiten gleich wahrscheinlich. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, da Karo- und Herzkönig gezogen werden? In welcher Reihenfolge diese beiden Karten auftreten, ist belanglos.

Lösung: Da es belanglos ist, in welcher Reihenfolge die beiden Könige gezogen werden, handelt es sich um eine ungeordnete Stichprobe mit Zurücklegen. Diese Anzahl ist gegeben durch $\binom{52+2-1}{2}$. Karo- und Herzkönig stellen eine solche Stichprobe dar. Also ist die gesuchte Wahrscheinlichkeit gleich $1/\binom{53}{2}$.

21. Es werden n Personen zufällig ausgewählt und nach ihrem Geburtstag gefragt. Wie groß muss n sein, damit die W-keit dafür, da mindestens eine unter den n Personen am gleichen Tag Geburtstag hat wie Sie, ungefähr $1/2$ ist?

22. In einer Urne befinden sich $N-1$ weiße und eine schwarze Kugel. Es werden $n \leq N$ Kugeln (i) mit Zurücklegen (ii) ohne Zurücklegen zufällig gezogen.

    Bestimmen Sie in beiden Fällen die W-keit des Ereignisses, dass die schwarze Kugel in der Stichprobe enthalten ist.

23. Eine Urne enthält rote und schwarze Kugeln. Wenn zwei Kugeln zufällig gezogen werden, ist die W-keit, dass beide rot sind, gleich $1/2$.

    (a) Kann man aufgrund dieser Information entscheiden, ob mit oder ohne Zurücklegen gezogen wird ?

    (b) Wie groß muss die Anzahl der Kugeln in der Urne mindestens sein ?

    (c) Wie groß muss die Anzahl der Kugeln in der Urne mindestens sein, wenn die Anzahl der schwarzen Kugeln gerade ist ?

24. n Spielsteine werden zufällig und ohne gegenseitige Beeinflussung auf vier Felder verteilt.

(a) Man berechne die W-keit, dass kein Feld leer bleibt.

(b) Wie groß muss n mindestens sein, damit die W-keit dieses Ereignisses mehr als 90% beträgt ?

25. Eine Urne enthält 6 weiße, 6 rote und 6 schwarze Kugeln. Es werden 5 Kugeln (a) mit und (b) ohne Zurücklegen zufällig gezogen.

    Wie groß ist die W-keit, dass in der Stichprobe alle Farben vertreten sind ?

26. Fünf Frauen und fünf Männer bilden eine Tischrunde, wobei jede Person ihren angestammten Sitzplatz hat. Wie groß ist die W-keit, dass keine Frau auf ihrem Platz zu sitzen kommt, wenn zehn Personen in zufälliger Weise Platz nehmen ?

27. Von drei Personen schreibt jede zufällig und unabhängig von den anderen fünf verschiedene Zahlen aus $\{1, 2, ..., 10\}$ auf einen Zettel. Wie groß ist die W-keit, dass genau k Zahlen von niemandem aufgeschrieben werden $(0 \leq k \leq 5)$?

28. Aus einem Schulbuch: In einer Gruppe von 10 Personen wählt jede Person zufällig und unabhängig von den anderen zwei "Freunde" aus. Wer von niemanden ausgewählt wird, gilt als einsam.

    (a) Berechne die W-keit, dass eine bestimmte Person einsam bleibt.

    (b) Wie groß ist die W-keit, dass mindestens eine Person einsam bleibt?

29. Ein Kartenpaket enthält 16 Spielkarten, von denen 4 Herzkarten sind. Jeder von 3 Spielern erhält zufällig 4 Karten zugeteilt. Berechnen Sie die W-keit, dass jeder Spieler mindestens eine Herzkarte erhält.

30. An einer Kasse werden Eintrittskarten zum Preis von 5 Euro verkauft. Vor der Kasse steht eine Schlange von $2n$ Personen (in zufälliger Reihenfolge), von denen n einen 5-Euro Schein und n einen 10-Euro Schein haben. Die Kasse hat kein Wechselgeld. Wie groß ist die W-keit, dass niemand wegen fehlenden Wechselgeldes warten muss ?

    Hinweis: Durch Berechnung der W-keit für kleine n kann man rasch zu einer Vermutung für allgemeines n kommen.

31. Seien $n \in \mathbb{N}$ und

$$p_k^{(n)} = \frac{1}{k!} \sum_{i=0}^{n-k} \frac{(-1)^i}{i!}\,, \quad k \in \{0, ..., n\}\,. \tag{1}$$

    (a) Zeigen Sie analytisch, dass die durch (1) gegebenen Zahlen folgende beiden Bedingungen erfüllen:

$$\text{(i)} \quad p_k^{(n)} \geq 0 \ \ \forall\, k \in \{0, ..., n\}\,, \qquad \text{(ii)} \ \sum_{k=0}^{n} p_k^{(n)} = 1\,,$$

(b) bestimmen Sie die durch

$$\lim_{n\to\infty} p_k^{(n)}\ ,\ k \in \mathbb{N}_0\ ,$$

gegebene Grenzverteilung.

Aufgaben zu § 2 Diskrete Zufallsvariable und wichtige diskrete Verteilungen

32. Aus einer Urne mit $N\,(N \geq 3)$ Kugeln, welche von 1 bis N durchnummeriert sind, werden 3 Kugeln zufällig und ohne Zurücklegen gezogen. Es sei X die mitteler (zweitgrößte) der gezogenen Nummern.

    (a) Bestimmen Sie die Verteilung von X.

    (b) Überprüfen Sie, ob Ihr Ergebnis tatsächlich eine W-keitsverteilung ist.

    (c) Diskutieren Sie das Monotonieverhalten der Verteilung.

    (d) Erstellen Sie Histogramme für ausgewählte Werte von N.

33. Erstellen Sie mithilfe des Computers Histogramme der hypergeometrischen Verteilung $H_{n,N,s}$ für folgende Parametertripel und präsentieren Sie die Ergebnisse in geeigneter Form:

	n	N	s
a)	5	50	7
b)	9	68	6
c)	10	15	8
d)	11	18	9
e)	6	45	40
f)	7	54	48

34. Aus einer Urne mit s schwarzen und w weißen Kugeln ($s, w > 0$, $s + w = N$) darf man nach Belieben entweder 2 oder 4 Kugeln mit Zurücklegen ziehen. Falls mindestens die Hälfte der gezogenen Kugeln schwarz ist, erhält man einen Preis. Wann soll man sich für 2, wann für 4 entscheiden ? Dieselbe Frage in anderer Einkleidung (S. Ross):

    Jeder Flugzeugmotor fällt unabhängig von den anderen während eines Fluges mit W-keit $1 - p$ aus ($0 < p < 1$). Voraussetzung für einen erfolgreichen Flug ist, dass mindestens die Hälfte der Motoren nicht versagt. Für welche Werte von p ist eine zweimotorige Maschine einer viermotorigen vorzuziehen ?

35. Eine Münze mit den Ausfällen 1 und 0 und Verteilung (p, q) werde n mal geworfen. Wie groß ist die W-keit, dass die Anzahl der geworfenen Einsen gerade ist ?

36. *Überbuchungen*

Erfahrungsgemäß nehmen 8% aller Hotelgäste, die ein Zimmer reservieren, dieses in Anspruch.

(a) Das Hotelmanagement weiß dies und reserviert 28 Zimmer, obwohl nur 26 verfügbar sind. Wie groß ist die W-keit, dass kein Gast 'umgeleitet' werden muss?

(b) Wieviele Buchungen dürfen bei 46 vorhandenen Zimmern entgegengenommen werden, wenn die Wahrscheinlichkeit dafür, dass das Hotelmanagement mit empörten Gästen konfrontiert ist, kleiner als (i) 5%, (ii) 10% sein soll?

37. *Capture-Recapture Methode*

In einem bestimmten Gebiet soll der Umfang N einer speziellen Tierpopulation geschätzt werden. Zu diesem Zweck werde m Tiere eingefangen, markiert und wieder freigelassen. Nach einer bestimmten Zeit wird eine Stichprobe vom Umfang n entnommen. Die Stichprobe enthalte k markierte Tiere $(k \geq 1)$. Aufgrund dieser Daten soll N mittels des sogenannten Maximum-Likelihood Prinzips geschätzt werden. Es lautet: Wähle jenen Wert $\hat{N}$ als Schätzwert für N, für den die W-keit des beobachteten Ereignisses maximal ist. Man bestimme $\hat{N}$ (in Abhängigkeit von m, n und k). Es wird angenommen, dass zwischen der ersten und zweiten Stichprobe vollständige Durchmischung erfolgt.

38. Eine Elektrofirma liefert Sicherungen in Packungen zu 150 Stück aus und kann aufgrund jahrelanger Geschäftserfahrung versprechen, da jede einzelne Sicherung mit 98%iger W-keit in Ordnung ist. Man berechne die W-keit dafür, da in einer Packung mehr als drei Sicherungen defekt sind, und vergleiche den Wert mit dem Ergebnis, welches man durch die Poissonapproximation erhält.

39. (a) Ermitteln Sie für das in der Vorlesung beschriebene Experiment von *Rutherford* und *Geiger* aus dem Jahre 1910 die mittlere Anzahl

$$\hat{\lambda} = \frac{\sum_{i=0}^{14} i \cdot b(i)}{2608}$$

der Szintillationen pro Zeitintervall und den Schätzwert $\hat{p} = \frac{\hat{\lambda}}{2608}$ für die Wahrscheinlichkeit, dass eine bestimmte Szintillation in ein vorgegebenes Zeitintervall der Dauer von 7.5 Sekunden fällt.

(b) Vergleichen Sie das Histogramme der Binomialverteilung mit den Parametern 2608 und $\hat{p}$ mit dem der Poissonverteilung mit dem Parameter $\hat{\lambda}$.

40. (a) Diskutieren Sie das Monotonieverhalten der Poissonverteilung P_λ und (b) illustrieren Sie das Ergebnis anhand von Histogrammen.

41. (a) Diskutieren Sie das Monotonieverhalten der Pascalverteilung $Pc_{k,p}$ und (b) illustrieren Sie das Ergebnis anhand von Histogrammen.

42. Wird eine faire Münze $2n$ mal geworfen, dann ist die W-keit u_n für genau n Einsen gegeben durch

$$u_n = \frac{1}{2^{2n}} \binom{2n}{n}, \; n \in \mathbb{N}.$$

Wir wissen bereits, dass $\lim_n u_n = 0$ ist. Oft ist es jedoch wichtig, über die Größenordnung der Folge $\{u_n\}$ Bescheid zu wissen. Die folgenden Überlegungen liefern diese auf einfache Weise.

Sei $a_n = \sqrt{n} \cdot u_n, \; n \in \mathbb{N}$. Zeigen Sie:

(a) $\{a_n\}$ ist monoton wachsend.

(b) Es ist $2nu_n \leq \sqrt{2n-1}$ für alle $n \geq 1$.

(c) $\{a_n\}$ besitzt einen Grenzwert $c > 0$.

Es gilt also

$$u_n \sim \frac{c}{\sqrt{n}} \;\; (n \to \infty)^2.$$

Falls Sie den Wert von c nicht schon kennen: Versuchen Sie, zu einer Vermutung über diesen zu gelangen, indem Sie Glieder der Folge $\{1/a_n^2\}$ numerisch berechnen.

43. *Wartezeiten beim Ziehen ohne Zurücklegen*

Aus einer Urne mit s schwarzen und w weißen Kugeln ($w+s = N$) werden nacheinander und zufällig Kugeln ohne Zurücklegen gezogen. Es sei T_k die Anzahl der Ziehungen, bis zum k-ten Mal eine schwarze Kugel gezogen wird ($1 \leq k \leq s$).

(a) Begründen Sie die folgende Formel:

$$P(T_k = n) = \frac{\binom{n-1}{k-1}\binom{N-n}{s-k}}{\binom{N}{s}}, \;\; n \in \{k, k+1, ..., N-(s-k)\}.$$

(b) Diskutieren Sie das Monotonieverhalten dieser W-keitsverteilungen.

(c) Stellen Sie einen Zusammenhang mit der Pascalverteilung her.

Aufgaben zu § 3 Bedingte Wahrscheinlichkeit und Unabhängigkeit

44. Drei symmetrische Würfel werden nacheinander geworfen: X_i bezeichne die beim i-ten Wurf geworfen Augenzahl, $i \in \{1,2,3\}$. Die Verteilung der Augensumme S_2 von zwei Würfen bzw. die Augensumme S_3 aller drei Würfe ist in folgender Tabelle jeweils durch die Anzahl $|\{S_2 = k\}|$ der günstigen Fälle, $k \in \{2, ..., 12\}$ bzw. $|\{S_3 = k\}|$, $k \in \{3, ..., 18\}$ angegeben.

k	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18
$\lvert\{S_2 = k\}\rvert$	1	2	3	4	5	6	5	4	3	2	1						
$\lvert\{S_3 = k\}\rvert$		1	3	6	10	15	21	25	27	27	25	21	15	10	6	3	1

(a) Geben Sie - in Abhängigkeit von $i \in \{1, ..., 6\}$ und $k \in \{3, ..., 18\}$ - eine Formel für die bedingte Wahrscheinlichkeit

$$p_i(k) := P(\{X_1 + X_2 + X_3 = k\} \mid \{X_1 = i\})$$

an. (b) Geben Sie die durch $\{X_1 = 5\}$ bedingte Verteilung

$$p_5(k)\,,\ k \in \{7, ..., 17\}$$

der Augensumme $X_1 + X_2 + X_3$ an. (c) Zeigen Sie, dass es nur zwei Paare $(i, k) \in \{1, ..., 6\} \times \{3, ..., 18\}$ derart gibt, dass die Ereignisse $\{X_1 = i\}$ und $\{X_1 + X_2 + X_3 = k\}$ stochastisch unabhängig sind und geben Sie diese an.

45. Der Zufallsvektor $\mathbb{X} = (X_0, X_1, X_3)$ besitze die Multinomialverteilung $M_{n,P}$ mit den Parametern $n = 5$ und $P = \left(\frac{1}{3}, \frac{1}{3}, \frac{1}{3}\right)$ und somit dem Wertebereich

$$W_{\mathbb{X}} = \{\, (k_0, k_1, k_2) \in \mathbb{N}_0^3 : \sum_{j=0}^{2} k_j = 5 \,\}\,.$$

(a) Geben Sie die Elementarwahrscheinlichkeiten dieser Multinomialverteilung als Funktion des Vektors (k_0, k_1) an.

(b) Ermitteln Sie die Randverteilungen der Zufallsvariablen X_0 und X_1.

(c) Ermitteln Sie die Quotienten

$$\frac{P(X_1 = k_1 \mid X_0 = k_0)}{P(X_1 = k_1)} \left(= \frac{P(X_1 = k_1,\ X_0 = k_0)}{P(X_1 = k_1) \cdot P(X_0 = k_0)} \right)$$

für alle 21 möglichen Paare (k_0, k_1) und stellen Sie fest, für welche davon das Eintreten des Ereignisses $\{X_0 = k_0\}$ jenes von $\{X_1 = k_1\}$ begünstigt.

46. Berechnen Sie - auf zwei verschiedene Arten - die Wahrscheinlichkeit des Ereignisses $\cup_{j=1}^{n} A_j$ unter folgenden beiden Voraussetzungen und geben Sie eine Aufgabenstellung an, auf welche diese Voraussetzungen zutreffen.

(i) Die Ereignisse $A_j\,,\ j \in \{1, ..., n\}$ sind vollständig unabhängig,

(ii) es gilt $P(A_j) = p\ \forall\, j \in \{1, ..., n\}$.

47. Man würfelt zweimal mit einem Würfel, dessen Augenzahlen $1, ..., 6$ mit den W-keiten $p_1, ..., p_6$ fallen. Dem Umstand Rechnung tragend, dass die Würfe sich gegenseitig nicht beeinflussen, wählen wir folgendes Modell:

$$\Omega = \{1, ..., 6\}^2 \quad \text{und} \quad p_{(i,j)} = p_i \cdot p_j,\ (i, j) \in \Omega.$$

Zeigen Sie:

(a) $\{p_\omega : \omega \in \Omega\}$ ist eine W-Verteilung.

(b) In diesem Modell gilt: Für je zwei Teilmengen $A, B \subseteq \{1, ..., 6\}$ sind die Ereignisse $A \times \{1, ..., 6\}$ und $\{1, ..., 6\} \times B$ unabhängig. Was bedeutet dies anschaulich ?

48. $(\Omega, \{p_\omega : \omega \in \Omega\})$ sei das Modell in Aufgabe 47. Kann man die W-keiten $p_1, ..., p_6$ so wählen, dass alle möglichen Augensummen dieselbe W-keit haben ?

49. Die Ereignisse $A_1, ..., A_n$ seien vollständig unabhängig und es gelte $P(A_j) = p$ für $1 \leq j \leq n$. Berechnen Sie die W-keit des Ereignisses $\cup_{j=1}^n A_j$ mit und ohne Verwendung des Einschluss-Ausschluss-Prinzips.

50. Aus einer Urne mit N Kugeln, welche von 1 bis N durchnummeriert sind, wird n mal mit Zurücklegen zufällig gezogen. E_n sei das Ereignis, dass jede Kugel mindestens einmal gezogen wird, und A_j sei das Ereignis, dass die Nummer j nicht gezogen wird, $1 \leq j \leq N$, sodass also gilt

$$E_n = A_1^c \cap A_2^c \cap ... \cap A_N^c$$

(siehe ‘Coupon collecting problem’).

(a) Zeigen Sie: Die Ereignisse $A_1, ..., A_N$ sind nicht paarweise unabhängig.

(b) Berechnen Sie $P(E_n)$ unter der (nach (a) nicht korrekten) Annahme, dass die Ereignisse vollständig unabhängig sind und

(c) vergleichen Sie das Ergebnis mit der in der VL hergeleiteten Näherungsformel.

51. In einer Urne befinden sich n Kugeln, wovon 2 schwarz sind und $n-2$ weiß. Person A zieht solange zufällig und ohne Zurücklegen, bis sie die erste schwarze Kugel zieht; dann zieht Person B solange weiter, bis sie die zweite schwarze Kugel zieht. Berechnen Sie die W-keit, dass B genau k weiße Kugeln zieht ($k \in \{0, 1, ..., n-2\}$) (a) ohne (b) mit Verwendung des Satzes von der vollständigen W-keit. Das vollständige Ereignissystem sei bestimmt durch die Anzahl der von A gezogenen weißen Kugeln.

52. A wirft n mal zwei symmetrische Würfel. Es sei X_i die Augensumme beim i-ten Wurf ($i \in \{1, ..., n\}$). Gibt es unter den n Würfen zwei Würfe i, j mit $i < j$ und $X_i = 5$, $X_j = 6$, dann hat A gewonnen. Wie groß ist seine Gewinnchance? (The Doctrine of Chances, Problem XLII)

53. *Gesetz der Fortpflanzung von Laplace*

Eine Urne enthält $m+1$ Münzen (mit den Seiten 1 und 0). Die i-te Münze hat die Verteilung $(\frac{i}{m}, 1 - \frac{i}{m})$, $i \in \{0, 1, ..., m\}$. Eine Münze wird zufällig ausgewählt und fortgesetzt geworfen.

(a) Bestimmen Sie die W-keit, dass in n Würfen genau k Einsen auftreten und berechnen Sie den Grenzwert für $m \to \infty$ ($k \in \{0, 1, ..., n\}$).

(b) Es fällt n mal hintereinander die Eins. Wie groß ist die W-keit, dass auch beim $(n+1)$-ten Wurf die Eins fällt? Berechnen Sie wieder den Grenzwert für $m \to \infty$.

Laplace hat die Frage (b) so eingekleidet: Wie groß ist die W-keit, dass die Sonne morgen wieder aufgeht?

54. Jemand hat eines der folgenden drei Experimente durchgeführt: (1) einen Oktaeder zweimal geworfen oder (2) einen Würfel dreimal geworfen oder (3) einen Tetraeder viermal geworfen. (Die Körper seien in der üblichen Weise beschriftet.) Wir erfahren lediglich, dass die erzielte Augensumme gleich 9 war. Bestimmen Sie die Posteriori-Verteilung der drei Möglichkeiten unter der Annahme, dass a priori alle gleich wahrscheinlich waren und dass die Würfe Laplace-Experimente sind.

55. Aus 3 schwarzen und 3 weißen Kugeln werden 4 zufällig ausgewählt und in eine Urne gelegt. Die Anzahl der schwarzen Kugeln in der Urne wird nicht bekannt gegeben. Aus der Urne werden dann solange Kugeln mit Zurücklegen zufällig gezogen, bis die erste schwarze gezogen wird. Die Anzahl der benötigten Ziehungen sei n.

    Wie groß ist (nach Erhalt dieser Information) die W-keit, dass die Urne eine, zwei oder drei schwarze Kugeln enthält ? Wie verhalten sich diese W-keiten für $n \to \infty$?

56. *Wirksamkeit von Medikamenten*

    Jede Person einer bestimmten Population zieht sich im Mittel pro Jahr 5 Verkühlungen zu. Ein auf dem Markt erhältliches Aufbaumittel reduziert die Anzahl der Verkühlungen für 75% der Population auf im Mittel 3 pro Jahr, für die restlichen 25% ist es ohne Wirkung. Die Anzahl der Verkühlungen sei jeweils Poisson-verteilt.

    Eine Person probiert das Mittel ein Jahr lang aus und bekommt 2 Verkühlungen. Es gilt zu entscheiden, ob das Mittel für die betreffende Person wirksam ist oder nicht.

    (a) Welche Entscheidungshilfe können Sie aufgrund der obigen Daten anbieten ?

    (b) Welchen Schluss würden Sie ziehen, wenn die Person trotz Einnahme des Mittels 6 Verkühlungen bekommt ?

57. *Das N-Türen Problem*

    Hinter genau einer von $N \geq 3$ Türen $1, 2, ..., N$ befindet sich ein Preis. Die W-keit sei für jede Tür gleich $\frac{1}{N}$.

1	2	...	N

    Eine Person A wünscht den Preis zu bekommen. Sie wählt zunächst eine Tür aus und zeigt auf diese. Daraufhin zeigt eine Person B auf eine der restlichen $N-1$ Türen, hinter der sich kein Preis befindet.

Person A erwägt nun zwei Strategien für ihre endgültige Entscheidung:

Strategie I: sich für die ursprünglich gewählte Tür zu entscheiden,

Strategie II: sich zufällig für eine jener $N-2$ Türen zu entscheiden, welche durch ihre eigene Wahl und die erhaltene Auskunft nicht ausgeschlossen wurde.

Berechnen Sie für beide Strategien die W-Keit des Ereignisses, dass die endgültige Entscheidung von A richtig ist.

Hinweis: Gehen Sie von folgenden Bezeichnungen aus

E_N	...	die endgültige Entscheidung ist richtig
$\{X = i\}$	...	die Person A zeigt (zunächst) auf Tür $i \in \{1, ..., N\}$
$\{Y = j\}$	...	der Preis ist hinter Tür $j \in \{1, ..., N\}$
$\{Z = k\}$	...	die Person A wählt beim zweiten Versuch Tür $k \in \{1, ..., N\} \setminus \{i\}$

und nehmen Sie an, dass die Verteilung von X eine beliebige Verteilung $P_X = (\, p_i : i \in \{1, ..., N\}\,)$ ist

Die folgenden beiden Aufgaben sind beliebte einschlägige Denksportaufgaben

D1. Von drei Karten ist eine auf beiden Seiten schwarz, die zweite auf beiden Seiten weiß, und die dritte hat eine weiße und eine schwarze Seite. Eine Karte wird zufällig gezogen und auf den Tisch gelegt. Ihre obere Seite ist schwarz. Wie groß ist die W-keit, dass die untere Seite weiß ist ?

D2. (a) In einer Familie sind zwei Kinder. Eines davon ist ein Mädchen. Wie groß ist die W-keit, dass das andere auch ein Mädchen ist ?

(b) Jemand behauptet: Wenn ich im Bus eine Frau treffe, welche ein Mädchen bei sich hat und erklärt, dass dies ihre Tochter sei und dass sie noch ein Kind habe, dann ist die W-keit, dass dies auch ein Mädchen ist, gleich 1/2.

Sind Sie damit einverstanden ? Beschreiben (a) und (b) dieselbe Situation ?

58. Zeigen Sie, dass $PC_{k_1,p} * PC_{k_2,p} = PC_{k_1+k_2,p}$ ist $(k_1, k_2 \in \mathbb{N},\ 0 < p < 1)$ und interpretieren Sie diese Identität anschaulich.

Aufgaben zu § 4 Der Erwartungswert von diskreten Zufallsvariablen

59. Fortsetzung von Aufgabe 17 (Tetraeder mit blinden Seiten): Berechnen Sie den Erwartungswert der Augensumme X.

60. Fortsetzung von Aufgabe 32 (Zweitgrößte Augenzahl): Berechnen Sie den Erwartungswert von X.

61. Ein Alternativexperiment mit Erfolgswahrscheinlichkeit p, $0 < p \leq 1$, wird sooft durchgeführt, bis der erste Erfolg eintritt, höchstens jedoch m-mal ($m \in \mathbb{N}$). Es sei $T^{(m)}$ die Anzahl der benötigten Versuche. Berechnen Sie $E(T^{(m)})$ und $\lim_{m\to\infty} E(T^{(m)})$.

62. *Chuck-a-luck mit n Würfeln*

    Man setzt einen Einsatz a auf eine Zahl $z \in \{1, ..., 6\}$. Dann werden n Würfel geworfen. Kommt z auf keinem Würfel vor, ist der Einsatz verloren. Kommt z genau k-mal vor ($k \in \{1, 2, ..., n\}$), gewinnt man den Betrag $k \cdot a$. Berechnen Sie (unter der Annahme, da die Würfel symmetrisch sind) den Erwartungswert des Gewinnes X_n und beschreiben Sie das Verhalten der Folge $(E(X_n))_{n=1}^{\infty}$.

63. *Verdopplungsstrategie*

    Beim Roulette wird häufig folgende Strategie in Betracht gezogen. Man setzt den Einsatz e auf 'Ungerade'. Falls eine ungerade Zahl fällt, hat man e gewonnen, andernfalls verliert man e. Im letzteren Fall setzt man im nächsten Spiel $2e$ auf 'Ungerade'. Falls eine ungerade Zahl fällt, erhält man $4e$; der Gewinn beträgt dann $4e - 3e = e$. Andernfalls setzt man im nächsten Spiel $4e$ auf 'Ungerade' usw. Auf diese Weise - so wird argumentiert - gewinnt man früher oder später sicher einen Einsatz. Obwohl diese Strategie auf sichere Gewinne hoffen lässt, haben die Casinos nichts dagegen, wenn man sich ihrer bedient.

    Berechnen Sie den Erwartungswert des Gewinns, wenn maximal n Spiele möglich sind.

64. Es sei Y_n die Anzahl der Fixpunkte in einer zufällig ausgewählten Permutation der Zahlen $1, 2, ..., n$. Berechnen Sie $E(Y_n)$. (Die Verteilung von Y_n wird in der Vorlesung hergeleitet.)

65. Sei X eine reellwertige Zufallsvariable mit endlichem Wertebereich $W_X = \{x_1, x_2, ..., x_N\}$ und gegebener Verteilung $p_i = P(X = x_i)$, $1 \leq i \leq N$.

    Für welchen Wert bzw. welche Werte $y \in \mathbb{R}$ ist die mittlere absolute Abweichung

    $$E(|X - y|) = \sum_{i=1}^{N} |x_i - y| \cdot p_i \qquad \text{minimal?}$$

    Hinweis: Zeichnen Sie zur Orientierung zuerst die Graphen der Funktion $f(y) = E(|X - y|)$, $y \in \mathbb{R}$, für die Fälle $X \sim U(\{1, 2, 3\})$ und $X \sim U(\{1, 2, 3, 4\})$.

66. *Optimale Gruppengröße*

    100 Personen sollen durch Blutprobe auf eine bestimmte Krankheit untersucht werden. Wenn die Proben mehrerer Personen zusammengemischt werden, dann ist der Test positiv (d.h. er zeigt die Krankheit an), wenn mindestens eine Person darunter ist, welche die in Frage stehende

Krankheit hat. Deshalb wird beschlossen, die Personen in Gruppen der Größe N (N Teiler von 100) einzuteilen und die Proben innerhalb jeder Gruppe zusammenzumischen. Falls der Test einer Gruppe positiv ausfällt, wird anschließend jede Person der Gruppe einzeln getestet. Es sei vorausgesetzt, da jede Person unabhängig von den anderen mit W-keit 0.1 an der betreffenden Krankheit leidet.

Welche Gruppengröße garantiert im Mittel die kleinste Anzahl benötigter Tests?

Die folgenden vier Aufgaben lassen sich unter Verwendung der Linearität des Erwartungswertes besonders elegant lösen.

67. Aufgabe 59 für den Ikosaeder: Man wirft 20 homogene Ikosaeder, von denen jeweils 19 Seiten blind sind, während die verbleibende Seite des k-ten Ikosaeders k Augen trägt ($1 \leq k \leq 20$). Berechnen Sie den Erwartungswert der Augensumme X.

68. Aus einer Urne mit N Kugeln, welche von 1 bis N durchnummeriert sind, werden n Kugeln ohne Zurücklegen zufällig gezogen ($n \leq N$). Es sei X die Summe der gezogenen Nummern. Berechnen Sie den Erwartungswert von X.

69. Eine Urne enthält $2N$ Kugeln, wobei jeweils zwei dieselbe Nummer tragen. Es werden n Kugeln ohne Zurücklegen zufällig gezogen. X sei die Anzahl der in der Urne verbliebenen Paare mit gleichen Nummern. Berechnen Sie den Erwartungswert von X.

    (Die ursprüngliche Fragestellung lautete: Wieviele Ehepaare bleiben im Mittel übrig, wenn von insgesamt N Ehepaaren n Personen wegsterben? (*Daniel Bernoulli*, $1700 - 1782$))

70. Wie groß ist die mittlere Anzahl der verschiedenen Geburtstage unter n zufällig ausgewählten Personen ?

71. (a) Zeigen Sie, dass

$$P(X_n = k) = \frac{1}{2N^n} \begin{cases} k^n - (k-1)^n & \text{für} \quad k \in \{1, ..., N\} \\ (2N+1-k)^n - (2N-k)^n & \text{für} \quad k \in \{N+1, ..., 2N\} \end{cases}$$

    für alle Parameter $N, n \in \mathbb{N}$ eine bezüglich $\mu = N + \frac{1}{2}$ symmetrische Wahrscheinlichkeitsverteilung definiert und (b) geben Sie den Erwartungswert dieser Verteilung (mit Begründung) an. (c) Geben Sie den Spezialfall der Verteilung für $n = 2$ an und (d) berechnen Sie $E(X_2)$ gemäß Definition des Erwartungswerts.

72. *Optimales Stoppen*

Sie möchten durch ein- oder zweimaliges Werfen eines symmetrischen Würfels eine möglichst große Augenzahl erreichen, wobei folgende Spielregel vorgesehen ist. Sie werfen den Würfel zunächst einmal und können die geworfene Augenzahl stehenlassen. Erscheint Ihnen diese jedoch zu niedrig, dürfen Sie ein zweites Mal werfen. Dann zählt die Augenzahl des zweiten Wurfes.

Wir nehmen an, Sie entscheiden sich genau dann für einen zweiten Wurf, wenn die Augenzahl des ersten Wurfes $\leq s$ ist (mit $s \in \{0, 1, ..., 6\}$). Welches s ist optimal ? ($s = 0$ [$s = 6$] bedeutet, dass Sie sich nie [stets] für einen zweiten Wurf entscheiden.)

Wie lautet die Antwort, wenn die Zahlen $1, 2, ..., 6$ mit den W-keiten $p_1, p_2, ..., p_6$ ($p_i > 0,\ 1 \leq i \leq 6$) fallen ? (Übersetzen Sie die Fragestellung in ein geeignetes Urnenmodell.)

73. *Optimaler Warenvorrat* (Text siehe Anhang)

    Dieses Beispiel ist Bestandteil der Vorlesung. Arbeiten Sie es durch und fragen Sie nach, wenn Ihnen nicht alles gelingt.

74. Im vorigen Beispiel habe die Zufallsvariable X folgende Verteilung:

$$\begin{aligned} P(X = k) &= \tfrac{1}{m+1}, \quad k \in \{0, 1, ..., m\} \quad (m \in \mathbb{N}), \\ P(X = k) &= pq^k, \quad k \in \mathbb{N}_0 \qquad\qquad (0 < p < 1,\ q = 1 - p). \end{aligned}$$

    Geben Sie jeweils die Stückzahl(en) mit maximaler Gewinnerwartung an.

Aufgaben zu § 5 Varianz und Bernoullisches Gesetz der großen Zahlen

75. Es seien X die Augensumme in Aufgabe 17 bzw. 59 (Tetraeder mit blinden Seiten) und Y die Augenzahl beim Wurf eines symmetrischen Tetraeders mit den Seiten $1, 2, 3, 4$. Wir haben nachgerechnet, dass $E(X) = E(Y)$ ist. Berechnen Sie $V(X)$ und $V(Y)$.

76. Berechnen Sie die Varianz der Poisson-Verteilung unter Verwendung der Formel

$$V(X) = E(X(X-1)) - \mu(\mu - 1) \quad (\mu = E(X)).$$

77. Berechnen Sie die Varianz der Pascal-Verteilung unter Verwendung der Formel

$$V(X) = E(X(X+1)) - \mu(\mu + 1) \quad (\mu = E(X)).$$

78. Es sei Y_n die Anzahl der Fixpunkte einer zufällig ausgewählten Permutation der Zahlen $1, 2, ..., n$ (siehe Abschnitt (1.6) der Vorlesung und Aufgabe 64). Berechnen Sie die Varianz von Y_n

    (a) unter Verwendung der Verteilung,

    (b) mittels Darstellung von Y_n als Summe von Indikatoren.

79. *Vergleich der Schätzgenauigkeit beim Ziehen ohne und mit Zurücklegen*

Aus einer Urne mit s schwarzen und w weißen Kugeln $(s, w > 0;\ s + w = N)$ dürfen

(1) n Kugeln ohne Zurücklegen bzw. (2) m Kugeln mit Zurücklegen

gezogen werden, um den Anteil p der schwarzen Kugeln zu schätzen. Die Anzahl der schwarzen Kugeln in der Stichprobe sei X_n im Fall (1) und Y_m im Fall (2). Als Schätzer werden die Anteile

$$X_n/n \quad \text{bzw.} \quad Y_m/m \text{ verwendet.}$$

(a) n sei fest gegeben. Bestimmen Sie m so, dass

$$V\,(Y_m/m) \le V\,(X_n/n) < V\,(Y_{m-1}/(m-1)) \text{ ist,}$$

also beide Vorgangsweisen ungefähr gleiche Schätzgenauigkeit haben.

(b) Bestimmen Sie die Werte von m speziell für $N = 100$ und $n \in \{10, 20, 30, ..., 90, 95, 99\}$.

80. Aus einer Urne mit N Kugeln mit den Nummern 1 bis N werden $n \le N$ Kugeln nacheinander, zufällig und ohne Zurücklegen gezogen. Y_n sei die größte gezogene Nummer.

(a) Beschreiben Sie die Grundmenge Ω des Zufallsexperiments und die Ereignisse $\{Y_n \le k\}$, $k \in \{n, ..., N\}$ formal.

(b) Weisen Sie nach, dass die Verteilung von Y_n folgende Form besitzt

$$P(Y_n = k) = \frac{n(k-1) \cdot ... \cdot (k-n+1)}{N \cdot ... \cdot (N-n+1)}\,,\ k \in \{n, ..., N\}\,.$$

Wir nennen diese Verteilung *Stichprobenmaximum-Verteilung mit den Parametern n und N*, kurz: $Y_n \sim SM_{n,N}$.

(c) Diskutieren Sie das Monotonieverhalten der Verteilung und geben Sie deren Modalwert / Modalwerte an.

(d) Überzeugen Sie sich davon, dass die Beziehung

$$k \cdot P(Y_n = k) = \frac{n}{n+1} P(Y_{n+1} = k+1)\,,\ k \in \{n, ..., N\}\,,$$

gilt, wobei $Y_n \sim SM_{n+1,N+1}$.

Berechnen Sie mit Hilfe dieser Beziehung (e) $E\,(Y_n)$ und (f) $V\,(Y_n)$.

Anmerkung: Aus dem Ergebnis von (e) folgt die Identität

$$\sum_{k=1}^{N} \frac{k!}{(k-n)!} = \frac{(N+1)!}{(N-n)! \cdot (n+1)}\,.$$

81. Man setzt beim Roulette die Einsätze $e = 1$ gleichzeitig auf "Unge-rade" und "Rot". Es bezeichne X bzw. Y den jeweiligen Gewinn bei beiden Einsatzvarianten. Die Erwartungswerte und Varianzen der beiden Zufallsgrößen sind[3] $E(X) = E(Y) = -\frac{1}{37}$ bzw. $V(X) = V(Y) = 1 - \frac{1}{37^2}$.

    Berechnen Sie

    (a) den Erwartungswert des Gesamtgewinns $X + Y$ aus beiden Einsätzen mit Hilfe von $E(X)$ und $E(Y)$,

    (b) die Kovarianz $Cov(X, Y)$ von X und Y. (Hinweis: Es gibt jeweils 10 Zahlen, die zugleich "ungerade und rot" bzw. "gerade und schwarz" sind und jeweils 8 Zahlen, die zugleich "ungerade und schwarz" bzw. "gerade und rot" sind.)

    (c) die Varianz des Gesamtgewinns $X + Y$ mit Hilfe von $V(X)$, $V(Y)$ und $Cov(X, Y)$.

    (d) Ergeben sich unterschiedliche Werte für Erwartungswert und Varianz von $X + Y$, wenn man den Einsatz auf "Rot" durch einen Einsatz auf "Schwarz" ersetzt? Begründen Sie Ihre Antwort.

82. *Zur Tschebyschewschen Ungleichung*

    Ist X eine (diskrete) Zufallsvariable mit endlicher positiver Standardabweichung σ, so besagt die Tschebyschewsche Ungleichung:

    $$P(|X - E(X)| \geq k.\sigma) \;\leq\; 1/k^2 \quad \text{fr alle} \;\; k \geq 1\,.$$

    Geben Sie zu beliebigem $k \geq 1$ eine Zufallsvariable an, für die das Gleichheitszeichen gilt.

    (Die Tschebyschewsche Ungleichung liefert somit die beste für alle Zufallsvariablen mit endlicher positiver Varianz gültige Abschätzung.)

Aufgaben zu § 6 Die Normalapproximation der Binomialverteilung

Achten Sie bei der Behandlung der folgenden Aufgaben zur Normalapproximation der Binomialverteilung insbesondere auf folgende Punkte:

A) Festlegung der zugrundeliegenden Zufallsvariablen (Anzahl der 'Erfolge'); Angabe der Erfolgswahrscheinlichkeit p,

B) Formalisierung der in Frage stehenden Bedingung,

C) Zulässigkeit der Normalapproximation,

D) Korrekte Formulierung des Ergebnisses.

[3] unter Missachtung der für einfache Chancen gültigen Sonderregel (Stichwort: *"Prison"*)

83. Ein Meinungsforschungsinstitut weiß aus Erfahrung, dass etwa 80% der Personen, die für ein Interview ausersehen sind, ein solches auch bereit sind zu geben.

    (a) Wieviele Personen sind für ein Interview vorzusehen, wenn mit mindestens 95%-iger W-keit mindestens 1500 Interviews zustande kommen sollen?

    (b) Es werden 50 Interviews geplant. Wie groß ist die W-keit, dass mindestens 35 davon zustande kommen ?

84. Ein Alternativexperiment mit zwei gleich wahrscheinlichen Ausfällen wird n mal durchgeführt, wobei sich die Versuche gegenseitig nicht beeinflussen. Die Versuchsanzahl n soll so festgelegt werden, dass mit mindestens 95%-iger (99%-iger) Sicherheit jeder der beiden Ausfälle mindestens 80 mal auftritt. Wie groß muß n mindestens sein, damit diese Bedingung erfüllt ist ?

85. Bei einem Fährbetrieb zu einer Ausflugsinsel stehen immer zwei gleiche Fährschiffe gleichzeitig bereit. Unter der Annahme, dass sich 1000 Personen mit der W-keit 0.5 für je eines der beiden Fährschiffe entscheiden, bestimme man die Mindestkapazität, die man für ein Fährschiff wählen muss, damit in höchstens 1% aller Fälle Fahrgäste zurückgewiesen werden müssen.

86. Ein Alternativexperiment mit Verteilung (p, q) $(q = 1 - p)$ wird 200 mal durchgeführt, wobei sich die Versuche gegenseitig nicht beeinflussen. Durch geeignete Wahl der Erfolgswahrscheinlichkeit p soll mit mindestens 95%−iger Sicherheit garantiert werden, dass mehr als die Hälfte der Versuche erfolgreich verläuft. Wie groß muß p mindestens sein ?

87. Eine Gruppe von m Personen (m groß) führt eine Abstimmung über ein Projekt durch. Die Mehrheit entscheidet. Es ist bekannt, dass a Personen der Gruppe sicher dafür stimmen werden. Die restlichen $n = m - a$ sind völlig unschlüssig und werden ihre Entscheidung daher mit Hilfe einer fairen Münze treffen.

    (a) Wie groß muß a (annähernd) mindestens sein, damit die Abstimmung mit mindestens $(1 - \alpha) \cdot 100$%-iger Sicherheit zugunsten der Befürworter ausgeht? Beantworten Sie die Frage allgemein und speziell für $m = 500, \alpha = 0.01$.

    (b) Können Sie eine 'griffige' asymptotische Formel für diese Schranke angeben ?

88. Der Anteil p der Raucher einer Bevölkerung soll mit 95%-iger (99%-iger) Sicherheit auf 3% (5%) genau geschätzt werden. Wie groß ist die Stichprobe zu wählen ?

    Beantworten Sie die Frage in allen Fällen mittels

    (a) der Tschebyschewschen Ungleichung,

(b) der Normalapproximation der Binomialverteilung

und dies jeweils unter folgenden beiden Umständen:

(i) es sind keinerlei Vorinformationen hinsichtlich p verfügbar,

(ii) aus Vorerhebungen ist bekannt, dass p gewiss kleiner als $1/3$ sein wird.

PROJEKTE

Projekt 1: Kombinatorische Grundprobleme

Wie erkären Sie Ihren Schülern die Formeln für die vier kombinatorischen Grundprobleme?

- Welchen Einstieg würden Sie wählen?
- Nehmen Sie mindestens ein Schulbuch zur Hand und beurteilen Sie dessen Darlegung und die Beispiele!
- Welche methodischen Hilfsmittel verwenden Sie, um das Verständnis zu erleichtern?

Projekt 2: Empirisches Gesetz der Großen Zahlen

Man werfe einen bestimmten Reißnagel auf die beiden unten genauer beschriebenen Arten je 200 mal, notiere der Reihe nach die Resultate der einzelnen Würfe und stelle schließlich die Folge der relativen Häufigkeiten

$$h_n\,(\perp) = \frac{\text{Anzahl der ersten } n \text{ Würfe mit Ausfall } \perp}{n}\ , \quad n \in \{1, ..., 200\}$$

graphisch dar.

Man benütze dabei einen Becher und eine "Paschlwiese" und unterscheide folgende zwei Arten des Werfens:

(a) Der Reißnagel wird im Becher einige Male geschüttelt, wobei die Öffnung mit der Hand verdeckt wird. Anschließend wird der Becher verkehrt auf die Wiese gekippt, sodass der Reißnagel ohne Rollen auf der Wiese zu liegen kommt.

(b) Der Reißnagel wird im Becher einige Male geschüttelt, wobei die Öffnung mit der Hand verdeckt wird. Anschließend wird der Reißnagel bei schräg gehaltenem Becher so auf die Wiese gerollt, dass er deren Wand nicht berührt.

Man berücksichtige ferner, dass

(i) stets dieselbe Person wirft und eine andere protokolliert,
(ii) die Auswertung der Ergebnisse und deren graphische Darstellung erst nach Beendigung beider Experimente erfolgt.

Projekt 3: Entscheidung zugunsten einer von zwei Hypothesen

Über die Verteilung der Anzahl der Köpfe beim Wurf mit zwei unverfälschten Münzen gab es in der 7. Klasse einer Mittelschule zwei verschiedene Ansichten. Eine Gruppe von Schülern behauptete, die Verteilung sei

$$P = (1/4, 1/2, 1/4)\ , \quad \text{eine andere, die Verteilung sei} \quad Q = (1/3, 1/3, 1/3)\ .$$

Endlich entschloss man sich, eine große Anzahl n von Versuchen durchzuführen, den Vektor $\hat{P}_n = (\widehat{p}_0, \widehat{p}_1, \widehat{p}_2)$ der zugehörigen relativen Häufigkeiten zu ermitteln und die Entscheidung zugunsten jener der beiden Verteilungen zu treffen, die dem Vektor $\hat{P}_n$ im Sinn des Euklidischen Abstandes im $\mathbb{R}^3$ näher liegt.

(i) Stellen Sie dieses Entscheidungskriterium analytisch möglichst einfach dar.

(ii) Führen Sie $n = 200$ Versuche durch und stellen Sie die sogenannte empirische Verteilung $\hat{P}_{200}$, die Verteilungen P und Q und das Entscheidungskriterium in baryzentrischen Koordinaten dar.

(iii) Realisieren Sie die graphische Darstellung schließlich mit Hilfe von Mathematica.

Projekt 4: Zwei Varianten, das Wort "zufällig" zu interpretieren

Angenommen, man soll ein Paket von n Spielkarten "zufällig" auf m Stapeln verteilen. Dann ist es selbstverständlich, dass man den Versuchsablauf genau beschreiben muss. Im Folgenden werden dafür zwei Varianten angegeben, wobei die für die m Stapel vorgesehenen Plätze stets als von 1 bis m durchnummeriert angenommen werden.

Variante A: Man legt m Zettel, die von 1 bis m durchnummeriert sind, sich aber sonst voneinander nicht unterscheiden, in einen Hut. Aus diesem zieht man hintereinander und mit Zurücklegen n mal eine Zettel heraus, wobei man darauf achtet da die Zettel stets gut durchgemischt werden. Zieht man den Zettel mit der Nummer i, so legt man die nächste Karte auf den Stapel i.

Variante B: Man legt die n Spielkarten auf den Tisch und weitere $m - 1$ weiße Karten, die sich aber sonst von den Spielkarten nicht unterscheiden, oben drauf. Anschließend mischt man gründlich. Die Karten vor der ersten weißen Karte bilden den Stapel 1, die vor der zweiten den Stapel 2, usw. (Leere Stapel treten auf, wenn entweder die erste oder letzte Karte des Pakets eine weiße Karte ist, oder wenn weiße Karten aufeinanderfolgen.)

Man bestimme für beide Varianten (a) die Grundmenge Ω, (b) die Anzahl $|\Omega|$ ihrer Elemente und (c) die W-keit des Ereignisses, dass der i-te Stapel aus genau k Karten besteht, $k \in \{0, ..., n\}$.

Orientieren Sie sich bei diesen Aufgaben an der realen Durchführung von Experimenten für geeignet gewählte Spezialfälle für m und n (Stichwort: Modellbildung).

Literaturhinweis: Dürager, H.P.: Stetige Modelle in der Stochastik - Theoretische Grundlagen für Theorie und Praxis. Diplomarbeit, Salzburg 2007, Abschnitt 1.2.1, Thema: "Bertrandsches Paradoxon"

Projekt 5: Augensummen von zwei Tetraedern

Zwei symmetrische Tetraeder werden geworfen.

(a) Bestimmen Sie die Wahrscheinlichkeitsverteilung der Augensummen der beiden Tetraeder, wenn deren Seiten jeweils mit den Ziffern $1, 2, 3, 4$ beschriftet sind.

(b) Finden Sie - analog zu Beispiel 14 - eine weitere Beschriftung der beiden Tetraeder, welche die gleiche Wahscheinlichkeitsverteilung der Augensummen wie in (a) liefert.

(c) Zeigen Sie, dass es außer den in (a) und (b) auftretenden Beschriftungen keine weiteren gibt, die die genannte Eigenschaft besitzen.

Projekt 6: Geburtstagspaar versus Geburtstagskumpel - eine gute Erklärung des Geburtstagsparadoxons

(a) Das Geburtstagsproblem lautet bekanntlich wie folgt:

Ab welchem m würden Sie eine Wette eingehen, dass unter m zufällig ausgewählten Personen mindestens zwei denselben Geburtstag habe? (Gemeint sind nur Monat und Tag, nicht dasselbe Geburtsjahr.)

Wieviele Personen müssen vorhanden sein, damit die Wahrscheinlichkeit für zwei gleiche Geburtstage mindestens $1/2$ ist?

(b) Auffinden eines "Geburtstagskumpels":

Es werden n Personen zufällig ausgewählt und nach ihrem Geburtstag gefragt. Wie groß muss n sein, damit die W-keit dafür, dass mindestens eine unter den n Personen am gleichen Tag Geburtstag hat wie Sie, mindestens $1/2$ ist?

Das Ergebnis der Aufgabe (a) ist überraschend klein, was als Geburtstagsparadoxon bezeichnet wird. Nützen Sie die Lösung von Aufgabe (b), um dieses Paradoxon gut erklären zu können.

Literaturhinweis: Mosteller, F.: Fifty Challenging Problems in Probability with Solutions. Addison-Wesley Publ. Co., Reading, Massachusetts etc. 1965. Siehe: "Birthday Pairings" and "Finding your Birthmate"

Projekt 7: Two-up

"Two-up" ist das australische Glücksspiel schlechthin und wird neuerdings auch in Casinos angeboten. Spielutensilien sind zwei unverfälschte Münzen und ein kleines Brett ("kip" oder "bat" genannt). Das Spiel, an dem mindestens zwei, in der Regel aber mehrere Spieler teilnehmen, wird vom sogenannten "boxer" (Croupier) überwacht. Nachdem der "spinner" im Rotationsverfahren bestimmt ist, erlegt jeder Teilnehmer seinen Einsatz e auf eine der beiden Ausfälle H "heads" (zweimal Kopf) oder T "tails" (zweimal Adler).
Dann wird der "spinner" vom "boxer" aufgefordert, in einen kreisförmigen Platz zu treten ("pit" genannt). Der "spinner" plaziert die beiden Münzen (eine heads up und eine tails up) an einem Ende des Brettchens und wirft sie durch eine rasche Bewegung des Handgelenks.
Tritt das Ereignis O (einmal Kopf und einmal Adler, "odds" oder "no throw" genannt) ein, wird der Wurf wiederholt.

Wir betrachten im Weiteren einen vom "spinner" verschiedenen Spieler, welcher auf das Ereignis H gesetzt hat. Ein solcher gewinnt seinen Einsatz, sofern H eintritt und nicht vorher fünfmal nacheineinander O geworfen wird. Sofern T eintritt oder fünfmal nacheinander O geworfen wird, verliert er seinen Einsatz.

Berechnen Sie

(a) die Gewinnwahrscheinlichkeit p und die Gewinnerwartung E des Spielers,

(b) die Verteilung der Anzahl T der Würfe, die nötig sind, bis ein Spiel beendet ist.

Projekt 8: Erwartungswert und Varianz

Wie erkären Sie Ihren Schülern den Begriff (a) des Erwartungswerts und (b) der Varianz ?

- Welche Einstiege würden Sie wählen?
- Nehmen Sie mindestens ein Schulbuch zur Hand und beurteilen Sie dessen Darlegung und die Beispiele!
- Welche methodischen Hilfsmittel verwenden Sie, um das Verständnis zu erleichtern?

Projekt 9: Das Ziegenproblem

Seien $N \in \mathbb{N}\backslash\{1,2\}$ und $P = (p_i : i \in \{1, ..., N\})$ eine beliebige Wahrscheinlichkeitsverteilung und sei

$$\kappa(P) = \sum_{i=1}^{N} p_i^2$$

der sogenannte κ-Wert von P. (a) Zeigen Sie, dass gilt $\frac{1}{N} \leq \kappa(P) \leq 1$, wobei $\kappa(P) = \frac{1}{N}$ genau dann gilt, wenn P die Gleichverteilung auf $\{1, ..., N\}$ ist und $\kappa(P) = 1$ genau dann, wenn P eine in einem Punkt $i_0 \in \{1, ..., N\}$ konzentrierte Verteilung ist.

(b) Betrachten Sie folgende Modifikation (bzw. Verallgemeinerung) der in Aufgabe 57 formulierten N-Türen-Problems:

Für die Wahrscheinlichkeitsverteilung P_Z, hinter welcher Tür sich der Preis befindet, wählen Sie anstelle der Gleichverteilung $(\frac{1}{N}, ..., \frac{1}{N})$ eine allgemeine Verteilung P, in Zeichen $P_Z = P$.

Die Verteilung P_X der Tür, auf die Person A zeigt, sei - wie in der ursprünglichen Aufgabenstellung - $P_X = P$.

(Die bedingte Verteilung von Z gegeben $X = i$ und $Y = j$ sei ebenfalls wie in der ursprünglichen Aufgabenstellung.)

(i) Berechnen Sie $P_I(E_N)$ und $P_{II}(E_N)$ und

(ii) geben Sie eine Bedingung hinsichtlich der Wahrscheinlichkeitsverteilung P an, unter welcher gilt $P_{II}(E_N) \geq P_I(E_N)$.

(iii) Geben sie für $N = 3$ und $P = (p, q, 1 - (p + q))$, $(p, q) \in [0, 1]^2$ den geometrischen Ort aller Punkte an, für welche $P_{II}(E_N) \geq P_I(E_N)$ gilt.

Literaturhinweis: Gero von Randow: Das Ziegenproblem - Denken in Wahrscheinlichkeiten. Rowohlt, Reinbek 2004

Projekt 10: Gugelhupf mit Rosinen

Einem Teig für einen Guglhupf werden n Rosinen beigegeben. Der Guglhupf wird in 16 gleiche Teile geteilt. Wieviele Rosinen muss man als Zutat nehmen, damit die Wahrscheinlichkeit, dass in einem bestimmten Stück des Guglhupfs mindestens eine Rosine ist, größer als 99% wird?

Bestimmen Sie die gesuchte Anzahl

(a) mit Hilfe der Binomialverteilung und
(b) mit Hilfe der Poissonverteilung.

ANHANG

Die klassischen kombinatorischen Hilfsmittel der Wahrscheinlichkeitsrechnung wurden in einem der ersten Lehrbücher der Geschichte über Stochastik, nämlich in der 1713 posthum veröffentlichten

"Ars Conjectandi" von **Jakob Bernoulli**

zusammengefaßt. Ihre moderne Darstellung erfolgt mit Hilfe des Funktionsbegriffs (vgl. z.B. *J. Linhart*: Diskrete Mathematik, Abschnitte 7.2.1-7.2.4). Die herkömmlichen Bezeichnungen sind in Klammern angegeben.

Die Anzahl spezifischer Funktionen $f : \{1, ..., k\} \to \{1, ..., n\}$.

- Für die **Menge aller Funktionen (Variationen mit Wiederholung)** gilt

$$\begin{aligned} |\,\{\, f : \{1, ..., k\} \to \{1, ..., n\}\ \}| &= |\{(x_1, ..., x_k) : x_i \in \{1, ..., n\}\,, 1 \leq i \leq k\,\}| \\ &= \left|\{1, ..., n\}^k\right| \\ &= n^k\,. \end{aligned}$$

- Für die **Menge der injektiven Funktionen (Variationen ohne Wiederholung)** gilt

$$\begin{aligned} |\{\, f \text{ injektiv}\}| &= \left|\{(x_1, ..., x_k) \in \{1, ..., n\}^k : x_i \neq x_j \text{ für } i \neq j\,\}\right| \\ &= n \times (n-1) \times\ ...\ \times (n-k+1)\,. \end{aligned}$$

Für den **Spezialfall** $k = n$ **der bijektiven Funktionen (Permutationen)** gilt

$$|\{\, f \text{ bijektiv}\}| = n! := 1\ \times 2\ \times ... \times (n-1) \times n \quad ^{1)}.$$

- Für die **Menge der streng monoton wachsenden Funktionen (Kombinationen ohne Wiederholung)** gilt

$$\begin{aligned} |\{\, f \text{ streng monoton wachsend}\}| &= \left|\{(x_1, ..., x_k) \in \{1, ..., n\}^k :\ x_1 < x_2 <\ ...\ < x_k\,\}\right| \\ &= \frac{n(n-1)\ldots(n-k+1)}{k!} \\ &= \binom{n}{k} = \begin{cases} \frac{n!}{k!\,(n-k)!} & f\ddot{u}r \quad k \in \{1, ..., n\} \\ 0 & f\ddot{u}r \quad k > n\,. \end{cases} \end{aligned}$$

- Für die **Menge der monoton wachsenden Funktionen (Kombinationen mit Wiederholung)** gilt

$$\begin{aligned}
|\{\ f \text{ monoton wachsend}\}| &= \left|\{(x_1,...,x_k) \in \{1,...,n\}^k :\ x_1 \leq x_2 \leq\ ... \leq\ x_k\ \}\right| \\
&= \left|\{(x_1,...,x_k) \in \{1,...,n\}^k :\ x_1 < x_2 + 1 <\ ... <\ x_k + k - 1\ \}\right| =^{2)} \\
&= \left|\{(y_1,...,y_k) \in \{1,...,n+k-1\}^k : y_1 < y_2 <\ ... <\ y_k\ \ \}\right| \\
&= \binom{n+k-1}{k}.
\end{aligned}$$

[1] $0! := 1$

[2] $y_i = x_i + i - 1,\ \ i \in \{1,...,k\}$

Optimaler Warenvorrat

Von einer bestimmten Ware, deren Verkauf saisonbedingt ist, wird eine gewisse Stückzahl auf Lager gelegt. Jedes verkaufte Stück bringt den Gewinn g ein, jedes bis zum Ende der Saison nicht verkaufte Stück den Verlust v mit $g, v > 0$. Die Nachfrage ist zufallsabhängig.

Angenommen, man hat eine gute Schätzung für die Wahrscheinlichkeiten p_i, dass genau i Stücke dieser Ware verlangt werden ($i \in N_0$). Wieviele Stücke sind auf Lager zu legen, damit der zu erwartende Gewinn maximiert wird?

Es gelten folgende Bezeichnungen:

n	...	Anzahl der auf Lager gelegten Stücke,
N	...	Anzahl der verlangten Stücke (Nachfrage),
X_n	...	Gewinn.

Verifizieren Sie, dass (a) der Gewinn $X_n = g_n(N)$ bei gegebenem $n \in \mathbb{N}$ in folgender Weise von N abhängt

$$g_n(N) = \begin{cases} N\,g - (n-N)v, & \text{falls} \quad N < n, \\ n\,g, & \text{falls} \quad N \geq n, \end{cases}$$

und dass (b) für den Erwartungswert $E_n := E(g_n(N))$ gilt

$$E_n = ng - (g+v)\sum_{i=0}^{n-1}(n-i)p_i \,.$$

(Es ist zweckmäßig und natürlich, $g_0 = 0$ und somit $E_0 = 0$ zu setzen.)

Im Folgenden ist es zielführend, die Differenzen

$$\Delta_n = E_n - E_{n-1}\,,\ n \in \mathbb{N},$$

zu betrachten. Der Einfachheit halber sei vorausgesetzt, dass die Menge $W_N := \{i \in \mathbb{N}_0 : p_i > 0\}$ entweder gleich N_0 ist oder gleich $\{0, ..., m\}$ für ein $m \in N$.

(c) Unter welcher Voraussetzung gilt $0 = E_0 \geq E_1 > E_2 > \ldots$?

(d) Zeigen Sie, dass andernfalls

$$0 = E_0 < E_1 < \ldots < E_{n^*-1} \leq E_{n^*} > E_{n^*+1} > \ldots .$$

gilt und geben Sie den Wert n^* an. Wann steht das Gleichheitszeichen ?