

Näherungsweise Darstellung von Funktionen (Taylor- und Fourier-Reihe)

a) Lineare Approximation

Bildung des Differentialquotienten und näherungsweise Berechnung von $f(x)$:

$$f(x) \cong f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0), \text{ denn } \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = f'(x_0)$$

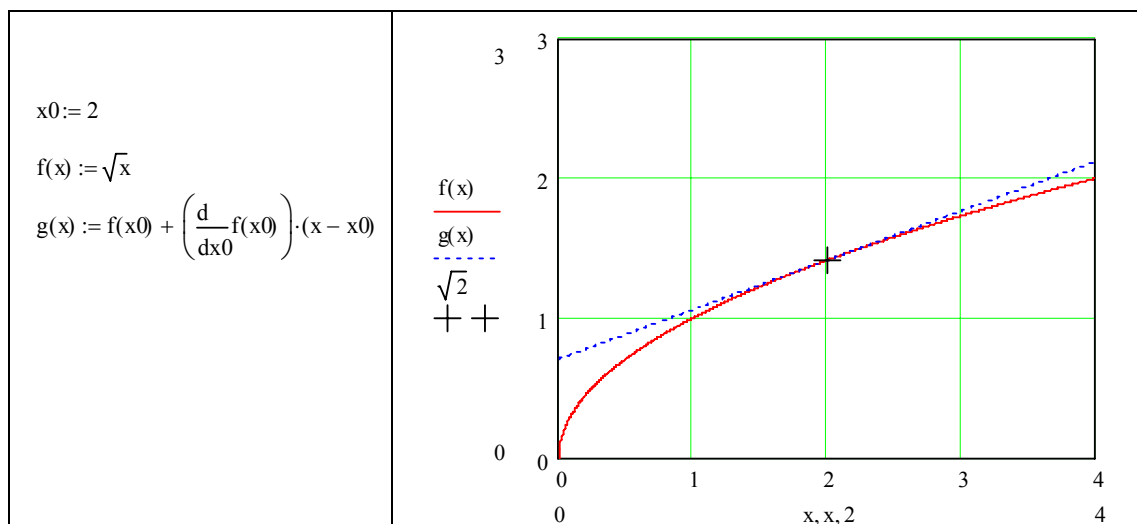
Bsp. 1: Wurzelfunktion

$$f(x) = \sqrt{x}; \quad x_0 = 1$$

$$f' = \frac{1}{2\sqrt{x}}; \quad f'(x_0) = \frac{1}{2}$$

$$\sqrt{x} \cong 1 + \frac{1}{2}(x - 1)$$

$$\text{z.B. } \sqrt{1,04} \cong 1,02$$



Verallgemeinerung: Substitution für $(x - x_0) = h$, setze x anstelle von x_0 , h ist klein, h auch < 0

$$f(x + h) \cong f(x) + f'(x) \cdot h$$

Bsp.2: Lichtintensität $I(r)$; r = Radius der Pupille des Auges. Änderung der Lichtintensität bei Zunahme des Radius um 5%

$$I(r) = c \cdot r^2$$

$$I'(r) = 2cr$$

$$I(r + h) \cong I(r) + 2cr \cdot h$$

$$h = 0,05r; \text{ Zunahme um 5\%}$$

$$I(r + h) \cong I(r) + 0,1r^2c$$

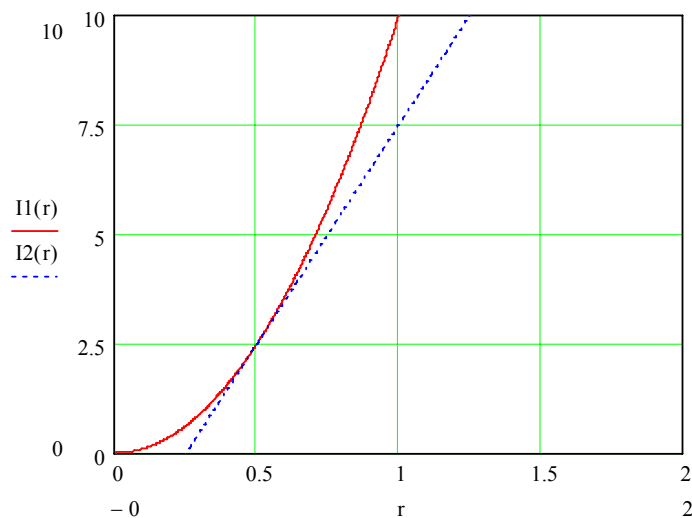
$$I(1,05r) - I(r) \cong 0,1r^2c$$

Darstellung der linearen Approximation in der Nähe des Punktes $x_0 = 0.5$

$$K := 10 \quad p := 0.5$$

$$I1(r) := K \cdot r^2$$

$$I2(r) := I1(p) + 2K \cdot p \cdot (r - p)$$



Bei einer Zunahme von von 5% wächst $I(r)$ näherungsweise um 10%.

b) Quadratische Approximation.

$f(x)$ sei eine (mindestens) 2-mal differenzierbare Funktion. Gesucht wird ein Polynom 2. Grades, das die Bedingungen

$$g(x_0) = f(x_0)$$

$$g'(x_0) = f'(x_0) \text{ erfüllt sind.}$$

$$g''(x_0) = f''(x_0)$$

Zunächst wird in einem unbestimmten Ansatz $g(x)$ aufgestellt und anschließend werden die Koeffizienten a_i ermittelt:

$$g(x) = a_0 + a_1(x - x_0) + a_2(x - x_0)^2$$

$$g'(x) = a_1 + 2a_2(x - x_0)$$

$$g''(x) = 2a_2$$

$$g(x_0) = a_0 = f(x_0)$$

$$g'(x_0) = a_1 = f'(x_0)$$

$$g''(x_0) = 2a_2 = f''(x_0); a_2 = \frac{1}{2} f''(x_0)$$

Verallgemeinerung: $h = (x - x_0)$

$$f(x_0 + h) \cong f(x_0) + f'(x_0) \cdot h + \frac{1}{2} f''(x_0) h^2$$

Anm: $f(x)$ ist die anzunähernde Funktion, $g(x)$ ist die Näherung, für die gilt:

$$g(x_0 + h) \cong f(x_0 + h)$$

$$g(x_0 + h) = f(x_0) + f'(x_0) \cdot h + \frac{1}{2} f''(x_0) h^2$$

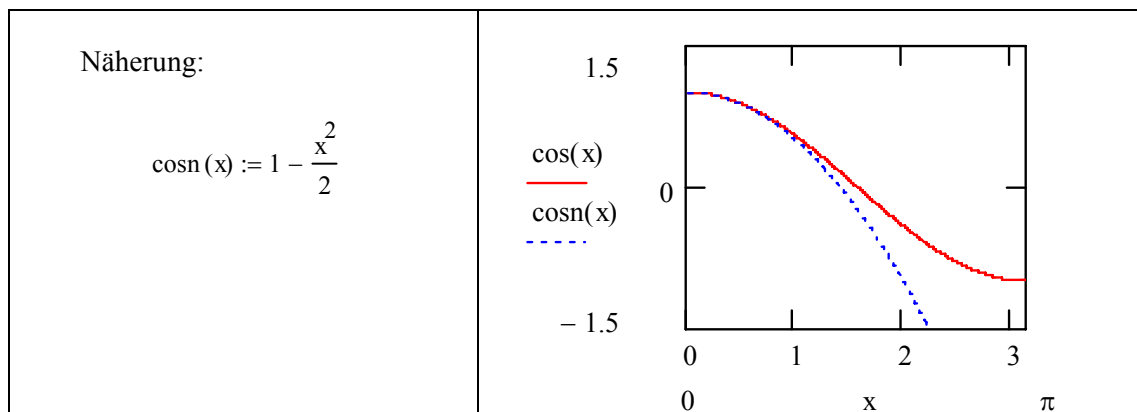
Bsp.1: Cosinus Funktion in der Nähe von $x_0 = 0$

Cosinusfunktion $f(x) = \cos(x)$

$f(x) = \cos(x)$	$f(0) = +1$
$f'(x) = -\sin(x)$	$f'(0) = 0$
$f''(x) = -\cos(x)$	$f''(0) = -1$
$f'''(x) = \sin(x)$	$f'''(0) = 0$
$f^{IV}(x) = \cos(x)$	$f^{IV}(0) = +1$

$$\cos(0+h) = \cos(h) \cong 1 - \frac{h^2}{2}$$

$$\cos(h) \cong 1 - \frac{h^2}{2} \quad \text{für kleine } h, \text{ und nur für } h \text{ im Bogenmaß !!}$$



Bsp.2: Punktförmige Lichtquelle

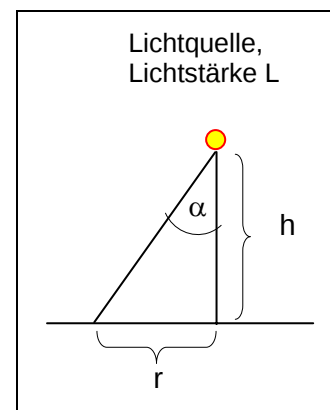
Gesucht ist die Helligkeit des Punktes im Abstand r vom Fußpunkt, Lichtstärke L ,
Beleuchtungsstärke B im Abstand r :

$$B(r) = \frac{L}{r^2 + h^2} \cdot \cos \alpha; \quad \tan \alpha = \frac{r}{h}; \quad \cos \alpha = \frac{h}{\sqrt{r^2 + h^2}}$$

$$B(r) = \frac{L \cdot h}{(r^2 + h^2)^{\frac{3}{2}}} = L \cdot h \cdot f(r) \quad \text{mit} \quad f(r) = (r^2 + h^2)^{-\frac{3}{2}}$$

$$f'(r) = -\frac{3}{2} (r^2 + h^2)^{-\frac{5}{2}} \cdot 2r$$

$$f''(r) = \frac{15}{4} (r^2 + h^2)^{-\frac{7}{2}} \cdot 2r \cdot 2r + \left(-\frac{3}{2}\right) \cdot (r^2 + h^2)^{-\frac{5}{2}} \cdot 2$$



$$f(0) = h^{-3}$$

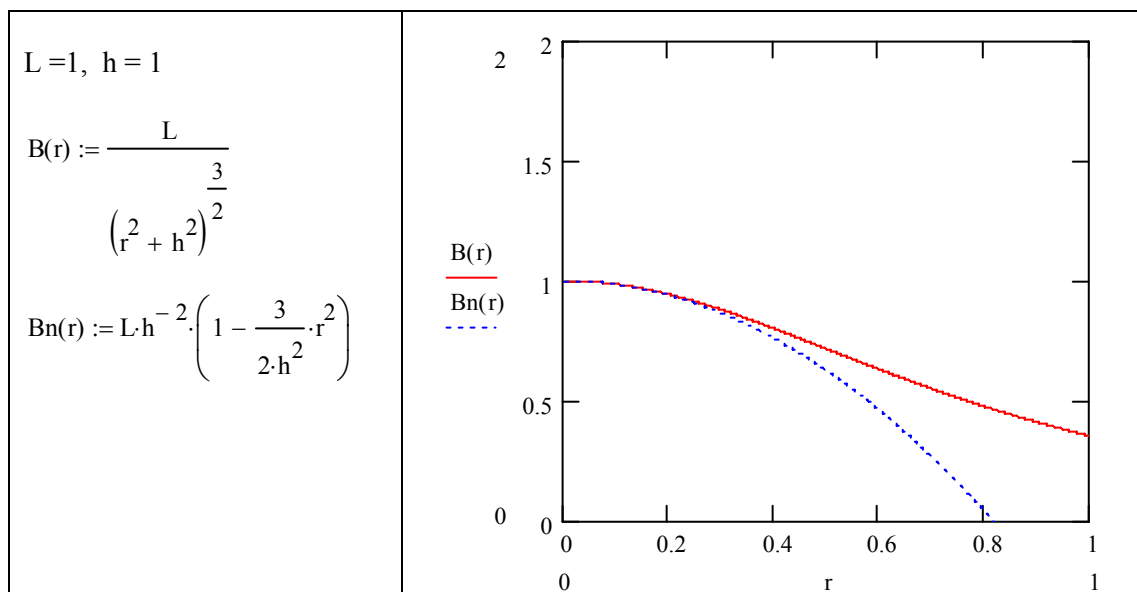
$$f'(0) = 0$$

$$f''(0) = -3h^{-5}$$

$$f(r) \cong h^{-3} - \frac{3}{2}h^{-5}r^2$$

$$B(r) \cong L(h^{-2} - \frac{3}{2}h^{-4}r^2) \text{ mit } B(0) = Lh^{-2}$$

$$B(r) \cong B(0) \left[1 - \frac{3}{2h^2} \cdot r^2 \right]$$



Taylor-Reihen

Wir betrachten ein Polynom $g(x)$ in der Nähe von x_0 , $h = x - x_0$, bzw. $x = x_0 + h$, dann ist $g(x)$, bzw. $g(x_0 + h)$:

$$g(x_0 + h) = a_0 + a_1 h + a_2 h^2 + a_3 h^3 + a_4 h^4 + \dots$$

$$g'(x_0 + h) = a_1 + 2a_2 h + 3a_3 h^2 + 4a_4 h^3 + \dots$$

$$g''(x_0 + h) = 2a_2 + 2 \cdot 3a_3 h + 3 \cdot 4a_4 h^2 + \dots$$

$$g'''(x_0 + h) = 2 \cdot 3a_3 + 2 \cdot 3 \cdot 4a_4 h + 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot a_5 h^2 + \dots$$

An der Stelle $x = x_0$, für $h = 0$, können die Koeffizienten $a_0, a_1, a_2, \dots$ berechnet werden:	$g(x_0) = a_0$ $g'(x_0) = a_1$ $g''(x_0) = 2 \cdot a_2$ $g'''(x_0) = 2 \cdot 3 \cdot a_3$ $g^{IV}(x_0) = 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot a_4$ $g^k(x_0) = k \cdot (k-1) \cdot \dots \cdot 2 \cdot a_k$ $g^k(x_0) = k! a_k$ $a_k = \frac{g^k(x_0)}{k!}$
---	--

Reihenentwicklung für Funktionen:

Wenn gilt $f^{(j)}(x_0) = g^{(j)}(x_0); \quad j = 1, \dots, k; \quad f(x_0) = g(x_0),$

dann kann die Funktion $f(x)$ durch ein Polynom (Taylor-Reihe) angenähert werden:

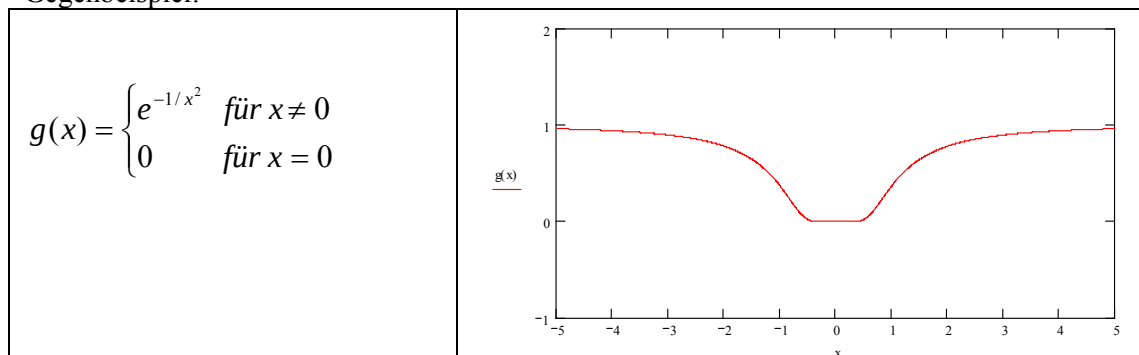
$$f(x_0 + h) = f(x_0) + f'(x_0) \cdot h + \frac{1}{2} f''(x_0) \cdot h^2 + \frac{1}{3!} f'''(x_0) \cdot h^3 + \dots$$

Für $k \rightarrow \infty$ heißt diese Reihe dann die Taylor Reihe von f :

$$f(x_0 + h) = f(x_0) + \sum_{j=1}^{\infty} \frac{1}{j!} f^{(j)}(x_0) h^j$$

Die Darstellung als Reihe ist für kleine h bei vielen Funktionen möglich. Diese Reihenentwicklung ist aber nicht überall richtig:

Gegenbeispiel:



$f(x)$ ist auch in $x = 0$ beliebig oft differenzierbar

$f^{(k)}(0) = 0$ für alle k , also ist die Taylor-Reihe $= 0$ für alle k , aber $f(x) \neq 0$ für $x \neq 0$!!

Der Fehler der Approximation einer Funktion mit der Taylor-Reihe, bzw. mit einem Polynom k -ten Grades kann durch folgende Formel bestimmt werden (Restglied von Lagrange):

$$f(x_0 + h) = f(x_0) + \sum_{j=1}^k \frac{1}{j!} f^{(j)}(x_0) h^j + \frac{1}{(k+1)!} f^{(k+1)}(x_0 + \vartheta h) \cdot h^{k+1} \quad \text{für eine}$$

Zahl $\vartheta \in (0,1)$. Im allgemeinen konvergiert das k -te Restglied $R_k(h) \rightarrow 0$, für $k \rightarrow \infty$.

Bsp 1: Cosinusfunktion, Darstellung mit Taylor-Reihe

$$f(x) = \cos(x); \quad x_0 = 0$$

$$f(0) = 1$$

$$f'(0) = 0$$

$$f''(0) = -1$$

$$f'''(0) = 0$$

$$f^{IV}(0) = 1 \quad (= \cos(x))$$

$$\cos(h) = 1 - \frac{1}{2!}h^2 + \frac{1}{4!}h^4 - \frac{1}{6!}h^6 + \frac{1}{8!}h^8 - \dots$$

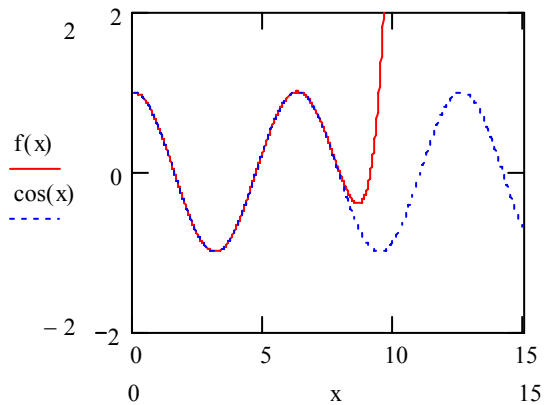
Beachte: $0! = 1$; $0^0 = 1$

$$\cos(x) = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \cdot \frac{1}{(2k)!} \cdot x^{2k}$$

Interessant ist das Divergenzverhalten von $\cos(x)$ wenn x in die Nähe von n kommt.

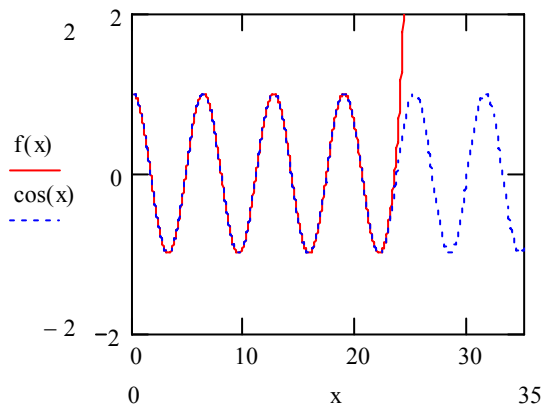
a) Abbruch der Reihenentwicklung mit $n = 10$

$$f(x) := \sum_{k=0}^{10} (-1)^k \frac{1}{(2k)!} x^{2k}$$



b) Abbruch der Reihenentwicklung mit $n = 30$

$$f(x) := \sum_{k=0}^{30} (-1)^k \frac{1}{(2k)!} x^{2k}$$



Bsp 2: e-Funktion, Darstellung mit Taylor-Reihe

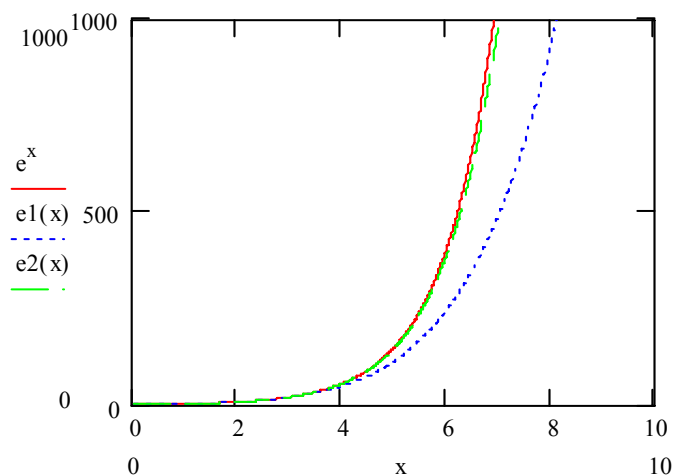
$$e^x = 1 + x + \frac{1}{2!}x^2 + \frac{1}{3!}x^3 + \dots$$

$$e^x = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{x^i}{i!}$$

$n1 := 6$
 $n2 := 10$

$$e1(x) := \sum_{i=0}^{n1} \frac{x^i}{i!}$$

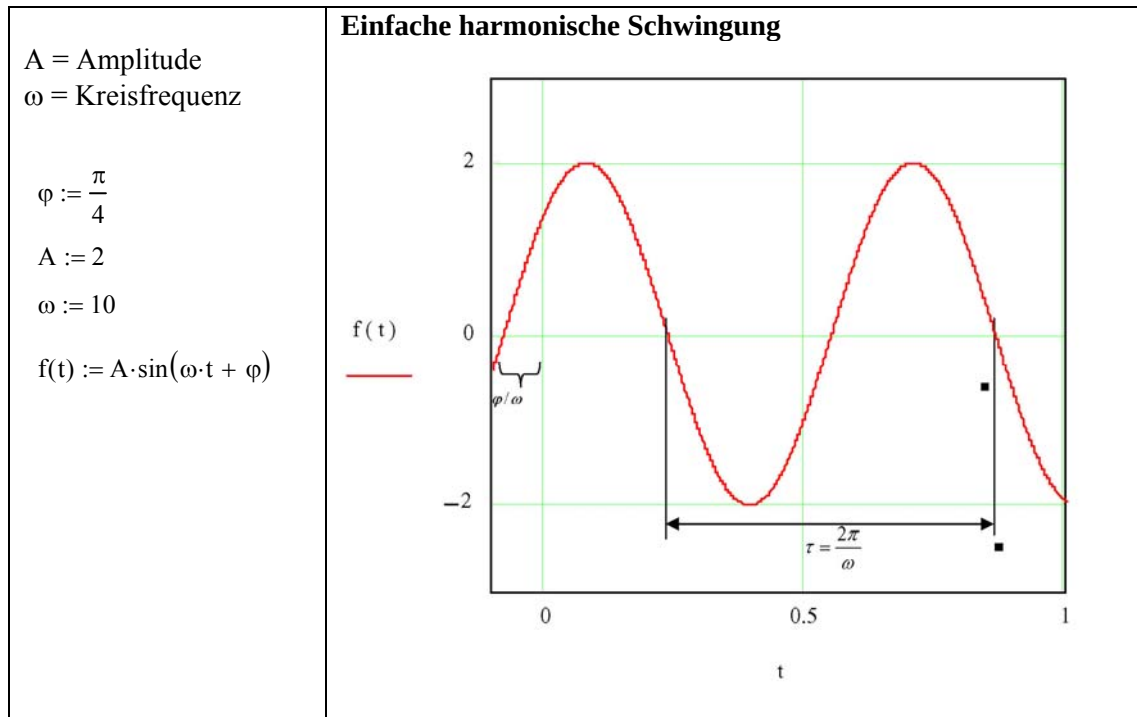
$$e2(x) := \sum_{i=0}^{n2} \frac{x^i}{i!}$$



Approximation von periodischen Funktionen

Harmonische Schwingungen (Wechselspannung, Schwingung einer Saite etc.) können durch ein Sinusgesetz dargestellt werden.

$$f(t) = A \cdot \sin(\omega t + \varphi) \quad \text{oder} \quad f(t) = A_1 \cdot \sin(\omega t) + A_2 \cos(\omega t)$$



In den Naturwissenschaften treten häufig periodische Vorgänge auf, die nicht harmonisch bzw. sinusförmig sind. Unter den nachfolgend angeführten Voraussetzungen können diese periodischen Vorgänge mit der Kreisfrequenz $\omega = 2\pi / \tau$ in eine unendliche Summe (Fourier-Reihe) aus sinus- und kosinusförmigen Einzelschwingungen „entwickelt“ werden:

Def: Unter der Fourier-Reihe versteht man die unendliche Reihe

$$f(x) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos nx + b_n \sin nx$$

Voraussetzungen für die Entwicklung einer periodischen Funktion $f(x)$ in eine Fourier-Reihe (Dirichletsche Bedingungen):

1. Das Periodenintervall lässt sich in endlich viele Teilintervalle zerlegen, in den $f(x)$ stetig und monoton ist.
2. In den Unstetigkeitsstellen (es kommen nur Sprungunstetigkeiten mit endlichen Sprüngen in Frage) existiert sowohl der links- als auch der rechts-seitige Grenzwert.

Unter diesen Voraussetzungen konvergiert die Fourier-Reihe von $f(x)$ für alle $x \in \mathbb{R}$. In den Stetigkeitsstellen von $f(x)$ stimmt sie mit der Funktion von $f(x)$ überein, während sie in den Sprungstellen das arithmetische Mittel aus dem links- und rechtsseitigen Grenzwert der Funktion liefert (vgl. Rechteck oder Sägezahnimpuls).

Anmerkung: Meist findet man in den Darstellungen für die Fourier-Reihe als ersten Summand $a_0/2$. Ist nur a_0 angegeben, so unterscheiden sie die Summanden um den Faktor 2, der erste Summand ist in jedem Fall der gleiche (numerische) Wert)

Die Faktoren a_n und b_n ergeben sich aus trigonometrischen Überlegungen; Eine periodische Funktion $f(t)$ kann als Summe von Sinusfunktionen **unterschiedlicher** Phasenlage dargestellt werden, deren Frequenzen **ganzzahlige** Vielfache der Grundschiwingung ω sind.

$$f(t) = a_0 + f_1(t) + f_2(t) + f_3(t) + \dots$$

$$f_1(t) = A_1 \sin \omega(t - t_1); f_2(t) = A_2 \sin 2\omega(t - t_2); \dots; f_n(t) = A_n \sin n\omega(t - t_n)$$

$$\omega = \text{Kreisfrequenz, } \omega = \frac{2\pi}{\tau}$$

τ = Periodendauer; $1/\tau$ = Frequenz,

A_n = Amplitude der n-ten Oberschwingung

Aus der Trigonometrie ist bekannt:

$$\sin(\alpha \pm \beta) = \sin \alpha \cos \beta \pm \cos \alpha \sin \beta$$

$$\text{Daher gilt analog: } A_n \sin n\omega(t - t_n) = A_n (\sin n\omega t \cdot \cos n\omega t_n - \cos n\omega t \cdot \sin n\omega t_n)$$

$$f_n(t) = A_n \sin n\omega(t - t_n)$$

$$f_n(t) = A_n (\sin n\omega t \cdot \cos n\omega t_n - \cos n\omega t \cdot \sin n\omega t_n)$$

Also:

$$a_n = -A_n \sin n\omega t_n$$

$$b_n = A_n \cos n\omega t_n$$

$$f_n(t) = a_n \cos n\omega t + b_n \sin n\omega t$$

$$\omega t = x$$

$$\text{Es soll gelten: } f(x) = a_0 + a_1 \cos x + b_1 \sin x + a_2 \cos 2x + b_2 \sin 2x + \dots$$

$$f(x) = f(x + 2\pi)$$

$$f(t) = f\left(\frac{x}{\omega}\right), \text{ weil es sich um eine periodische Funktion handelt.}$$

Berechnung des Fourierkoeffizienten a_0

Angenommen $f(x)$ sei darstellbar als Summe von Funktionen der Art:

$$f(x) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos nx + b_n \sin nx$$

Gliedweise Integration der Fourier-Reihe im Intervall $(0, 2\pi)$:

$$\int_0^{2\pi} f(x) dx = \int_0^{2\pi} a_0 dx + \sum_{n=1}^{\infty} \left(a_n \int_0^{2\pi} \cos nx dx + b_n \int_0^{2\pi} \sin nx dx \right)$$

Dabei nehmen die einzelnen Integrale folgende Werte an:

$$\begin{aligned} \int_0^{2\pi} \cos nx dx &= \int_0^{2\pi} \sin nx dx = 0 \\ \int_0^{2\pi} f(x) dx &= \int_0^{2\pi} a_0 dx = a_0 2\pi \end{aligned}$$

Das Integral reduziert sich daher auf: $a_0 = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(x) dx$

Der Mittelwert von $f(x)$ ist demnach a_0

(Anm: Ist als erster Summand der Fourier-Reihe $a_0/2$ angeführt, dann ist $a_0 = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(x) dx$)

Berechnung der Fourierkoeffizienten $a_1, a_2, \dots$

Beide Seiten werden mit $\cos(mx)$, bzw. mit $\sin(mx)$ multipliziert und dann über das Intervall $(0, 2\pi)$ integriert:

$$\int_0^{2\pi} f(x) \cos mx dx = \int_0^{2\pi} a_0 \cos mx dx + \sum_{n=1}^{\infty} \left[a_n \int_0^{2\pi} \cos nx \cos mx dx + b_n \int_0^{2\pi} \sin nx \cos mx dx \right]$$

Daraus ergeben sich folgende Integrale:

$$\begin{aligned} \int_0^{2\pi} \cos nx \cdot \cos mx dx &= \int_0^{2\pi} \cos^2 nx dx = \pi \quad \text{für } n = m \\ \int_0^{2\pi} \cos nx \sin mx dx &= 0 \quad \text{für alle } n, m \in \mathbb{N} \\ \int_0^{2\pi} \cos nx \cos mx dx &= \int_0^{2\pi} \sin nx \sin mx dx = 0 \quad \text{für } n \neq m \end{aligned}$$

Der Wert aller Integrale der rechten Seite für $n \neq m = 0$, es bleibt nur übrig für $m = n$:

$$\begin{aligned} \int_0^{2\pi} f(x) \cos nx dx &= a_n \int_0^{2\pi} \cos^2 nx dx = a_n \pi \\ a_n &= \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(x) \cos nx dx \end{aligned}$$

Analog erfolgt die Berechnung der Faktoren $b_0, b_1, b_2, \dots$

$$\int_0^{2\pi} f(x) \sin nx \, dx = b_n \int_0^{2\pi} \sin^2 nx \, dx = b_n \pi$$

$$b_n = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(x) \sin nx \, dx$$

Übergang von $f(x)$ auf $f(t)$: $f(t) = f\left(\frac{x}{\omega}\right)$, $\omega = \frac{2\pi}{\tau}$, $f(t)$ hat Periode von 2π , bzw τ im Zeitmaß. Substitution von $x = \omega t$; $dx = \omega \, dt$

$$a_0 = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(x) \, dx; \quad a_0 = \frac{\omega}{2\pi} \int_0^{\tau} f(t) \, dt = \frac{1}{\tau} \int_0^{\tau} f(t) \, dt$$

$$a_n = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(x) \cos nx \, dx = \frac{\omega}{\pi} \int_0^{\tau} f(t) \cos n\omega t \, dt$$

$$a_n = \frac{2}{\tau} \int_0^{\tau} f(t) \cos n\omega t \, dt \quad \text{für } n \geq 1$$

$$b_n = \frac{2}{\tau} \int_0^{\tau} f(t) \sin n\omega t \, dt$$

Häufig wird für a_0 der doppelte Wert genommen: $a_0 = \frac{2}{\tau} \int_0^{\tau} f(t) \, dt$, in Analogie zur

Berechnung der a_n , weil für diese Koeffizienten als Faktor vor dem Integral $2/\tau$ steht. In der Schreibweise für die Fourier-Reihe muß a_0 dann entsprechend korrigiert werden:

$$f(t) = \frac{a_0}{2} + a_1 \cos \omega t + b_1 \sin \omega t + a_2 \cos 2\omega t + b_2 \sin 2\omega t + \dots$$

Praktische Berechnungsbeispiele

(1) Symmetriebetrachtungen

Die Fourier-Reihe einer geraden Funktion $f(x)$ (achsensymmetrisch zur y-Achse) enthält nur gerade Reihenglieder, d.h. neben dem konstanten Glied nur Kosinusglieder ($b_n = 0$ für $n = 1, 2, 3, \dots$)

$$f(x) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos nx$$

Die Fourier-Reihe einer ungeraden Funktion $f(x)$ (symmetrisch zum Nullpunkt) enthält nur ungerade Reihenglieder, d.h. Sinusglieder ($a_n = 0$ für $n = 0, 1, 2, 3, \dots$)

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin nx$$

(2) Die Integration darf über ein beliebiges Periodenintervall der Länge 2π erstreckt werden (z.B. $(-\pi, +\pi)$)

(3) Durch Abbruch der Fourier-Reihe nach endlich vielen Gliedern erhält man eine Näherungsfunktion für $f(x)$ in Form einer trigonometrischen Reihe. Ähnlich wie bei den

Potenzreihen gilt auch hier: Je mehr Glieder berücksichtigt werden, umso besser ist die Näherung.

Bsp.1: Sägezahnimpuls

$$f(x) = \begin{cases} -kx + d & 0 \leq x \leq \pi \\ kx + (d - 2k\pi) & \pi < x < 2\pi \end{cases}$$

$$a_0 = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(x) dx = d - \frac{k\pi}{2}$$

$$a_n = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(x) \cos nx dx = \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} (-kx + d) \cos nx dx + \frac{1}{\pi} \int_{\pi}^{2\pi} (kx + d - 2k\pi) \cos nx dx$$

$$a_n = \frac{1}{\pi} \left(- \int_0^{\pi} kx \cos nx dx + d \underbrace{\int_0^{\pi} \cos nx dx}_0 + d \underbrace{\int_{\pi}^{2\pi} \cos nx dx}_0 + \int_{\pi}^{2\pi} kx \cos nx dx - 2k\pi \underbrace{\int_{\pi}^{2\pi} \cos nx dx}_0 \right)$$

$$a_n = \frac{1}{\pi} \left(- \int_0^{\pi} kx \cos nx dx + \int_{\pi}^{2\pi} kx \cos nx dx \right)$$

Die Lösung des Integrals $\int kx \cos nx dx$ erfolgt mit partieller Integration:

$$u = kx \quad u' = k$$

$$v' = \cos nx \quad v = \frac{1}{n} \sin nx$$

$$\int kx \cos nx dx = \frac{kx}{n} \sin nx - k \int \frac{1}{n} \sin nx$$

$$\int kx \cos nx dx = \frac{k}{n^2} (nx \cdot \sin nx + \cos nx)$$

Zusammenfassen der Teilintegrale:

$$h(x) = kx \cos nx$$

$$a_n = \frac{1}{\pi} \left(\int_0^{\pi} -h(x) dx + \int_{\pi}^{2\pi} h(x) dx \right) = \frac{1}{\pi} \left(\int_0^{\pi} h(x) dx + \int_{\pi}^{2\pi} h(x) dx \right) = \frac{1}{\pi} (H(0) - H(\pi) + H(2\pi) - H(\pi))$$

$$\begin{aligned} \frac{1}{\pi} (H(2\pi) + H(0) - 2H(\pi)) &= \frac{k}{\pi \cdot n^2} \left(\underbrace{\cos 2n\pi}_1 + 2n\pi \cdot \underbrace{\sin 2n\pi}_0 + \underbrace{\cos n\pi}_1 + \underbrace{n\pi \sin n\pi}_0 - 2(\cos n\pi + \underbrace{n\pi \sin n\pi}_0) \right) \\ &= \frac{k}{\pi \cdot n^2} (2 - 2 \cos n\pi) \end{aligned}$$

Für gerade n (n= 2,4,6,..) verschwindet der Ausdruck $(2 - 2 \cos n\pi)$, für ungerade n ist der Ausdruck in der Klammer = 4

Die Fourierkoeffizienten sind demnach:

$$a_{2n-1} = \frac{k}{(2n-1)^2 \cdot \pi} \cdot (2+2) = \frac{4k}{\pi} \cdot \frac{1}{(2n-1)^2}$$

$$f(x) = d - \frac{k\pi}{2} + \frac{4k}{\pi} \left[\cos(x) + \frac{1}{3^2} \cos(3x) + \frac{1}{5^2} \cos(5x) + \dots \right]$$

$$f(x) = d - \frac{k\pi}{2} + \frac{4k}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos((2n-1)x)}{(2n-1)^2}$$

Darstellung eines Dreiecksignals mit der Funktion trunc(x), die den Integererteil einer Zahl liefert, k= Steigung der Gerade, d = maximaler Funktionswert, τ = Periodendauer

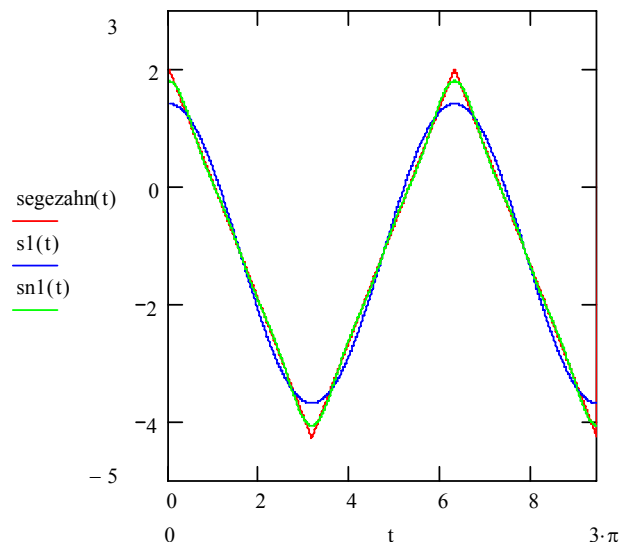
$$\text{segezahn}(t) := \text{if} \left[\sin(t) \geq 0, d - k \cdot \pi \cdot \left(\frac{2t}{\tau} - \text{trunc} \left(\frac{2t}{\tau} \right) \right), d - \frac{k \cdot \tau}{2} + k \cdot \pi \cdot \left(\frac{2t}{\tau} - \text{trunc} \left(\frac{2t}{\tau} \right) \right) \right]$$

k := 2
d := 2
 $\tau := 2 \cdot \pi$
 $a0 := d - \frac{k \cdot \pi}{2}$

$$s1(t) := a0 + \frac{4 \cdot k}{\pi} \cdot \sum_{a=1}^1 \frac{\cos[(2a-1) \cdot t]}{(2 \cdot a - 1)^2}$$

n := 3

$$\text{sn1}(t) := a0 + \frac{4 \cdot k}{\pi} \cdot \sum_{a=1}^n \frac{\cos[(2a-1) \cdot t]}{(2 \cdot a - 1)^2}$$



Bsp 2. Rechteckfunktion

$$f(t) := \begin{cases} 1 & 0 \leq x < \tau/2 \\ -1 & \tau/2 < x < \tau \end{cases}$$

$f(t)$ ist ungerade, alle cosinus-Glieder fallen daher weg. $a_n = 0$; $n = 0, 1, 2, 3, \dots$

$$f(t) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin n\omega t,$$

$$b_n = \frac{2}{\tau} \int_0^{\tau} f(t) \cdot \sin n\omega t \, dt$$

$$b_n = \frac{2}{\tau} \int_0^{\tau/2} 1 \cdot \sin n\omega t \, dt + \int_{\tau/2}^{\tau} -1 \cdot \sin n\omega t \, dt$$

$$b_n = \frac{2}{\omega\tau} \left(\frac{1}{n} \cdot -\cos n\omega t \Big|_0^{\tau/2} + \frac{1}{n} \cdot (-1) \cdot -\cos n\omega t \Big|_{\tau/2}^{\tau} \right)$$

$$\frac{2}{\omega\tau} = \frac{1}{\pi}$$

$$b_n = \frac{1}{n\pi} \left(-\cos n\omega \frac{\tau}{2} + \cos 0 + \cos n\omega\tau - \cos n\omega \frac{\tau}{2} \right)$$

$$b_n = \frac{1}{n\pi} \left(\cos 0 + \underbrace{\cos n\omega\tau}_{1 \forall n \in \mathbb{N}} - \underbrace{2 \cos n\omega \frac{\tau}{2}}_{\substack{-2, n=1,3,5,\dots \\ +2, n=2,4,6,\dots}} \right)$$

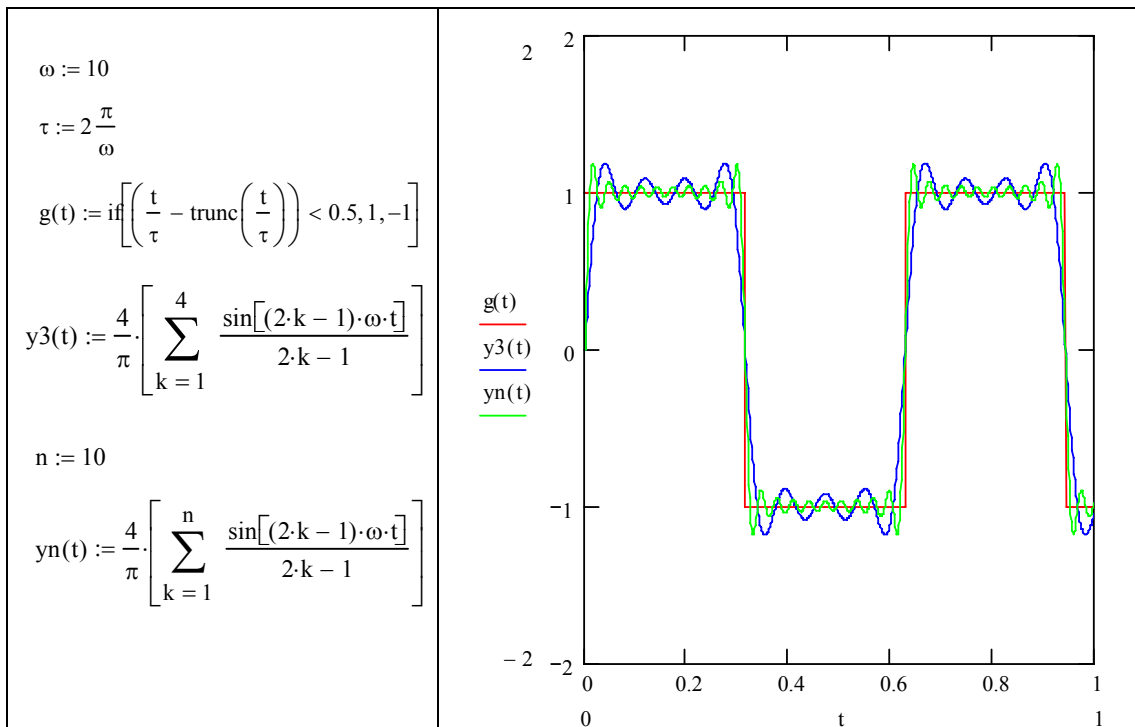
Die Fourierkoeffizienten verschwinden für gerade n , $n = 2, 4, 6, \dots$; für ungerade Fourierkoeffizienten ist der Ausdruck in der Klammer = 4

Die Fourierkoeffizienten sind demnach:

$$b_{2n+1} = \frac{1}{(2n-1) \cdot \pi} \cdot (1 + 1 + 2) = \frac{4}{\pi} \cdot \frac{1}{(2n-1)}$$

$$f(t) = \frac{4}{\pi} \left[\sin(\omega t) + \frac{1}{3} \sin(3\omega t) + \frac{1}{5} \sin(5\omega t) + \dots \right]$$

$$f(x) = \frac{4}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin((2n-1)\omega t)}{2n-1}$$



Numerische harmonische Analyse

$f(t)$ ist vielfach keine einfache Funktion, die eine analytische Lösung der Integrale $f(t) \cdot \cos(n\omega t)$ und $f(t) \cdot \sin(n\omega t)$ erlaubt. Unter diesen Umständen sind Methoden der numerischen Integration anzuwenden.

Sei $y(k) = f(t_k)$ bekannt aus Messwerten. Eine Periode wird unterteilt in Intervalle gleicher Länge.

N Anzahl der Unterteilungen in einer Periode, $k = \{0, 1, \dots, N\}$
 δ Schrittweite, im Zeitmaß
 τ Periodendauer

$$y_N = y_0$$

$$y_{N+k} = y_k$$

$$t_k = t_0 + k \cdot \delta$$

$$\tau = N \cdot \delta$$

$$\omega = \frac{2\pi}{n \cdot \delta}$$

Numerische Integration zur Berechnung der Faktoren $a_0, \dots, a_n, b_1, \dots, b_n$:

$$a_n = \frac{2}{\tau} \int_0^{\tau} f(t) \cdot \cos n\omega t \, dt$$

$$a_0 = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} y_k$$

$$a_n = \frac{2}{N \cdot \delta} \sum_{k=0}^{N-1} f(t_k) \cos n\omega t_k \cdot \delta$$

$$a_n = \frac{2}{N} \sum_{k=0}^{N-1} y_k \cos \frac{2\pi n}{\tau} t_k$$

$$b_n = \frac{2}{N} \sum_{k=0}^{N-1} y_k \sin \frac{2\pi n}{\tau} t_k$$

