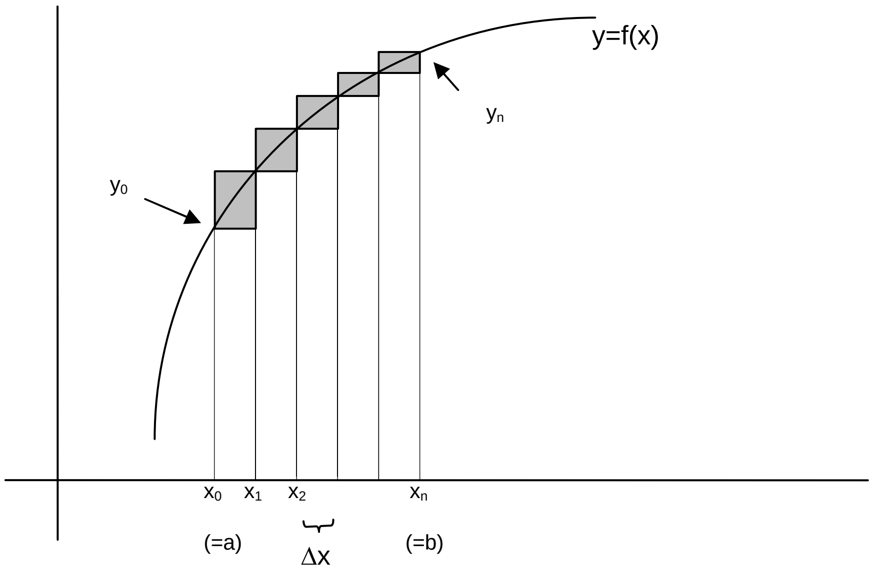
III. Integralrechnung :

Bestimmtes (Riemannsches) Integral / Integral als Grenzwert einer Summe :

Bedeutung: Fläche unter einer Funktion innerhalb bestimmter Grenzen



Berechnung der Fläche A unter der Funktion f(x) zwischen den Grenzen a und b.
Die Fläche kann durch eine Summe von Rechtecken approximiert werden. Dazu wird das Intervall [a,b] in n gleiche Subintervalle unterteilt:

$x_0=a,\ x_1,x_2,.........x_n=b$

Der Abstand zwischen zwei x-Werten ist:

$$x_i - x_{i-1} = \frac{b-a}{n} = \Delta x \qquad (i = 1,2,......,n)$$

Die dazugehörigen Funktionswerte sind:

$y_0,\ y_1,y_2,..........,y_n$

Die Fläche A kann approximiert werden durch eine Summe von Rechtecken oberhalb der Kurve f(x) und eine Summe von Rechtecken unterhalb der Kurve f(x).

Oberhalb f(x): $A_u = y_1\Delta x + y_2\Delta x + ... + y_n\Delta x$

Unterhalb f(x): $A_o = y_0\Delta x + y_1\Delta x + ... + y_{n-1}\Delta x$

$$A_u \le A \le A_o$$

Der Fehler der Anpassung ist:

$$A_o - A_u = y_o \cdot \Delta x - y_n \cdot \Delta x = (f(a)-f(b)) \cdot \Delta x$$

Der Fehler entspricht der Gesamtfläche der ausgefüllten Rechtecke in obiger Abbildung. Wird die Unterteilung nun sukzessive verfeinert, dann wird diese Fläche ebenfalls sukzessive kleiner.

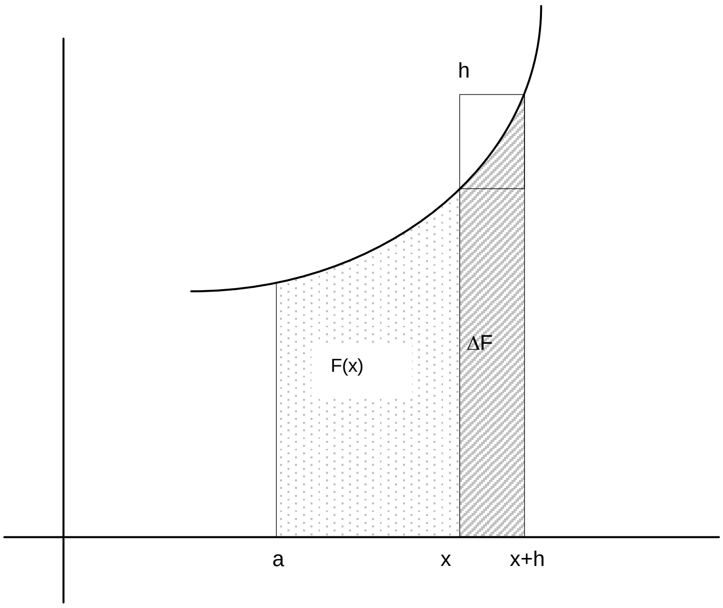
Für $n \to \propto$ geht $\Delta x \to 0$, daher konvergieren die Flächen A_u und A_o gegen A.

$$\lim_{n\to\infty} A_u = \lim_{n\to\infty} A_o = A$$

Die Schreibweise für diesen Grenzwert ist das Integralzeichen in der Form:

$$A = \int_a^b f(x)dx = \lim_{\Delta x\to 0} \sum_{i=1}^{n} f(x_i)\Delta x$$

Wie hängen Differentiation und Integration zusammen ?



Die obere Grenze b wird durch die Variable x ersetzt. Die Abszisse nimmt beliebige Werte im Definitionsbereich von y=f(x) an.
Sei A_a^x die Fläche unterhalb der Kurve f(x) im Intervall [a,x]. Für x = a ist das Intervall auf einen Punkt reduziert und die dazugehörige Fläche $A_a^x = A_a^a = 0$. Ist x ungleich a, dann ist auch die Fläche ungleich 0. Die Fläche A_a^x hängt von x ab, sie wird deshalb als Flächenfunktion von x bezeichnet.

$$A_a^x = F(x)$$

Differenziere F(x) nach x:

sei $A_a^{x+\Delta x} = F(x+\Delta x)$

$\Delta F = F(x+\Delta x) - F(x)$

ΔF kann durch eine Rechteckfläche angenähert werden (schraffiert in Abbildung). Betrachten wir dazu zwei Rechteckflächen, eine mit den Seite Δx und f(x), die andere mit den Seiten Δx und $f(x+\Delta x)$. Nachdem f(x) monoton steigend ist, gilt:

$$\Delta x\, f(x) < \Delta F < \Delta x\, f(x+\Delta x),$$

Die Änderungsrate $\Delta F/\Delta x$ ist daher

$$f(x) < \Delta F/\Delta x < f(x+\Delta x),$$

Nachdem f(x) stetig ist, konvergiert $f(x+\Delta x)$ gegen f(x) mit $\Delta x \to 0$. Der Grenzwert des Differenzenquotienten $\Delta F/\Delta x$, die Ableitung dF/dx = F´ existiert daher, und

$$\frac{dF}{dx} = F'(x) = f(x)$$

Die Ableitung der Flächenfunktion F(x) ist die gegebene Funktion f(x), bzw. anders herum: die Flächenfunktion F(x) ist **das bestimmte Integral** von f(x). Durch die Festlegung der Grenzen wird die Flächenfunktion vom unbestimmten Integral zum bestimmten Integral.

Bemerkung:
Von einer Funktion g(x) gibt es unendlich viele Stammfunktionen G(x)+c,

$$\int g(x)dx = G(x)+c\,,$$

mit G(x) dem unbestimmten Integral (antiderivative) und der „Integrationskonstanten c“, weil $c \in R$ beliebige Werte annehmen kann. Erst durch die Randbedingungen wird c fixiert und die Lösung auf eine, oder wenige Stammfunktionen eingeschränkt.

Wie wird die Konstante c bestimmt?

Sei I(x) ein beliebiges unbestimmtes Integral von f(x), so unterscheidet sich F(x) von I(x) nur durch eine bestimmte Konstante c:

$$F(x) = I(x) + c$$

Für den bestimmten Wert x = a erhalten wir:

$$F(a) = I(a) + c = 0, \text{ und } c = -I(a), \text{ daher ist}$$
$$F(x) = I(x) - I(a).$$

Im Intervall [a,b] wird durch Ersetzen der oberen Grenze x durch b:

$$F(b) = A_a^b = I(b)-I(a).$$

Schreibweise: $F(b) = \int_a^b f(x)dx = I(b)-I(a)\,,$

a = untere Grenze; b = obere Grenze
f(x) Integrand
x Integrationsvariable
a, b Integrationsgrenzen

$$\int_a^b f(x)dx = F(x)\Big|_a^b = F_{(b)} - F_{(a)}$$

F (x) …Integral
Die Differentiation der Stammfunktion F(x) ergibt f(x).
Differentiation und Integration sind inverse Operationen.

Hauptsatz der Integralrechnung:

$$\boxed{\begin{gathered}\frac{d}{dx}\int_a^x f(t)dt = f(x),\ \ oder \\ \int_a^x F'(t)dt = F(x)\end{gathered}}$$

Bemerkung: Mitunter findet man auch folgende Schreibweise:

$$\int_a^x f(x)dx = F(x) - F(a)$$

x übernimmt hier eine Doppelrolle als 1) Integrationsvariable und als 2) obere Grenze. Diese Schreibweise ist verwirrend und sollte daher unterbleiben, für die obere Grenze und Integrationsvariable sollten verschiedene Buchstaben verwendet werden, wie etwa:

$$\int_a^x f(t)dt = F(t)\Big|_a^x = F(x) - F(a)$$

Unbestimmtes Integral:

$$\int f(x)dx = F(x) + C$$

hat keine Integrationsgrenzen

C Integrationskonstante; kann jeden beliebigen Wert (auch 0) annehmen. Kann für ein spezifisches Problem berechnet werden (siehe Anfangs- bzw. Randbedingungen bei Differentialgleichungen)

Rechenregeln:

$$\int_a^b f(x)dx = -\int_b^a f(x)dx$$

$$\int_a^c f(x)dx = \int_a^b f(x)dx + \int_b^c f(x)dx$$

$$\int_a^b f(x)dx + g(x)dx = \int_a^b f(x)dx + \int_a^b g(x)dx$$

$$\int dx = x \ +\mathrm{c}$$

(c kommt überall vor, wird aber bei den nachstehenden Regeln weggelassen)

$$\int kf(x)dx = k\int f(x)dx$$

$$\int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + C$$

$$\int \frac{dx}{x} = \ell nx + C$$

$$\int a^x d_x = \frac{a^x}{\ell na} + C$$

$$\int e^x d_x = \frac{e^x}{\underbrace{\ell ne}_{1}} = e^x + C$$

$$\int \cos x dx = \sin x + C$$

$$\int \sin x dx = -\cos x + C$$

$$\int \tan x \, dx = -\ell n \cos x + C$$

$$\int \cot x \, dx = \ell n \sin x + C$$

<u>Achtung:</u> nicht jedes Integral kann auf eindeutige Weise gelöst werden.

<u>Integrationsmethoden</u>

(a) Integration durch Substitution

z.B. $\int \sin(ax+b)dx$

Setzen: t = ax + b = $\frac{dt}{dx} = a$

$$\frac{dx}{dt} = \frac{1}{a} \rightarrow dx = \frac{dt}{a}$$

$$\int \sin t \,\frac{1}{a}\, dt = \frac{1}{a}\int \sin t \; dt = -\frac{1}{a}\cos t \quad + c$$

(b) Partielle Integration

$$\int f'(x)\; g(x)\; dx = f(x)\; g(x) - \int f(x)\; g'(x)\; dx$$ (Differentiation eines Produktes)

z.B. $\int x \cos x \; dx$

setzen: f(x) = x, g´(x) = cos x
f'(x) =1, g(x) = sin x

$$\int x \cos x dx = x \sin x - \int 1 \sin x \; dx$$

$$= x \sin x + \cos x (+c)$$

Es gibt noch eine Reihe weiterer Integrationsmethoden und Tabellen (wenn keine „geschlossene" Lösung möglich: numerische Integration und Näherungsmethoden)

Wenn innere Ableitung bei Integration $\rightarrow$ Division!
(Differentiation : Multiplikation)

z.B. $$\int e^{kx} dx = \frac{e^{kx}}{k} (+c)$$

Beispiele: $$\int_0^3 4x^2 dx = 4\int_0^3 x^2 dx = 4\frac{x^3}{3}\Big|_0^3 \quad = \frac{4}{3}(27-0) = 36$$

$$\int_{-\frac{\pi}{2}}^{+\frac{\pi}{2}} \cos x dx = \sin x \Big|_{-\frac{\pi}{2}}^{+\frac{\pi}{2}} = \underbrace{\sin(\tfrac{\pi}{2})}_{1} - \underbrace{\sin(-\tfrac{\pi}{2}}_{(-1} = 1-(-1) = \underline{2}$$

Uneigentliche Integrale

Sind Integrale, bei denen eine oder beide Integrationsgrenzen keine festen Zahlen sind, sondern plus oder minus unendlich sind.

Falls der Grenzwert $\lim\limits_{b\to\infty}\int\limits_a^b f(x)dx$ existiert, so ist

$$\int\limits_a^\infty f(x)dx = \lim_{b\to\infty}\int\limits_a^b f(x)dx$$

Analog:

$$\int\limits_{-\infty}^b f(x)dx = \lim_{a\to-\infty}\int\limits_a^b f(x)dx$$

$$\int\limits_{-\infty}^\infty f(x)dx = \lim_{a\to-\infty}\int\limits_a^c f(x)dx + \lim_{b\to\infty}\int\limits_c^b f(x)dx$$

Für ein beliebiges c $\in$ R, vorausgesetzt, die hier vorkommenden Grenzwerte existieren.
Wenn die Funktion f(x) an einer der Integrationsgrenzen a oder b nicht definiert ist, dann kann die Funktion wie folgt erweitert werden.
Für x = a ist F(x) nicht definiert:

$$\int\limits_a^b f(x)dx = \lim_{\delta\to0}\int\limits_{a+\delta}^b f(x)dx$$

vorausgesetzt, dass der Grenzwert auf der rechten Seite der Gleichung existiert. Analog für den Fall, daß F(x) für den Wert x = b nicht definiert ist, das Integral

$$\int\limits_a^b f(x)dx = \lim_{\delta\to0}\int\limits_a^{b-\delta} f(x)dx,$$

wenn der Grenzwert auf der rechten Seite der Gleichung existiert.

Bsp:

$$\int\limits_0^1 \ln(x)dx = \lim_{\delta\to0}\int\limits_\delta^1 \ln(x)dx$$

$$= \lim_{\delta\to0}\left((x\cdot\ln x - x)\Big|_\delta^1 \right)$$

$$0 = \lim_{\delta\to0}\left(-1-\delta\cdot\ln(\delta)+\delta\right) = -1$$

Zu zeigen ist noch, dass δ.ln(δ) = 0 ist, in geeigneter Weise unter Verwendung der Regeln von de l'Hospital:

$$\lim_{\delta\to0}\cdot\,\delta\cdot\ln(\delta) = 0$$

Nach Umformung:

$$\lim_{\delta \to 0} \cdot \delta \cdot \ln(\delta) = \lim_{\delta \to 0} \frac{\ln(\delta)}{\frac{1}{\delta}}$$

$$\lim_{\delta \to 0} \frac{f(\delta)}{g(\delta)} = \lim_{\delta \to 0} \frac{f'(\delta)}{g'(\delta)} = \frac{\frac{1}{\delta}}{-\frac{1}{\delta^2}} = -\delta = 0$$