

Prüfungsthemen zur VL-Prüfung "Geometrie für Lehramt"

Zu Beginn der VL-Prüfung erhalten Sie drei Themen von der Art, wie sie im Folgenden formuliert sind.

Sie haben 20-25 Minuten Zeit, um sich - "aus dem Kopf" - Skizzen zu den drei Themen zu machen. Anhand Ihrer Skizzen erklären Sie mir diese Themen.

Als Adressaten Ihrer Ausführungen stellen Sie sich bitte nicht einen Experten aus Geometrie vor, sondern eine Studienkollegin oder einen Studienkollegen, die bzw. der nicht über fortgeschrittene Kenntnisse aus Geometrie verfügt, jedoch solide Grundkenntnisse aus Analysis und Linearer Algebra besitzt.

A) Ellipse

- die Ellipse als Normalriss des Kreises
- die Ellipse als Zylinderschnitt
- die Ellipse als Kegelschnitt
- Konstruktionsmöglichkeiten

B) Kegelschnitte

- Doppelkegel und Dandelinische Kugeln
- die Ellipse als Kegelschnitt
- die Parabel als Kegelschnitt
- die Hyperbel als Kegelschnitt

C) Darstellung der Kegelschnitte mit Hilfe einer Leitlinie

- elementargeometrische Darstellung
- analytische Darstellung

D) Die Zentralperspektive

- Satz von Pappos und Satz zur Zentralprojektion
- Satz von Desargues
- Historisches zur Zentralprojektion und zur projektiven Geometrie

E) Ausgewählte Texte aus Descartes' Geometrie

- Ähnlichkeit von Dreiecken
- geometrische Lösung der quadratischen Gleichung
- Descartes' Kreismethode zur Tangentenkonstruktion

F) Darstellung der Kegelschnitte

- in Cartesischen Koordinaten
- in Polarkoordinaten

G) Archimedes' Quadratur der Parabel

- die Aussage
- entscheidende Einsichten und Vorgehensweise von Archimedes

H) Anwendungen der Kegelschnitte

- Galileis Fallgesetz
- das erste Keplergesetz
- 1. und 2. kosmische Geschwindigkeit

- weitere Anwendungen
- I) Wissenwertes zum Thema Quadriken
 - Definition einer Quadrik
 - Klassifikation der Quadriken
 - Hauptachsentransformation
- J) Hüllkurven einer Geradenschar
 - am Beispiel der Evolute der Parabel erklären
 - Ermittlung des Krümmungsradius
- K) Poincaré's Kreismodell der hyperbolischen Geometrie
 - der Areatangens hyperbolicus
 - Spiegelung am Kreis
- L) Axiomatik der Geometrie
 - Euklid's Parallelenaxiom
 - Historisches zur Axiomatik der Geometrie
 - Hyperbolische, Euklidische und Elliptische Geometrie
- M) Die Teilgebiete der Geometrie im Überblick (einschließlich historischer Aspekte)

David Hilbert
Stephan Cohn-Vossen

Anschauliche Geometrie

Appendix
von P. Alexandroff

Geleitwort
von Marcel Berger

Zweite Auflage



Springer

Erstes Kapitel.

Die einfachsten Kurven und Flächen.

§ 1. Ebene Kurven.

Die einfachste Fläche ist die Ebene, die einfachsten Kurven sind die ebenen Kurven; unter ihnen die einfachste ist die Gerade. Die Gerade läßt sich definieren als kürzester Weg zwischen zwei Punkten, oder als Schnittkurve zweier Ebenen, oder als Rotationsachse.

Die nächst einfache Kurve ist der Kreis. Schon dieses Gebilde hat zu so vielen und tiefen Untersuchungen Anlaß gegeben, daß sie allein eine Vorlesung füllen würden. Wir definieren den Kreis als die Kurve, deren Punkte von einem gegebenen Punkt gleichen Abstand haben. Wir erzeugen den Kreis durch die bekannte Zirkel- oder Fadenkonstruktion. Sie ergibt anschaulich: Der Kreis ist eine geschlossene, in ihrem ganzen Verlauf konvexe Kurve; daher läßt sich durch jeden seiner Punkte eine bestimmte Gerade — die Tangente — legen, die nur diesen einen Punkt — den Berührungs punkt — mit dem Kreise gemein hat und die sonst in dessen Äußerem verläuft (Abb. 1). Der Radius MB nach dem Berührungs punkt B muß die kürzeste Verbindung des Kreismittelpunktes M mit der Tangente t sein. Denn deren Punkte liegen mit Ausnahme des Berührungs punktes im Äußeren des Kreises, sind also vom Mittelpunkt weiter entfernt als der Berührungs punkt. Hieraus folgt weiter, daß jener Radius auf der Tangente senkrecht steht. Zum Beweise spiegle ich den Mittelpunkt M an der Tangente t , d. h. ich falle von M aus das Lot auf t und verlängere es um sich selbst bis M' ; M' wird der Spiegel punkt von M genannt. Da nun MB die kürzeste Verbindung zwischen M und t ist, so muß aus Symmetriegründen auch $M'B$ die kürzeste Verbindung zwischen M' und t sein. Folglich stellt der Streckenzug MBM' die kürzeste Verbindung zwischen M und M' dar, muß also bei B umgeknickt verlaufen, d. h. MB steht in der Tat auf t senkrecht.

Es liegt nahe, eine Verallgemeinerung der Kreiskonstruktion zu betrachten. Bei der Fadenkonstruktion des Kreises habe ich nämlich

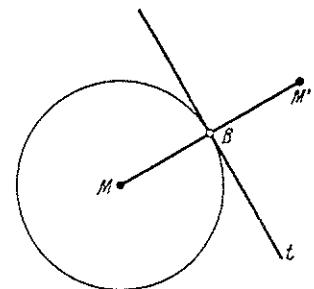


Abb. 1.

um einen festen Punkt, den Kreismittelpunkt, einen geschlossenen Faden zu legen und beim Zeichnen straff zu ziehen; eine ähnliche Kurve werde ich erhalten, wenn ich den geschlossenen Faden um zwei feste Punkte lege. Die so entstehende Kurve heißt Ellipse, die beiden festen Punkte heißen deren Brennpunkte. Die Fadenkonstruktion kennzeichnet die Ellipse als die Kurve, deren Punkte konstante Abstandssumme von zwei gegebenen Punkten haben. Läßt man die beiden Punkte zusammenrücken, so erhält man den Kreis als Grenzfall der Ellipse. Allen erwähnten Eigenschaften des Kreises entsprechen einfache Eigenschaften der Ellipse. Sie ist geschlossen, überall konvex und besitzt in jedem Punkte eine Tangente, die mit Ausnahme des Berührungsproduktes ganz im Äußeren der Ellipse verläuft. Den Radien des Kreises entsprechen bei der Ellipse die beiden Verbindungslien eines Kurvenpunktes mit den Brennpunkten. Sie

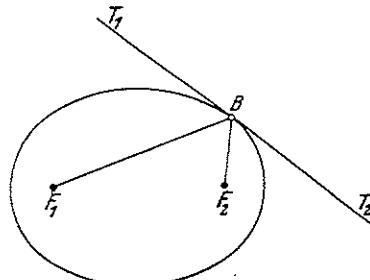


Abb. 2.

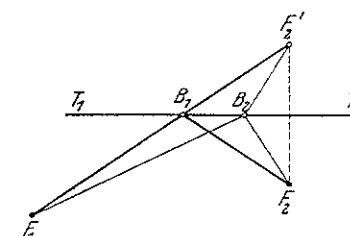


Abb. 3.

werden die Brennstrahlen des Ellipsenpunktes genannt. In Analogie zu der Tatsache, daß die Kreistangente auf dem Radius des Berührungsproduktes senkrecht steht, bildet die Ellipsentangente gleiche Winkel mit den Brennstrahlen des Berührungsproduktes. Meine Behauptung lautet in der Bezeichnungsweise von Abb. 2: $\alpha_{F_1BT_1} = \alpha_{F_2BT_2}$. Zum Beweis (Abb. 3) spiegle ich F_2 an der Tangente und nenne den Spiegelpunkt F'_2 . Nun ist die Gerade $F_1F'_2$, welche die Tangente in B_1 treffen möge, der kürzeste Weg zwischen F_1 und F'_2 . Also ist $F_1B_1F_2$ der kürzeste Weg zwischen F_1 und F_2 , der die Tangente trifft; denn für jeden anderen Punkt B_2 ist $F_1B_2F_2 = F_1B_2F'_2$ länger als $F_1B_1F_2 = F_1B_1F'_2$. Andererseits wird aber der kürzeste Weg zwischen F_1 und F_2 , der die Tangente trifft, von den Brennstrahlen des Berührungsproduktes B gebildet. Denn jeder andere Punkt der Tangente hat, da er im Ellipsenäußeren liegt, größere Entfernungssumme von den Brennpunkten als der Ellipsenpunkt B . B fällt also mit B_1 zusammen, und hieraus folgt die Behauptung. Denn F_2 und F'_2 liegen zu der Geraden T_1T_2 symmetrisch, und $\alpha_{F_1B_1T_1}$ ist der Scheitelwinkel von $\alpha_{F'_2B_1T_1}$.

Diese Eigenschaft der Ellipsentangente erlaubt eine optische Anwendung, der die Namen Brennpunkt und Brennstrahl ihren Ursprung verdanken. Denkt man sich nämlich in einem Brennpunkt eine Lichtquelle angebracht und die Ellipse als spiegelnd, so wird das Licht im anderen Brennpunkt wieder vereinigt.

Nicht ganz so leicht ausführbar wie die Ellipsenkonstruktion, aber im Prinzip nicht schwieriger ist die Konstruktion einer Kurve, deren Punkte von zwei festen Punkten konstante Abstandsunterschiede haben. Diese Kurve heißt Hyperbel, die festen Punkte heißen deren Brennpunkte. Es soll also (Abb. 4) für jeden Kurvenpunkt B oder B' die Beziehung $F_1B - F_2B = \text{const} = a$ oder $F_2B' - F_1B' = a$ gelten. Demnach besteht die Hyperbel aus zwei getrennten Ästen. Die Anschauung

zeigt, daß die Hyperbel überall konvex ist und in jedem Punkt eine Tangente besitzt. Wir werden später (S. 8, Fußnote 2) beweisen, daß auch hier die Tangente keinen weiteren Punkt außer dem Berührungsprodukte mit der Kurve gemein hat. In analoger Weise wie bei der Ellipse läßt sich zeigen, daß die Tangente den Winkel zwischen den Brennstrahlen des Berührungsproduktes halbiert (vgl. Abb. 6).

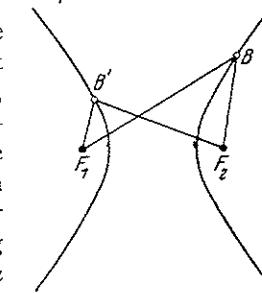


Abb. 4.

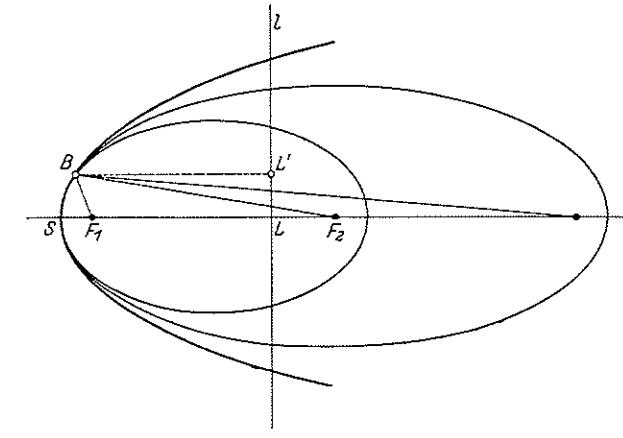


Abb. 5.

Aus der Ellipse kann man durch Grenzübergang eine weitere Kurve, die Parabel erzeugen (Abb. 5). Dazu halte ich den einen Brennpunkt, z. B. F_1 , und den ihm nächstgelegenen Scheitel S der Ellipse fest (unter den Scheiteln der Ellipse versteht man die Schnittpunkte der Kurve mit der Verbindungslien der Brennpunkte). Ich betrachte nun die Ellipsen, die entstehen, wenn der zweite Brennpunkt F_2 sich auf der Ver-

längerung von SF_1 immer weiter von F_1 entfernt; diese Ellipsen streben gegen eine Grenzkurve, und das ist eben die Parabel. Aus dem Grenzübergang können wir eine einfache Definition der Parabel herleiten. Solange mein Zeichenstift bei der Fadenkonstruktion der Ellipse in der Nähe von S bleibt (Abb. 5), ist der nach F_2 laufende Faden bei großer Entfernung von F_1 und F_2 ungefähr parallel SF_1 . Errichtet man also in einem beliebigen Punkt L von F_1F_2 das Lot l auf F_1F_2 , so gilt angenähert

$$F_1B + BF_2 = F_1B + BL' + LF_2 = \text{const}$$

(L' ist der Fußpunkt des Lotes von B auf l). Wenn ich nun für

$$\text{„const} - LF_2\text{“}$$

eine neue Konstante einführe (LF_2 ist ja für ein und dieselbe Kurve konstant), so erhalte ich:

$$F_1B + BL' = \text{const.}$$

Diese Beziehung gilt immer genauer, je größer die Entfernung F_1F_2 wird, und bei der Grenzkurve ist sie streng erfüllt. Somit ist die Parabel diejenige Kurve, deren Punkte konstante Entfernungssumme von einem festen Punkt und einer festen Geraden haben, oder, was auf dasselbe hinauskommt, die Kurve, für deren Punkte der Abstand von einem festen Punkt gleich dem von einer festen Geraden ist. Wir erhalten diese Gerade, indem wir zu l die Parallele auf der anderen Seite von S im Abstand SF_1 ziehen; sie wird die Leitlinie der Parabel genannt.

Denkt man sich die Parabel spiegelnd, so reflektiert sie alle Lichtstrahlen, die parallel SF_1 einfallen, in den Punkt F_1 ; dies folgt ebenfalls aus dem Grenzübergang.

Wir haben die „Schar“ aller Ellipsen betrachtet, die einen Scheitel und den nächstgelegenen Brennpunkt gemein haben. Nunmehr wollen wir die Schar aller Ellipsen betrachten, die beide Brennpunkte gemein haben. Diese Schar „konfokaler“ Ellipsen (focus heißt Brennpunkt) bedeckt die Ebene „einfach und lückenlos“, das heißt, durch jeden Punkt der Ebene geht genau eine Kurve der Schar; denn jeder Punkt besitzt eine bestimmte Entfernungssumme von den beiden Brennpunkten, liegt also auf der Ellipse, die zu diesem Wert der Summe gehört¹.

Wir nehmen nun noch die Schar aller Hyperbeln hinzu, die ebenfalls die beiden vorgegebenen Punkte zu Brennpunkten haben. Auch diese Schar bedeckt die Ebene einfach und lückenlos², so daß durch jeden

¹ Die Strecke zwischen den Brennpunkten ist eine (ausgeartete) Ellipse. Man erhält sie, wenn man als Wert der Entfernungssumme den Abstand der Brennpunkte wählt.

² Die Gerade durch die Brennpunkte mit Ausnahme ihrer Verbindungsstrecke ist eine ausgeartete Hyperbel, ebenso die Mittelsenkrechte auf der Verbindungsstrecke der Brennpunkte; bei ihr hat die Entfernungsdifferenz den konstanten Wert Null.

Punkt der Ebene genau zwei Kurven des Systems konfokaler Ellipsen und Hyperbeln hindurchgehen (Abb. 6). In jedem vorgegebenen Punkt (außer in den Brennpunkten) halbieren die Tangenten der hindurchgehenden Hyperbel und Ellipse Winkel und Nebenwinkel der Brennstrahlen des Punktes, stehen also aufeinander senkrecht.

Die konfokalen Ellipsen und Hyperbeln bilden daher zwei „zueinander orthogonale Kurvenscharen“ (zwei Scharen heißen orthogonal, wenn jede Kurve der einen Schar jede der anderen senkrecht schneidet; als Winkel zweier Kurven definiert man den Winkel ihrer Tangenten im Schnittpunkt). Um eine

Übersicht über dieses Kurvensystem zu gewinnen (Abb. 7), beginnen wir mit der Mittelsenkrechten von F_1F_2 und durchlaufen dann zunächst die Schar der Hyperbeln. Diese werden immer flacher und gehen schließlich in die beiderseitige Verlängerung von F_1F_2 über. Damit ist die Ebene vollständig ausgefüllt. Wir springen nun auf die Strecke F_1F_2 selbst über, an die sich die zunächst sehr langgestreckten Ellipsen anschließen, die allmählich immer kreisähnlicher werden und sich gleichzeitig unbegrenzt vergrößern. Damit ist die Ebene zum zweiten Male ausgefüllt.

Ein anderes besonders einfaches Beispiel orthogonaler Kurvenscharen sind die konzentrischen Kreise und die Geraden durch den gemeinsamen Mittelpunkt. Man erhält diese Figur aus der vorigen durch Grenz-

übergang, indem man die Brennpunkte zusammenrücken läßt. Dabei gehen die Ellipsen in Kreise und die Hyperbeln in Geradenpaare über.

Die Niveaulinien und die Linien größter Steigung auf einer Landkarte sind ebenfalls orthogonale Scharen.

Schließlich sei noch eine andere Fadenkonstruktion erwähnt, die zu orthogonalen Scharen führt. Um eine konvexe Kurve, etwa um einen

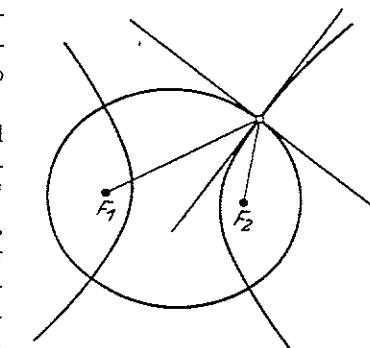


Abb. 6.

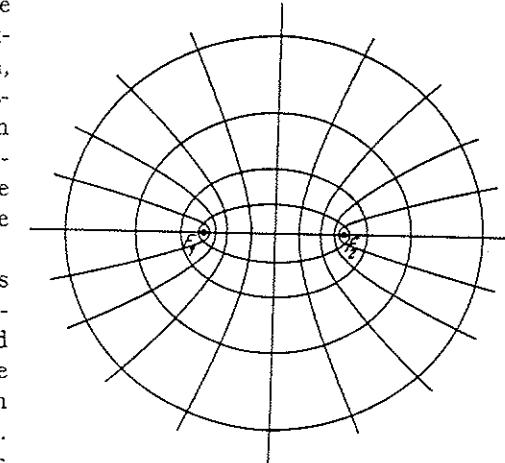


Abb. 7.

Kreis, sei ein offener Faden geschlungen. Ich betrachte die Kurve, die der Endpunkt des Fadens beschreibt, wenn ich den Faden straff angespannt vom Kreis abwickle (Abb. 8). Die so erhaltene „Kreisevolvente“ läuft in immer weiteren Windungen um den Kreis herum, ist also eine Spirale. Die Konstruktion ergibt anschaulich, daß die Kurve auf einer der beiden Kreistangenten senkrecht steht, die ich vom betrachteten Kurvenpunkt aus an den Kreis legen kann. Auch alle anderen Umläufe der Evolvente schneiden diese Tangente rechtwinklig; und zwar ist das zwischen zwei Umläufen liegende Tangentenstück von fester Länge, nämlich gleich dem Umfang des erzeugenden Kreises.

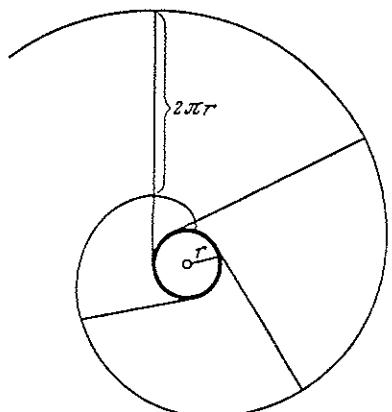


Abb. 8.

Ich kann nun noch beliebig viele weitere Evolventen desselben Kreises zeichnen, indem ich an einem anderen Peripheriepunkt mit der Abwicklung des Fadens beginne; die Gesamtheit dieser Evolventen kann aber auch durch Rotation um den Kreismittelpunkt aus einer von ihnen erzeugt werden. Die Schar der Evolventen bedeckt die Ebene mit Ausnahme des Kreisinneren einfach und lückenlos. Sie ist orthogonal zur Schar der in einem bestimmten Umlaufsinn gezogenen Kreishalbtangentialen.

Auch bei einer beliebig vorgegebenen Schar gerader Linien besteht die Orthogonalschar stets aus Evolventen. Ihre erzeugende Kurve ist diejenige, die (wie in unserem Beispiel der Kreis) von den gegebenen Geraden eingehüllt wird. Wir kommen darauf in der Differentialgeometrie (S. 158) und in der Kinematik (S. 243, 244) zurück.

DARSTELLENDE GEOMETRIE

I

VON

WALTER WUNDERLICH

O. PROFESSOR AN DER TECHNISCHEN HOCHSCHULE WIEN



BIBLIOGRAPHISCHES INSTITUT · MANNHEIM

HOCHSCHULTASCHENBÜCHER-VERLAG

III. KREIS UND KUGEL

16. Normalriß eines Kreises

Ein Kreis k ist erklärt als Ort aller Punkte P einer Ebene ε , die von einem festen Punkt $M \in \varepsilon$ – dem Mittelpunkt – den gleichen Abstand r (Radius) haben: $\overline{MP} = r = \text{const}$. Aus der Definition folgt unmittelbar die zentrische Symmetrie von k bezüglich M , die orthogonale Symmetrie bezüglich jeder durch M gehenden Geraden $d \subset \varepsilon$ (Durchmesser), sowie die Eigenschaft der Kreistangente, zum Durchmesser durch den Berührungs punkt normal zu sein.

Die für die Darstellung eines Kreises benötigten Bestimmungsstücke sind also seine *Ebene*, sein *Mittelpunkt* und sein *Radius*. Die Aufgabe selbst fällt unter die Maßaufgabe M2b.

Die Art der Normalprojektion eines Kreises $k(\varepsilon, M, r)$ soll an Hand des Grundrisses k' geklärt werden. Hierbei bedeutet es keine Einschränkung, die Kreisebene ε von vornherein als zweitprojizierend vorauszusetzen, da die Gestalt von k' nur vom Neigungswinkel $\alpha = \pi_1 \varepsilon$ abhängt. Nach Paralleldrehung des Kreises um den waagrechten Durchmesser x

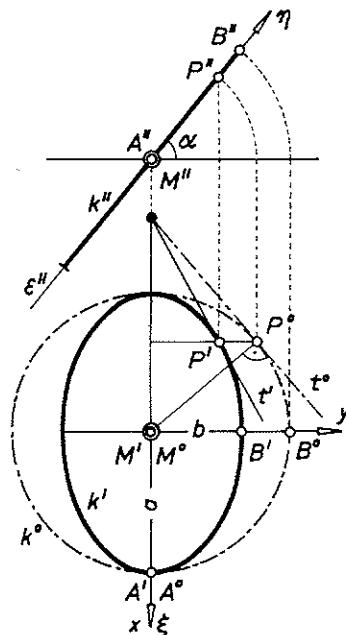


Abb. 39

(1. Hauptlinie) können beliebig viele Punkte $P \in k$ samt ihrer Tangente t leicht im Grundriß dargestellt werden (Abb. 39).

In einem der Ebene ε angehörenden kartesischen Koordinatensystem ξ, η mit dem Ursprung M lautet die Gleichung des Kreises k :

$$\xi^2 + \eta^2 = r^2. \quad (16.1)$$

Läßt man die ξ -Achse mit der Hauptlinie x zusammenfallen, so ist die η -Achse eine Falllinie der Ebene ε . Während beim Übergang zum Grundriß die Abszissen unverändert bleiben, verkürzen sich die Ordinaten mit dem Faktor $\cos \alpha$:

$$x = \xi, \quad y = \eta \cdot \cos \alpha. \quad (16.2)$$

Dementsprechend folgt aus (16.1) die Gleichung des Grundrisses k' :

$$k' \dots \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \quad \text{mit } a = r, \quad b = r \cdot \cos \alpha. \quad (16.3)$$

k' ist also eine *Ellipse* mit den Halbachsen a, b . In Übertragung auf beliebige Normalrisse gilt mithin: *Der Normalriß eines Kreises ist im allgemeinen eine Ellipse, deren Hauptachse die Richtung der Hauptlinien der Kreisebene hat und gleich dem unverkürzten Kreisdurchmesser ist.* Mit Rücksicht auf M3a kann man auch sagen: *Die Hauptachse der Bildellipse steht normal zum Bild der Rotationsachse des Kreises.*

17. Ellipsenkonstruktionen

Aus dem in Abb. 39 ersichtlichen Zusammenhang zwischen Umklappung und Normalriß eines Kreises folgt die schon ARCHIMEDES (287–212 v. Chr.) geläufige Tatsache: *Werden alle zu einem Durchmesser normalen Sehnen eines Kreises vom Halbierungspunkt ausgehend in einem festen Verhältnis verkürzt, so liegen die neuen Endpunkte auf einer Ellipse.* Hierauf beruht eine einfache, meist erst Ph. DE LA HIRE (1685) zugeschriebene planimetrische Konstruktion der Ellipse $k(a, b)$ aus ihren beiden Scheitelpunkten $k_1(M, a)$, $k_2(M, b)$ gemäß Abb. 40.

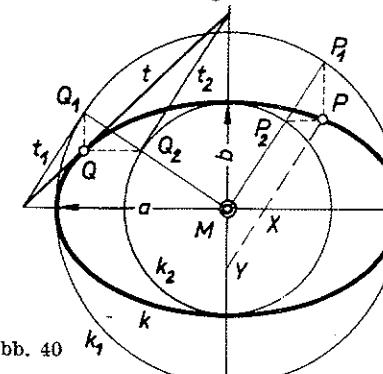


Abb. 40

Aus der Beziehung zwischen der Ellipse k und ihrem Nebenscheitelkreis k_2 erkennt man leicht die Ergänzung des obigen Satzes: *Werden alle zu einem Durchmesser normalen Sehnen eines Kreises vom Halbierungspunkt ausgehend in einem festen Verhältnis verlängert, so liegen die neuen Endpunkte auf einer Ellipse.*

Zieht man in Abb. 40 durch einen Ellipsenpunkt P die Parallele zum entsprechenden Radius MP_1 des Scheitelpunktes k_1 , so schneidet sie die Hauptachse in einem Punkt X und die Nebenachse in einem Punkt Y , so daß $\overline{YP} = a$, $\overline{XP} = b$. Die Konstanz dieser Strecken liegt dem schon PROCLUS DIADOCHUS (410–485) bekannten *Ellipsenzirkel* zugrunde, bei welchem zwei (verstellbare) Punkte X, Y eines Stabes mittels Gleitsteinen in zwei rechtwinkligen Schienen geführt werden; jeder mit X, Y in einer Linie liegende Punkt P des Stabes, wo ein Schreibstift (gleichfalls verstellbar) vorzusehen ist, beschreibt dabei eine Ellipse, deren Achsen mit jenen des Schienensystems zusammenfallen¹.

Als Improvisation eines solchen Ellipsenzirkels ist die empfehlenswerte „Papierstreifenkonstruktion“ der Ellipse aufzufassen: Auf der geraden Kante eines Papierstreifens werden drei Marken X, Y, P in den Entfernung $\overline{YP} = a$, $\overline{XP} = b$ angebracht²; wird X auf die Hauptachse, Y auf die Nebenachse der zu zeichnenden Ellipse gelegt, so kann mit der Bleistiftspitze bei P ein Ellipsenpunkt markiert werden (Abb. 41).

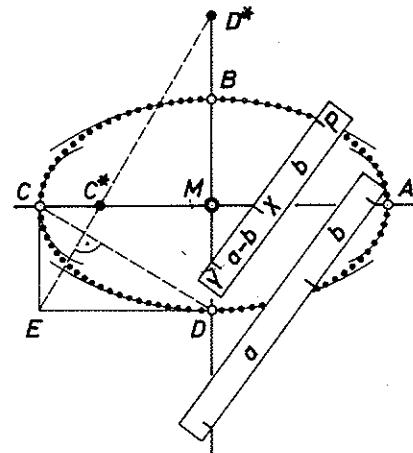


Abb. 41

¹ Auch wenn der Punkt P neben der Geraden XY befestigt ist, beschreibt er eine Ellipse; ihre Achsen sind dann allerdings von jenen des Schienensystems verschieden.

² Die Marken können auch in der Reihenfolge X, P, Y angebracht werden.

Die Umkehrung der Papierstreifenkonstruktion dient dazu, aus der bekannten Hauptachse $\overline{AC} = 2a$ und einem zusätzlichen Ellipsenpunkt P die fehlende Nebenachse $2b$ zu ermitteln: Ein Zirkelschlag um P mit dem Radius a liefert auf der Nebenachse den Führungspunkt Y , dessen Verbindung mit P auf der Hauptachse den Führungspunkt X , und dessen Entfernung von P die Halbachse $\overline{XP} = b$.

Von nicht zu verachtendem Nutzen beim Zeichnen einer Ellipse sind ihre *Scheitelkrümmungskreise*, deren Mittelpunkte nach folgender Vorschrift zu finden sind (Abb. 41): Zwei Halbachsenstrecken MC, MD werden zu einem Rechteck ergänzt; das Lot aus der vierten Ecke E auf die Diagonale CD schneidet auf den Achsen die zu den Scheiteln C, D gehörigen Krümmungsmittelpunkte C^*, D^* aus (Begründung in § 31). Der Kreis um C^* durch C schmiegt sich der Ellipse bestmöglich an und verläuft ganz im Inneren; entsprechendes gilt für den zum Nebenscheitel D gehörigen Krümmungskreis um D^* , der ganz im Außenbereich der Ellipse verläuft. – Sind die Scheitelkrümmungskreise vorbereitet, so genügen wenige (mittels des Papierstreifens hinzugefügte) Zwischenpunkte, um die klaffenden Lücken zwischen den Krümmungskreisen mit einem Kurvenlineal zu schließen.

18. Kreisdarstellung

Von einem Kreis k seien die Hauptbestimmungsstücke gegeben, also die *Trägerebene* ε (etwa durch ihre Spuren e_1, e_2), der *Mittelpunkt* M (etwa durch seinen Grundriß M') und der *Radius* r (durch seine wahre Länge). Nach Ergänzung des fehlenden Aufrisses M'' gemäß § 10 können die Hauptachsen der Bildellipsen k', k'' parallel zu den Spuren in der Länge $2r$ sofort aufgetragen werden (Abb. 42). Ein solcherart bestimmter Hauptscheitel I' von k' liefert im Aufriß einen Punkt I'' von k'' in gleicher Höhe mit M'' ; nun kann mit Benützung von I'' mittels der umgekehrten Papierstreifenkonstruktion die Nebenachse von k'' ermittelt werden. Der analoge Vorgang, ausgehend von einem Hauptscheitel $2'' \in k''$, führt auf die Nebenachse von k' . – Eine Kontrolle des Bildpaars k', k'' besteht in der Überprüfung des Vorhandenseins gemeinsam berührender Ordner.

Sind für einen zu konstruierenden Kreis die drei Hauptbestimmungsstücke nicht von vornherein bekannt, so müssen dieselben vor allem anderen ermittelt werden. Als Beispiel sei die Aufgabe behandelt, den *Bahnkreis* k darzustellen, den ein vorgelegter Punkt P bei der Rotation um eine gegebene Gerade g beschreibt. Seine *Ebene* ε ist die Normalebene zu g durch P (M3b); sein *Mittelpunkt* M ergibt sich dann als Schnittpunkt von g mit ε (L1); den *Radius* r findet man schließlich in der wahren Länge der Strecke MP (M1a). Die Durchführung dieser Grundaufgaben in

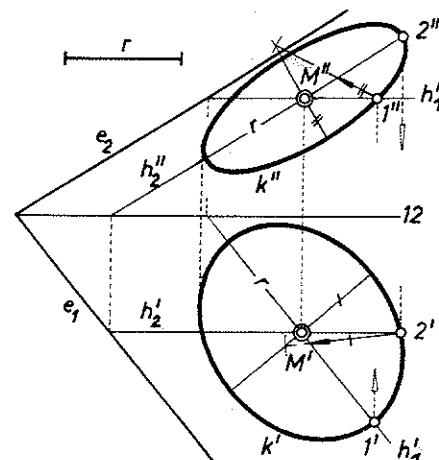


Abb. 42

Auf- und Kreuzriß ist aus Abb. 43 ersichtlich. Die Kreisdarstellung selbst vollzieht sich anschließend nach den bekannten Regeln¹. Die Beurteilung der Sichtbarkeitsverhältnisse erfolgt mit Hilfe von Deckpunkten (§ 11) oder durch Vergegenwärtigen der Lage der Kreisachse g in bezug auf die Bildebenen.

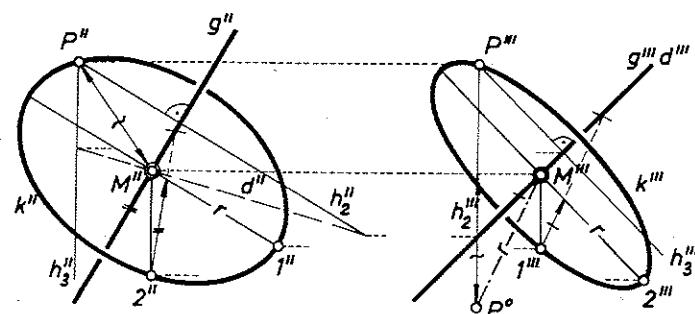


Abb. 43

¹ Die umgekehrte Papierstreifenkonstruktion fällt um so genauer aus, je näher der Hilfspunkt bei einem Nebenscheitel liegt. So wurden in Abb. 43 anstelle der Punkte P'', P''' lieber die Hilfspunkte $1'', 2''$ herangezogen.

19. Darstellung der Kugel

Eine *Kugel* Σ ist erklärt als Ort aller Punkte P des Raumes, die von einem festen Punkt M – dem Mittelpunkt – den gleichen Abstand r (Radius) haben: $\overline{MP} = r = \text{const}$. Aus der Definition folgt unmittelbar die zentrische Symmetrie von Σ bezüglich M , die orthogonale Symmetrie bezüglich jeder durch M gehenden Ebene (Durchmesserebene), und die axiale Symmetrie bezüglich jeder durch M gehenden Geraden (Durchmesser). Die Kugel gestattet ferner die Drehungen um einen beliebigen Durchmesser, ist also auf unendlich viele Arten als *Drehfläche* aufzufassen¹.

Die für die Angabe einer Kugel erforderlichen Bestimmungsstücke sind ihr *Mittelpunkt* und der *Radius*.

Der *Schnitt* einer Kugel $\Sigma(M, r)$ mit einer *Ebene* e umfaßt die Menge aller Punkte $P \in \Sigma$, die in e liegen. Bezeichnet N den Fußpunkt des aus M auf e gefällten Lotes und $e = \overline{MN}$ dessen Länge, so folgt aus dem rechtwinkligen Dreieck MNP für die Entfernung $\overline{NP} = \varrho$:

$$\varrho^2 = r^2 - e^2 = \text{const.}$$

Die Schnittlinie $k = \Sigma e$ ist demnach ein *Kreis* mit dem Mittelpunkt N und dem Radius ϱ . Dieser Radius und damit der Kreis sind nur dann reell und nicht ausgeartet, wenn $e^2 < r^2$, d. h. wenn der Zentralabstand e der Schnittebene kleiner ist als der Kugelradius r . Der Maximalwert des Kreishalbmessers stellt sich für Durchmesserebenen ($e = 0$) mit $\varrho = r$ ein; solche Kreise heißen *Großkreise* der Kugel, während die Kugelkreise mit $\varrho < r$ als *Kleinkreise* bezeichnet werden.

Im Grenzfall $e = r$ schrumpft der Schnittkreis auf den einzigen reellen Punkt $P = N$ zusammen („Nullkreis“), in welchem die Ebene die Kugel berührt: *Die Tangentialebene der Kugel ist normal zum Durchmesser durch den Berührungs punkt*. Sie ist daher nach M3b zu konstruieren.

Bei der Abbildung einer Kugel Σ im *Grundriß* – Ansicht von oben – sind die Oberflächenpunkte der oberen Hälfte sichtbar, jene der unteren Hälfte unsichtbar (P bzw. Q in Abb. 44). Die Grenze zwischen den beiden Gebieten wird von einem Großkreis u_1 gebildet, der in einer waagrechten Ebene liegt, also im Grundriß unverzerrt erscheint (Abb. 44). Diese Sichtbarkeitsgrenze u_1 wird der „*erste wahre Umriß*“ von Σ genannt, sein Bild u'_1 heißt der „*erste scheinbare Umriß*“. Die Punkte von u_1 sind dadurch gekennzeichnet, daß die sie projizierenden Sehstrahlen die Kugel berühren; jeder Umrißpunkt besitzt also eine projizierende Tangentialebene. Denkt man sich die Sehstrahlen durch von oben einfallende *Lichtstrahlen* ersetzt, so bedeutet u_1 die *Eigenschattengrenze*, welche die

¹ Unter dem Begriff „Kugel“ ist hier stets die Kugeloberfläche zu verstehen.

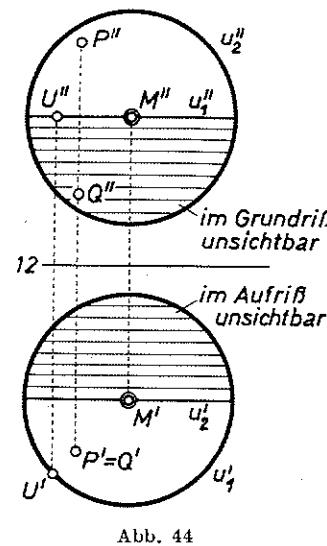


Abb. 44

beleuchtete obere Kugelhälfte von der unteren unbeleuchteten trennt; u'_1 wäre die zugehörige *Schlagschattengrenze*, welche den unbeleuchteten Bereich der als Schirmebene aufgefaßten Grundrißtafel π_1 berandet. – Analog tritt bei der Abbildung der Kugel im Aufriß ein zweiter Umrißkreis u_2 auf, der die sichtbare Vorderhälfte von der unsichtbaren Rückseite trennt (Abb. 44).

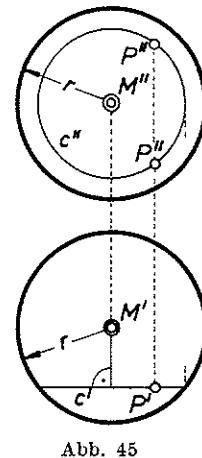


Abb. 45

Die Darstellung einer Kugel $\Sigma(M, r)$ erfolgt mithin durch die beiden (scheinbaren) Umrißkreise $u'_1(M', r)$ und $u''_2(M'', r)$. Reelle Kugelpunkte können ihre Bilder nie außerhalb der Umrißkreise haben.

Die *Vervollständigungsaufgabe* bei der Kugeldarstellung verlangt die Ergänzung des Bildpaars eines Oberflächenpunktes durch die fehlende Komponente. Sei von einem Punkt P der in Abb. 45 in Grund- und Aufriß dargestellten Kugel Σ etwa der Grundriß P' bekannt. Zur Ermittlung des fehlenden Aufrisses P'' lege man durch P eine Hilfsebene $\varepsilon \parallel \pi_2$: Ihr Schnittkreis $c = \varepsilon \Sigma$ erscheint im Aufriß unverzerrt und konzentrisch zum zweiten Umriß, wobei der Radius aus dem Grundriß zu entnehmen ist. Der Ordner durch P' schneidet c'' in den beiden möglichen Aufrisspunkten P'' .

Die Grundaufgabe, die *Schnittpunkte einer Geraden mit einer Kugel* zu konstruieren, ist in Abb. 46 durchgeführt. Die durch die Gerade g legbare

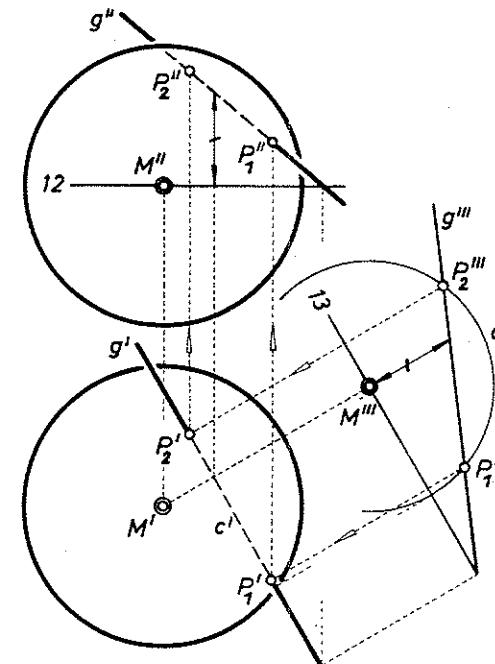


Abb. 46

erstprojizierende Hilfsebene schneidet die Kugel nach einem Kreis c , der die gesuchten Punkte P_1, P_2 trägt. Aus einem parallel zu g' eingeführten Seitenriß, wo g und c unverzerrt erscheinen, können diese Punkte leicht zurückgeführt werden.

20. Darstellung von Kugelkreisen

Der ebene Schnitt einer Kugel – der bereits als *Kreis* erkannt wurde – hat das einfachste Bild in einem Seitenriß normal zu einer Hauptlinie der

Schnittebene ε , weil dieselbe dort projizierend erscheint: In einem solchen Riß bildet sich der Schnittkreis k als Sehnenstrecke k''' des Umrißkreises u_3''' ab (Abb. 47). Aus diesem Riß sind auch der Mittelpunkt N und der

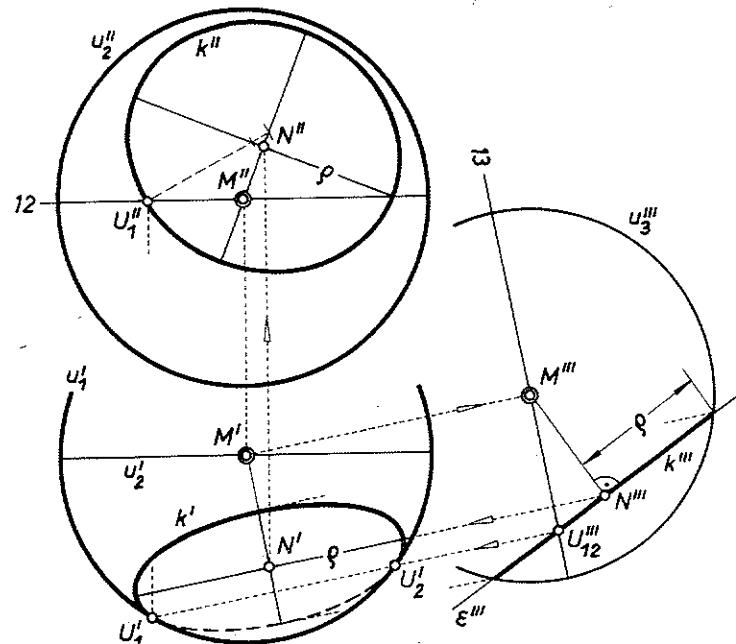


Abb. 47

Radius q von k unmittelbar zu entnehmen, womit die zur Darstellung von k gemäß § 18 benötigten Bestimmungsstücke zur Verfügung stehen.

Im Grundriß erfolgt der Übergang vom sichtbaren zum unsichtbaren Teil des Kreises k an jenen beiden Stellen, wo k den ersten Umrißkreis u_1 schneidet; diese *Umrißpunkte* U_1, U_2 sind ebenfalls aus dem Seitenriß zu entnehmen (Abb. 47). In U_1' und U_2' geht die Grundrißellipse k' an den scheinbaren Umriß u_1' berührend heran, da sie dessen Innengebiet nicht verlassen kann. Solche Umrißpunkte müssen allerdings nicht immer reell vorhanden sein: Im Aufristteil von Abb. 47 sind die Umrißpunkte konjugiert-imaginär, weil k ganz auf der vorderen Kugelhälfte verläuft. Im Grenzfall rücken die beiden Umrißpunkte zusammen; der scheinbare Umriß ist dann ein Scheitelkrümmungskreis der Bildellipse (60° -Breitenkreis in Abb. 48). Für einen Großkreis fallen die beiden Umrißpunkte in die Hauptscheitel der Bildellipse.

Als einfache – allerdings einige Geduld erfordernde – Anwendung zeigt Abb. 48 die Darstellung eines *Globus* mit seinem Netz aus *Meridian-*

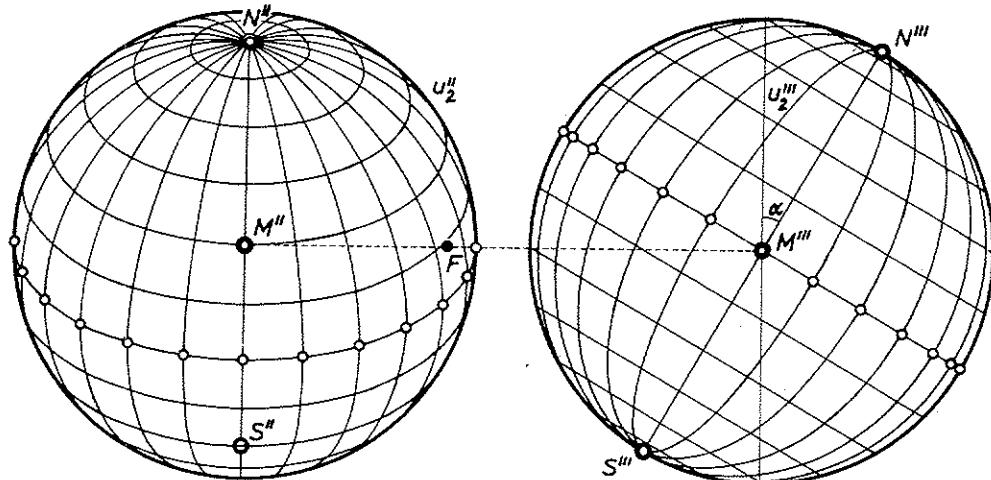


Abb. 48

und Breitenkreisen von 15 zu 15° . Schon DÜRER verstand es, eine solche Darstellung – in der Kartenlehre als „orthographische Projektion“ bezeichnet – richtig zu zeichnen (STABIUS’ Weltkarte 1515). Im Gegensatz dazu enthalten heute leider auch sonst gediegene Werke vielfach falsche Abbildungen des sphärischen Koordinatensystems, entstanden aus dem Wunsch, den Äquator als Ellipse zu sehen, die beiden Pole jedoch auf dem Kugelumriß zu plazieren. Die gleichzeitige Erfüllung beider Wünsche ist aber durch eine Projektion niemals zu erreichen. – Zwischen dem Normalriß des Äquators und den Bildpunkten der beiden Pole besteht übrigens eine einfache Beziehung. Bezeichnet r den Kugelradius und α den Neigungswinkel der Globusachse SN gegen die Bildebene, so hat die Bildellipse des Äquators die Halbachsen $a = r$ und $b = r \cdot \sin \alpha$, während der Polriß N'' den Zentralabstand $M''N'' = e = r \cdot \cos \alpha$ aufweist; dieser stimmt wegen $e^2 = a^2 - b^2$ mit der Exzentrizität der Ellipse überein (§ 23): *Die Bilder des Polpaars gehen mithin aus den Brennpunkten des Äquatorbildes durch Viertelschwenkung hervor*. Aus demselben Grunde liegen die Brennpunkte der Meridianbilder auf einer Ellipse, die durch Viertelschwenkung des Äquatorbildes entsteht.

Als nächstes soll der bei Parallelbeleuchtung auftretende *Eigenschatten* einer Kugel gezeichnet werden. Mit Rücksicht auf die im Zusammenhang mit dem Kugelumriß in § 19 gemachte Bemerkung handelt es sich um jenen Großkreis k , dessen Ebene normal zur Lichtrichtung l ist (M3b). Kommt das Licht wie in Abb. 49 von hinten („Gegenlicht“), so erscheint

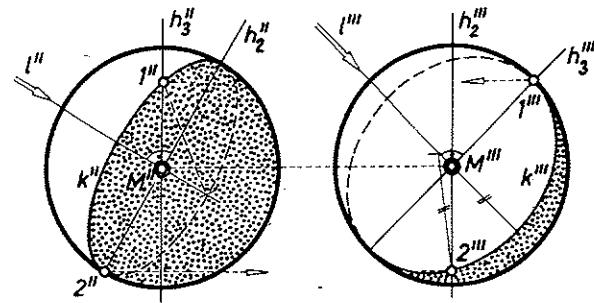


Abb. 49

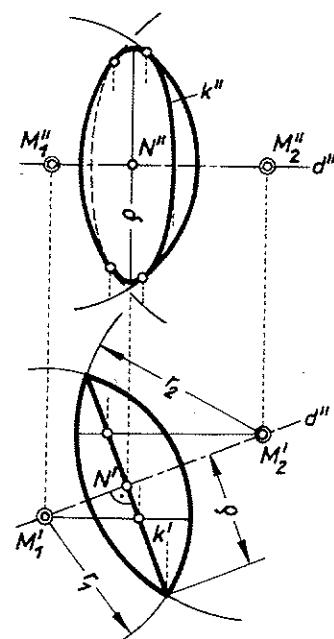


Abb. 50

im Aufriß nur ein schmales beleuchtetes Gebiet, welches die Entstehung der *Mondsichel* erklärt.

Abschließend sei an Hand des Linsenkörpers in Abb. 50 noch der Schnitt zweier Kugeln $\Sigma_1(M_1, r_1)$, $\Sigma_2(M_2, r_2)$ betrachtet. Wegen der Rotationssymmetrie bezüglich des gemeinsamen Durchmessers $d = M_1M_2$ gestattet auch die Schnittlinie $k = \Sigma_1 \Sigma_2$ die Drehung um d , ist also ein Kreis. Dieser fällt allerdings nur dann reell aus, wenn der Zentralabstand $\overline{M_1M_2} = e$ der Ungleichung $|r_1 - r_2| < e < r_1 + r_2$ genügt. Die Trägerebene von k ist normal zu d , der Mittelpunkt N liegt auf d . Die Konstruktion von k stützt sich auf einen Riß, in welchem die Strecke M_1M_2 unverkürzt erscheint (Grundriß in Abb. 50, sonst ein Seitenriß parallel zu M_1M_2); von dort sind die Hauptbestimmungsstücke von k unmittelbar zu entnehmen.

21. Sphärische Dreiecke

Auf der Kugeloberfläche verläuft der *kürzeste Weg* zwischen zwei Punkten längs eines *Großkreisbogens*, der eindeutig bestimmt ist, sofern die Punkte nicht Antipoden sind. Auf der Kugel spielen mithin die Großkreise eine ähnliche Rolle wie die Geraden in der Ebene: Sie sind ihre „geodätischen Linien“.

Drei Punkte A, B, C einer Kugel Ω , die nicht in einer Durchmesser-ebene liegen, bestimmen durch ihre kürzesten Verbindungen ein gewöhnliches (EULERSCHES) sphärisches Dreieck ABC . Die Bögen $BC = a$, $CA = b$, $AB = c$ heißen die *Seiten* des Dreiecks; ihre Längen stimmen mit dem Bogenmaß der Zentriwinkel BOC , COA , AOB überein, wenn der Kugelradius zur Längeneinheit erklärt wird („Einheitskugel“). Als *Winkel* des Dreiecks werden die im Sinne des Umlaufs ABC gemessenen Winkel $BAC = \alpha$, $CBA = \beta$, $ACB = \gamma$ zwischen den Seiten bezeichnet; streng genommen werden sie von den Großkreistangenten in den Ecken gebildet. Seiten und Winkel eines gewöhnlichen Kugeldreiecks liegen durchwegs zwischen 0 und π (unter Ausschluß der Grenzen). Ferner gilt:

$$0 < a + b + c < 2\pi, \quad \pi < \alpha + \beta + \gamma < 3\pi. \quad (21.1)$$

Durch drei der angeführten sechs Stücke ist ein Kugeldreieck bestimmt. Es gibt hier – von Permutationen abgesehen – *sechs Grundaufgaben*, gekennzeichnet etwa durch die folgenden Angabetripel: a, b, c ; a, b, γ ; a, b, α ; α, β, a ; α, β, c ; α, β, γ . Zur *konstruktiven Lösung* dieser Grundaufgaben auf darstellend-geometrischem Wege legt man entweder eine Seite in die Zeichenebene oder eine Ecke in einen Endpunkt des zur Bildebene normalen Kugeldurchmessers. Im wesentlichen geht es um die

Konstruktion des Dreikants OA, OB, OC , dessen Kanten die Winkel a, b, c und dessen Seitenflächen die Winkel α, β, γ einschließen.

Die erste Grundaufgabe – Auflösung eines sphärischen Dreiecks aus den gegebenen Seiten a, b, c – zeigt Abb. 51. Auf dem in der Grundrißebene π_1

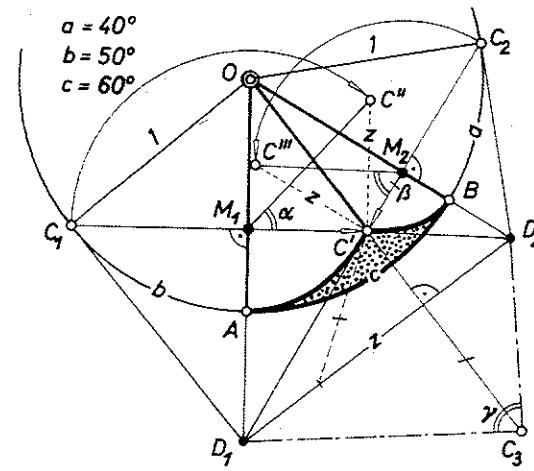


Abb. 51

angenommenen Großkreis der Einheitskugel Ω werden hintereinander die bekannten Bögen $C_1A = b$, $AB = c$ und $BC_2 = a$ aufgetragen. Die fehlende Ecke C findet man, indem man die Punkte C_1, C_2 so weit um die Achsen OA bzw. OB dreht, bis sie sich in einem Punkt – eben C – vereinigen. Da die beiden Bahnkreise im Grundriß als achsennormale Strecken erscheinen, ist diese Operation leicht auszuführen. Durch Umklappen dieser Drehkreisbögen in die Bildebene (in Abb. 50 als Auf- und Seitenriß gedeutet) erhält man die Dreieckswinkel α und β sowie die Höhenkote z von C . Werden bei den ausgeführten Drehungen $C_1 \rightarrow C$ und $C_2 \rightarrow C$ die Kreistangenten C_1D_1 bzw. C_2D_2 mitgenommen, wobei D_1 und D_2 ihre Fixpunkte auf den Drehachsen bedeuten, so gelangt man zu jenen Kugeltangenten CD_1 und CD_2 , die den dritten Dreieckswinkel γ einschließen. Seine wahre Größe ergibt sich durch Umklappung des ebenen Dreiecks CD_1D_2 nach $C_3D_1D_2$ in π_1 um die Spur D_1D_2 ($M2a$); zur Kontrolle muß $\overline{D_1C_3} = \overline{D_1C_1}$ und $\overline{D_2C_3} = \overline{D_2C_2}$ sein.

Mit Hilfe der Drehkreisradien $\sin b$, $\sin a$ und der Drehwinkel α, β findet man für die Höhenkote von C den Wert $z = \sin b \sin \alpha = \sin a \sin \beta$. Hieraus folgt dann der grundlegende *Sinussatz* der sphärischen Trigonometrie:

$$\frac{\sin a}{\sin \alpha} = \frac{\sin b}{\sin \beta} = \frac{\sin c}{\sin \gamma}. \quad (21.2)$$

Faßt man ferner in Abb. 51 die Strecke OM_2 als Normalprojektion des Rechtwinkelhakens OM_1C' auf, so gelangt man zum *Seiten-Kosinussatz*:

$$\cos a = \cos b \cos c + \sin b \sin c \cos \alpha. \quad (21.3)$$

Die zweite Grundaufgabe soll in folgender Einkleidung behandelt werden: Zwischen zwei durch ihre geographischen Koordinaten λ (Länge) und φ (Breite) festgelegten Orten $A(\lambda_1, \varphi_1)$ und $B(\lambda_2, \varphi_2)$ ist die kürzeste Flugroute samt dem Abflugkurswinkel α in A zu ermitteln¹. Die Aufgabe

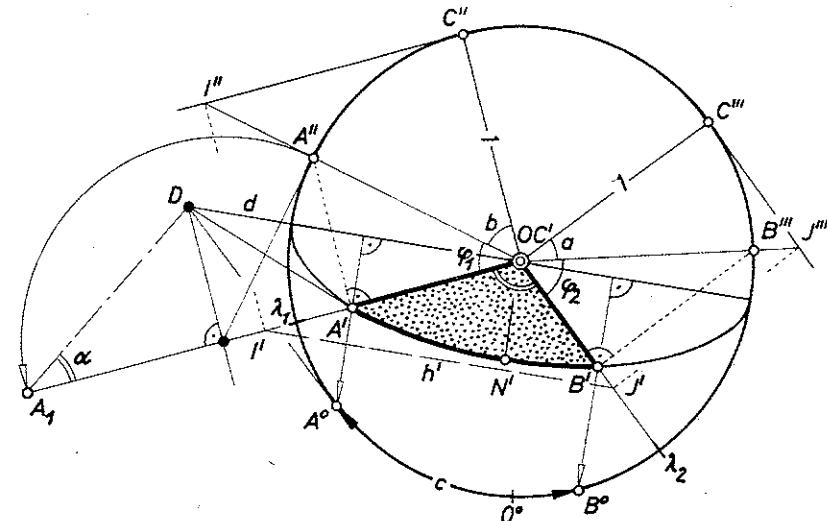


Abb. 52

läuft auf die Auflösung des durch A, B und den Nordpol C bestimmten Kugeldreiecks hinaus, von welchem die Stücke $a = 90^\circ - \varphi_2$, $b = 90^\circ - \varphi_1$, $\gamma = |\lambda_2 - \lambda_1|$ bekannt sind. Unter Verwendung der Äquatorebene als Zeichenebene (Grundriß) sucht man zunächst durch Umklappen der Meridiankreise von A bzw. B die Bildpaare A', A'' bzw. B', B'' dieser Punkte auf (Abb. 52). Die bei dieser Gelegenheit zusätzlich bestimmten Schnittpunkte I, J der Durchmesser OA, OB mit der (waagrechten) Tangentialebene von C liefern in ihrer Verbindung eine 1. Hauptlinie h .

¹ Dem Illustrationsbeispiel Abb. 52 liegt die Annahme $A = \text{New York } (\lambda_1 = -74^\circ, \varphi_1 = 41^\circ)$, $B = \text{Moskau } (\lambda_2 = 38^\circ, \varphi_2 = 56^\circ)$ zugrunde.

der Ebene OAB . Die Umklappung dieser Ebene um den Durchmesser $d \parallel h$ bringt den Bogen $AB = c$ nach A^0B^0 auf den Äquator, wo die Flugstrecke c ausgemessen werden kann ($\text{arc } c = \text{Flugstrecke in Erdradien}$). Der von der Nordrichtung aus gezählte Kurswinkel $\alpha = CAB$ wird wieder durch Umklappen der Tangentialebene von A ($A \rightarrow A_1$) mit Benützung des Fixpunktes D gefunden. Analog wäre der Ankunfts kurs β in B oder der Kurs an jeder anderen Stelle des Weges zu konstruieren. Insbesondere gehört der nördlichste Punkt N der Route zum Nebenscheitel N' der Bildellipse des A und B verbindenden Großkreises.

Die dritte Grundaufgabe – Auflösung des Kugeldreiecks aus a, b, α – setzt wieder voraus, daß die Seite $AB = c$ auf dem in der Grundrißebene π_1 befindlichen Großkreis der Kugel Ω liegt. Nach Annahme von A kann von dort aus in der unter dem Winkel α ansteigenden Durchmesserebene der Großkreisbogen $AC = b$ aufgetragen werden; in Abb. 53

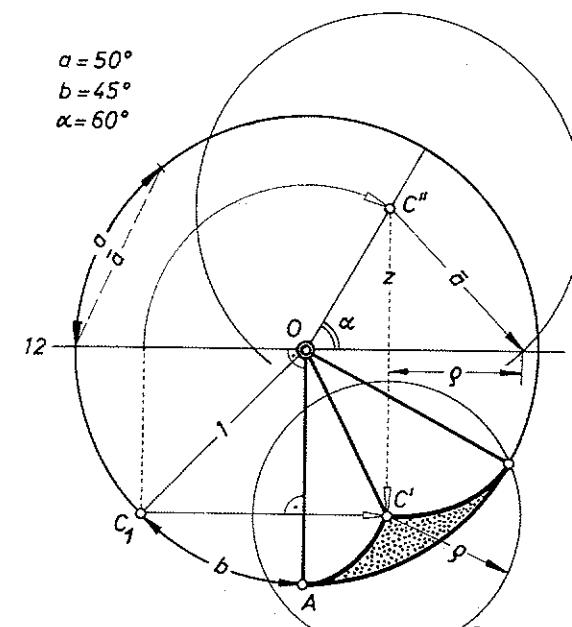


Abb. 53

geschah dies mittels der Umklappung $C \rightarrow C_1$ um OA . Die fehlende Ecke B hat nun von C die sphärische Entfernung a , also einen bekannten Abstand $\overline{CB} = \bar{a}$, der sich als Sehne zum Großkreisbogen a leicht angeben lässt. B liegt demnach auf einer Hilfskugel $\Sigma(C, \bar{a})$, deren erster

Spurkreis $s = \Sigma \pi_1$ auf dem Äquator von Ω den gesuchten Punkt B ausschneidet. Die Lösung ist eindeutig, wenn (wie in Abb. 53) $b \leq a < \pi - b$, sonst zweideutig (u.U. imaginär). – Die fehlenden Winkel β, γ wären wie in Abb. 51 zu finden.

Die restlichen drei Grundaufgaben sind durch folgenden Gedanken auf die bereits erledigten zurückzuführen: Bezeichne C^* jenen Endpunkt des zu OAB senkrechten Kugeldurchmessers, aus welchem die Drehung $A \rightarrow B$ im Gegenuhrzeigersinn erscheint¹; analog sind A^* und B^* erklärt. Das so definierte Kugeldreieck $A^*B^*C^*$ heißt „polar“ zum Dreieck ABC . Die polaren Dreikante $OABC$ und $OA^*B^*C^*$ sind so angeordnet, daß wechselseitig die Kanten des einen zu den Seitenflächen des anderen normal sind (Abb. 54). Zwischen den Seiten und Winkeln der

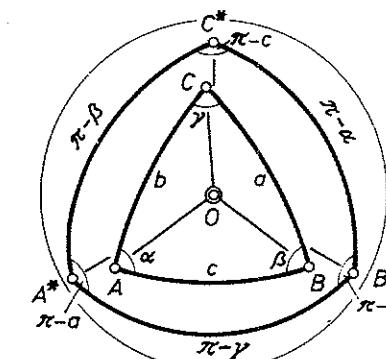


Abb. 54

polaren Kugeldreiecke $ABC, A^*B^*C^*$ bestehen daher die Beziehungen:

$$\begin{aligned} a + \alpha^* &= a^* + \alpha = \pi, & b + \beta^* &= b^* + \beta = \pi, \\ c + \gamma^* &= c^* + \gamma = \pi. \end{aligned} \quad (21.4)$$

Demzufolge läßt sich etwa die vierte Grundaufgabe – Auflösung eines Dreiecks aus α, β, a – durch Auflösung des Polardreiecks aus a^*, b^*, α^* zurückführen auf die dritte. Ebenso stehen einander die Grundaufgaben 1 und 6 sowie 2 und 5 dual gegenüber. – Durch Übergang zum Polardreieck erhält man insbesondere aus dem Seiten-Kosinussatz (21.3) – unter Weglassung der Sternchen – den dazu dualen Winkel-Kosinussatz:

$$\cos \alpha = -\cos \beta \cos \gamma + \sin \beta \sin \gamma \cos a. \quad (21.5)$$

¹ C^* liegt zum Großkreis AB ebenso, wie der Nordpol zu dem von West nach Ost orientierten Äquator.

22. Schrägriß des Kreises

Sei $k(M, r)$ ein Kreis in der Ebene ε und bezeichne k' seine Parallelprojektion in der Richtung l auf eine Bildebene π (Abb. 55). Auf Grund

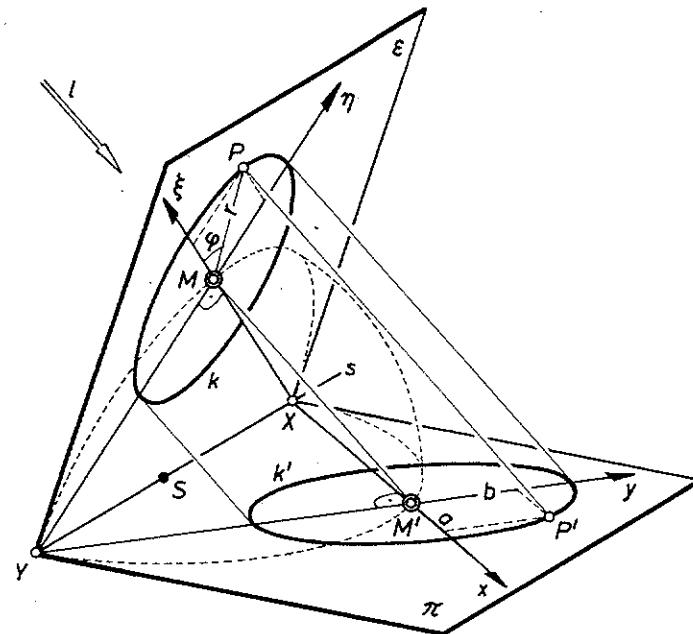


Abb. 55

der Teilverhältnistreue der Parallelprojektion (§ 6) ist k' eine zum Bildpunkt M' von M zentrisch-symmetrische Linie. Um ihre Art zu klären, denke man sich die Symmetralebene σ von MM' – das ist die im Halbierungspunkt von MM' errichtete Normalebene auf MM' (M3b) – mit der Spurgeraden $s = \varepsilon \pi$ geschnitten (L1). Der so gewonnene Punkt $S = s \sigma$ hat von M und M' gleiche Entfernung¹. Durch Auftragen dieser Entfernung von S aus auf s (M1b) erhält man zwei Punkte X, Y , deren Verbindungen mit M ebenso wie ihre Verbindungen mit M' je einen rechten Winkel bilden; M und M' liegen ja auf einer Kugel über dem Durchmesser XY .²

Führt man nun in ε ein kartesisches Koordinatensystem ξ, η mit dem Ursprung M , ein, dessen Achsen durch X bzw. Y gehen, so hat ein be-

¹ Sollte σ durch s gehen, so wähle man $S \in s$ beliebig.

² Sollte $\sigma \parallel s$ sein, so artet die Kugel in eine Ebene aus; X rückt dann mit S in den Fernpunkt von s , während Y in den gemeinsamen Fußpunkt der beiden Lote aus M und M' auf s fällt.

liebiger Punkt $P \in k$ die Koordinaten

$$\xi = r \cdot \cos \varphi, \quad \eta = r \cdot \sin \varphi, \quad (22.1)$$

wobei $\varphi = \angle \xi MP$. Der zugehörige Bildpunkt $P' \in k'$ hat in dem entsprechenden Normalkoordinatensystem x, y in π , dessen Ursprung M' ist und dessen Achsen gleichfalls durch X bzw. Y gehen, die Koordinaten

$$x = \alpha \xi, \quad y = \beta \eta, \quad (22.2)$$

wobei $\alpha = \overline{XM'} : \overline{XM}$ und $\beta = \overline{YM'} : \overline{YM}$ die Verzerrungsfaktoren bedeuten, mit welchen sich alle ξ - bzw. η -Koordinaten bei der Parallelprojektion multiplizieren¹. Aus (22.1) und (22.2) folgt dann

$$x = a \cdot \cos \varphi, \quad y = b \cdot \sin \varphi \quad \text{mit } a = \alpha r, \quad b = \beta r. \quad (22.3)$$

Elimination von φ führt schließlich auf die kartesische Gleichung

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \quad (22.4)$$

der Bildkurve k' , die damit als *Ellipse* zu erkennen ist. Demnach gilt:
Die Parallelprojektion eines Kreises ist im allgemeinen eine Ellipse.

Irgendzwei *orthogonale Durchmesser* eines Kreises sind dadurch gekennzeichnet, daß die Tangenten in den Endpunkten des einen parallel zum anderen sind. Die durch Parallelprojektion daraus hervorgehenden Durchmesser der Bildellipse sind im allgemeinen nicht mehr orthogonal, besitzen jedoch infolge der Parallelentreue noch immer die Eigenschaft, daß die Tangenten in den Endpunkten des einen parallel zum anderen sind (Abb. 56). Solche Durchmesserpaare einer Ellipse heißen „konjugiert“.

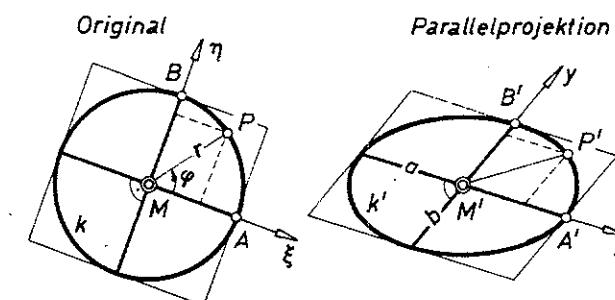


Abb. 56

Zu jedem Ellipsendurchmesser gibt es genau einen konjugierten, und die Beziehung ist eine wechselseitige. Insbesondere sind auch die beiden Achsen der Ellipse konjugiert.

¹ In dem in Fußnote 2 erwähnten Grenzfall ist $\alpha = 1$.

Macht man ein beliebiges Paar normaler Kreisdurchmesser zu Koordinatenachsen, so hat die Kreisgleichung wieder die Gestalt (22.1). In dem entsprechenden Koordinatensystem x, y der Bildebene, das im allgemeinen ein schiefwinkelges sein wird, wird die Bildellipse aus denselben Gründen wie vorhin wieder durch ein Gleichungspaar der Form (22.3) beschrieben; a und b bedeuten jetzt konjugierte Halbmesser (Abb. 56). Da umgekehrt irgendzwei von einem Punkt ausgehende Strecken $M'A'$, $M'B'$ der Bildebene stets als Parallelprojektion orthogonaler Kreishalbmesser MA , MB aufgefaßt werden können – man mache etwa $M = M'$, $A = A'$ und wähle $MB \perp MA$ –, so gilt: *Auch in schiefwinkeligen Koordinaten stellt das Gleichungspaar $x = a \cos \varphi$, $y = b \sin \varphi$ mit veränderlichem φ eine Ellipse dar.*

Hieraus folgt dann sofort: *Jede nicht ausgeartete Parallelprojektion einer Ellipse ist wieder eine Ellipse.* Man braucht ja nur die gegebene Ellipse k auf konjugierte Durchmesser ξ, η zu beziehen. Aus der Darstellung

$$\xi = a \cdot \cos \varphi, \quad \eta = b \cdot \sin \varphi \quad (22.5)$$

folgt dann über die Verzerrungsgleichungen (22.2) unmittelbar die analoge Darstellung der Bildkurve k' .

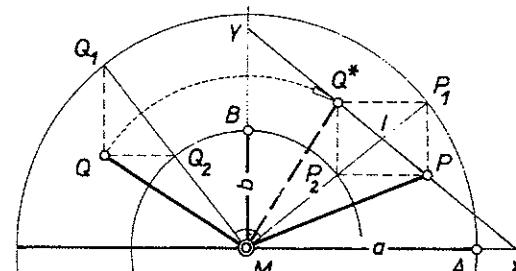


Abb. 57

Nach allem besteht nun das Bedürfnis, eine *Ellipse aus zwei konjugierten Durchmessern* (oder Halbmessern) konstruieren zu können. Hierzu wird meist die sogenannte Rytzsche *Achsenkonstruktion* herangezogen. Zur Ableitung gehe man von der Ellipsenkonstruktion nach DE LA HIRE aus (Abb. 40). Da diese auf der Normalprojektion eines Kreises beruht (§ 17), so liefert sie konjugierte Halbmesser MP , MQ aus normalen Scheitelkreisradien MP_1 , MQ_1 (Abb. 57). Die Viertelschwenkung um M , die Q_1 nach P_1 und Q_2 nach P_2 bringt, führt die Strecke MQ in die nor-

male Lage MQ^* über. Das Viereck $PP_1Q^*P_2$ ist also ein achsenparalleles Rechteck, dessen verlängerte Diagonale PQ^* die Ellipsenachsen in X , Y schneidet und mit ihnen die gleichen Winkel bildet wie die zweite Diagonale P_1P_2 . Hieraus folgen die Streckengleichheiten $\overline{YP} = \overline{MP_1} = a$ und $\overline{XP} = \overline{MP_2} = b$, und weiterhin für den Rechteckmittelpunkt I : $\overline{IX} = \overline{IM} = \overline{IY}$. Dies ist der Schlüssel zu der in Abb. 58 wiedergegebenen „Achsenkonstruktion“ des Schweizers D. RYTZ (1845).

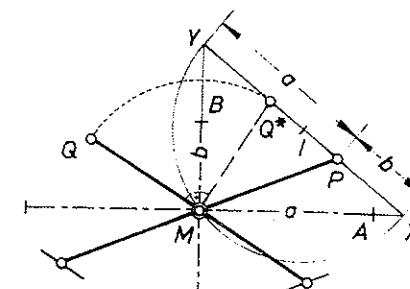


Abb. 58

Im übrigen gibt es eine *verallgemeinerte Papierstreifenkonstruktion*, welche eine durch konjugierte Halbmesser MP , MQ gegebene Ellipse ohne Verwendung der Achsen zu zeichnen gestattet und erstmals wohl von C. RODENBERG¹ angegeben worden ist (Abb. 59): Man fällt zunächst

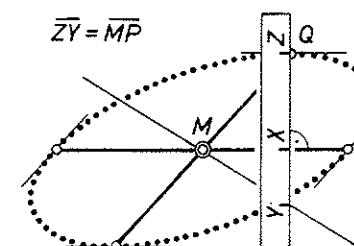


Abb. 59

das Lot aus Q auf MP und markiert die Endpunkte der Lotstrecke auf der geraden Kante eines Papierstreifens in Z und X ; ferner wird noch eine Marke Y in der Entfernung $\overline{ZY} = \overline{MP}$ angebracht und in der (zu MP normalen) Ausgangslage mit M verbunden. Wandert dann Y auf dieser Geraden und X auf dem Durchmesser MP , so beschreibt Z die gewünschte Ellipse.

¹ Z. Math. Phys. 29 (1884), 255.

IV. KEGELSCHNITTE

23. Ellipse als Zylinderschnitt

Legt man durch alle Punkte eines Kreises c Geraden einer festen Richtung, die nicht zur Kreisebene parallel ist, so entsteht ein *Kreiszylinder*; c heißt seine *Basis*, die ihn aufbauenden Geraden werden seine *Erzeugenden* genannt. Insbesondere liegt ein aufrechter Kreiszylinder oder *Drehzylinder* vor, wenn die Erzeugenden zur Kreisebene normal sind; ein solcher Zylinder entsteht auch durch Rotation einer Geraden um eine zu ihr parallele Achse. – Zylinder sind hier immer unbegrenzt vorzustellen.

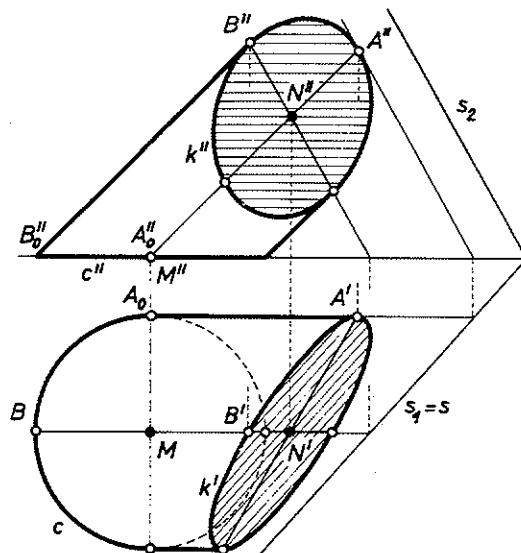


Abb. 60

Eine Ebene ε , die zur Erzeugendenrichtung parallel ist, schneidet den Kreiszylinder nach zwei Erzeugenden, deren Basispunkte auf c und der Basisspur von ε liegen. Sie können reell und getrennt, konjugiert-imaginär oder zusammengerückt ausfallen. Im letzten Fall ist die Basisspur von ε eine Tangente von c und ε eine *Tangentialebene* des Zylinders, den sie längs einer Erzeugenden berührt. Der *Umriß* eines Kreiszylinders wird dementsprechend von zwei Erzeugenden gebildet, für welche die Tangentialebenen projizierend sind.

Jede andere Ebene σ schneidet den Kreiszylinder nach einer Linie k , die als Parallelprojektion des Basiskreises c in Erzeugendenrichtung auf σ aufgefaßt werden kann, also gemäß § 22 eine *Ellipse* ist (Grenzfall des Kreises eingeschlossen): *Die ebenen Schrägschnitte des Kreiszylinders sind Ellipsen.* – Um eine solche Schnittellipse k punktweise zu konstruieren, bringe man einzelne Erzeugende des Zylinders mit der Ebene σ zum Durchstoß (L1). Geht man hierbei insbesondere von den Endpunkten zweier orthogonalen Durchmesser des Basiskreises c aus, so gelangt man zu den Endpunkten konjugierter Durchmesser von k (Abb. 60). Die Umrißerzeugenden führen auf die Umrißpunkte von k .

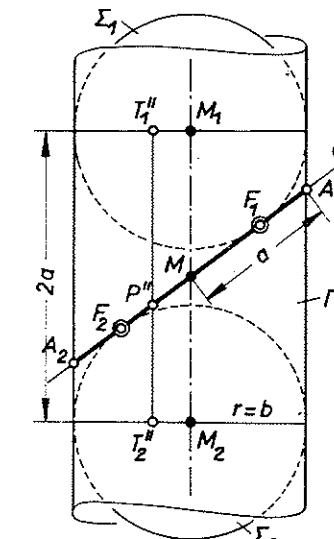


Abb. 61

Sei jetzt Γ ein *Drehzylinder* vom Radius r und k die durch einen Schrägschnitt σ entstandene Ellipse¹. Diesem Zylinder lassen sich nach dem Vorgang des Belgiers J. P. DANDELIN (1822) zwei *Kugeln* $\Sigma_1(M_1, r)$, $\Sigma_2(M_2, r)$, einschreiben, welche die Ebene σ in zwei Punkten F_1 , F_2 der Hauptachse von k berühren (Abb. 61). Der Zentralabstand $M_1 M_2$ sei mit $2a$ bezeichnet. Durch jeden Punkt $P \in k$ geht eine Zylindererzeugende; ihre Treffpunkte mit den Berührungs Kreisen der Dandelinischen Kugeln seien T_1 und T_2 . Die beiden Strecken PF_1 und PT_1 berühren Σ_1 in F_1 bzw. T_1 und haben daher – wie alle aus einem Punkt an eine Kugel legbaren Tangentenstrecken – gleiche Länge:

¹ In diesem Spezialfall könnte ein einfacher Nachweis der Ellipse k gemäß § 17 auf die Streckung paralleler Kreissehnen in einem festen Verhältnis gegründet werden.

$$\overline{PF_1} = \overline{PT_1}, \text{ analog } \overline{PF_2} = \overline{PT_2}. \quad (23.1)$$

Addition dieser beiden Gleichungen liefert (für alle $P \in k$) die Beziehung

$$\overline{PF_1} + \overline{PF_2} = \overline{PT_1} + \overline{PT_2} = \overline{T_1T_2} = \overline{M_1M_2} = 2a = \text{const.} \quad (23.2)$$

Es gilt daher: *Für alle Punkte einer Ellipse ist die Summe der Entfernungen von zwei bestimmten, festen Punkten der Hauptachse konstant.*

Diese Festpunkte F_1, F_2 heißen die *Brennpunkte* der Ellipse; sie liegen zufolge Abb. 61 spiegelbildlich zum Mittelpunkt M . Fällt P in den Hauptscheitel A_1 (Abb. 62), so lehrt (23.2) mit $\overline{A_1F_1} + \overline{A_1F_2} = 2a$ und $\overline{A_1F_1} =$

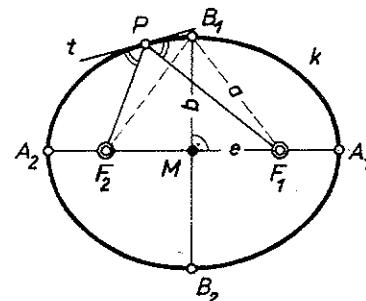


Abb. 62

$= \overline{F_2A_2}$, daß die konstante *Entfernungssumme* $2a$ mit der *Hauptachse* $\overline{A_1A_2}$ übereinstimmt. Rückt P hingegen in einen Nebenscheitel, etwa B_1 , so ergibt sich $\overline{B_1F_1} = \overline{B_1F_2} = a$, was die Brennpunkte bei Kenntnis der Scheitel leicht zu finden gestattet. Zwischen den Halbachsen a, b und der Exzentrizität $\overline{MF_1} = \overline{MF_2} = e$ besteht die Beziehung

$$a^2 - b^2 = e^2. \quad (23.3)$$

Da, wie ein Blick auf Abb. 61 bestätigt, beim Durchlaufen der Ellipse alle möglichen Zerlegungen der Summe (23.2) innerhalb eines gewissen Bereiches auftreten, so gilt auch die *Umkehrung: Der Ort aller Punkte der Ebene, welche von zwei festen Punkten eine konstante Entfernungssumme haben, ist eine Ellipse*. Auf dieser Brennpunkts- oder Fokaleigenschaft der Ellipse beruht ihre sogenannte „*Gärtnerkonstruktion*“, die schon bei APOLLONIOS von Pergae (262–190 v. Chr.) vorkommt: Sie benutzt zur Führung eines Fahrstiftes P eine zwischen zwei Pföcken F_1, F_2 gespannte Schnur der Länge $2a > \overline{F_1F_2}$.

¹ Die damit verwandte Schulkonstruktion der Ellipse mittels Zirkelschlägen um F_1 und F_2 , deren Öffnungen sich auf $2a$ ergänzen, ist für den praktischen Gebrauch nicht zu empfehlen; die Papierstreifenkonstruktion (Abb. 41) ist bequemer und genauer.

Die *Tangente* t im Ellipsenpunkt P gehört einerseits der Schnittebene σ an, andererseits auch jener Tangentialebene τ des Zylinders I , die ihn in P und damit längs der Erzeugenden T_1T_2 berührt; t kann demnach als Schnittgerade der Ebenen σ und τ erhalten werden (L2). Nun sind σ und τ Tangentialebenen der Kugel Σ_1 in F_1 bzw. T_1 , so daß ihre Schnittgerade t aus Symmetriegründen gleiche Winkel mit den Strahlen $\overline{PF_1}$ und $\overline{PT_1}$ bildet. Ebenso schließt t gleiche Winkel mit $\overline{PF_2}$ und $\overline{PT_2}$ ein. Weil aber $\overline{PT_1}$ und $\overline{PT_2}$ dieselbe Gerade bezeichnet, so gilt: *Die Ellipsentangente in P bildet mit den Brennstrahlen $\overline{PF_1}$ und $\overline{PF_2}$ gleiche Winkel*. Sie halbiert den Nebenwinkel zu $\overline{F_1PF_2}$ (Abb. 62). – Auf dieser Tangenteneigenschaft beruht die Sammelwirkung eines *elliptischen Hohlspiegels*, der alle von einem Brennpunkt ausgehenden Lichtstrahlen nach Reflexion zum anderen Brennpunkt lenkt. Auch die sagenhaften „Flüstergewölbe“ hängen damit zusammen.

Eine hübsche, kaum mehr bekannte Verallgemeinerung der DANDELINschen Idee entwickelte E. BOBILLIER¹: Werden die Dandelinischen Kugeln durch irgendzwei andere, dem Drehzyylinder I' eingeschriebene Kugeln ersetzt, welche die Ellipsenebene σ nach Kreisen f_1, f_2 schneiden, so gelangt man durch ganz analoge Überlegungen zur Feststellung, daß für alle Ellipsenpunkte P die *Summe oder Differenz der Tangentialentfernungen* $\overline{Pf_1}$ und $\overline{Pf_2}$ *konstant* ist. Hierbei ist zu beachten, daß f_1 und f_2 doppeltberührende Kreise der Ellipse sind; diese Berührung kann in reellen oder konjugiert-imaginären Punkten erfolgen (f_1 bzw. f_2 in Abb. 63), im Grenz-

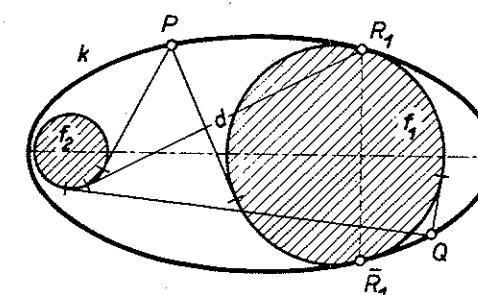


Abb. 63

fall in zusammengerückten Punkten (Scheitelkrümmungskreise). In Abb. 63 gilt für die links bzw. rechts von der Berührungssehne $R_1\bar{R}_1$ befindlichen Punkte P bzw. Q :

$$\overline{Pf_1} + \overline{Pf_2} = \overline{Qf_2} - \overline{Qf_1} = d = \text{const}; \quad (23.4)$$

¹ Quet. Corr. 3 (1827), 270.

d ist dabei der Zentralabstand der beiden Bobillierschen Kugeln. Im DANDELINSCHEN Grenzfall sind die Kreise f_1, f_2 auf die Brennpunkte F_1, F_2 zusammengeschrumpft (Nullkreise).

24. Ellipse als Kegelschnitt

Werden sämtliche Punkte eines Kreises c durch Gerade mit einem festen Punkt S verbunden, der außerhalb der Kreisebene liegt, so entsteht ein *Kreiskegel*. S heißt seine *Spitze* oder sein *Scheitel*, c die *Basis*, und die ihn aufbauenden Geraden werden *Erzeugende* genannt. Insbesondere liegt ein aufrechter Kreiskegel oder *Drehkegel* vor, wenn S auf der Rotationsachse von c liegt; ein solcher Kegel entsteht durch Drehung einer Geraden um eine sie (im Endlichen) schneidende Achse. – Kegel sind hier immer unbegrenzt vorzustellen. Der Kegel wird zu einem Zylinder, wenn die Spitze ins Unendliche rückt.

Eine durch die Kegelspitze S gehende Ebene ε schneidet den Kreiskegel nach zwei Erzeugenden, die reell und getrennt, konjugiert-imaginär oder zusammengerückt ausfallen können, je nach der Lage der Basispur von ε zum Basiskreis c . Im letzten Fall ist die Basispur eine Tangente von c und ε eine *Tangentialebene* des Kegels, den sie längs einer Erzeugenden berührt. Der *Umriß* eines Kreiskegels wird demgemäß von zwei Erzeugenden gebildet, für welche die Tangentialebenen projizierend sind. Aus dem gleichen Umstand tritt auch als Eigenschattengrenze des Kegels ein Erzeugendenpaar auf (Abb. 64).

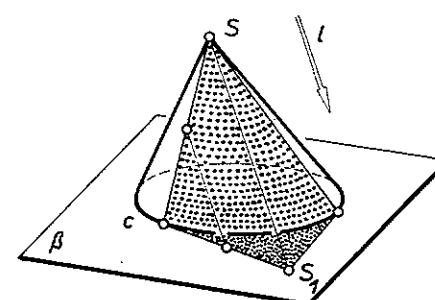


Abb. 64

Sei nun Γ ein *Drehkegel* mit lotrechter Achse, und σ eine *Ebene*, die gegen die Waagrechte flacher ansteigen möge als die Kegelerzeugenden. Wenn sie die Kegelspitze S nicht enthält, so schneidet sie Γ nach einer ganz im Endlichen verlaufenden Kurve k . Für die Untersuchung von k

bedeutet es keine Einschränkung, wenn σ zweitprojizierend vorausgesetzt wird (Abb. 65). Schreibt man mit DANDELIN dem Kegel wieder zwei *Kugeln* Σ_1, Σ_2 ein, welche die Ebene σ in zwei Punkten F_1, F_2 berühren, so kann man für jeden Punkt $P \in \sigma$ ebenso wie in § 23 argumentieren: Die durch P gehende Erzeugende trifft die Berührungsreise von Σ_1 und Σ_2 in den Punkten T_1 und T_2 , und es gilt wegen der gleichen Länge aller aus einem Punkt an eine Kugel legbaren Tangentenstrecken

$$\overline{PF_1} + \overline{PF_2} = \overline{PT_1} + \overline{PT_2} = \overline{T_1T_2} = 2a = \text{const.} \quad (24.1)$$

Dies bedeutet aber mit Rücksicht auf (23.2): *Die Ebene σ schneidet den Drehkegel nach einer Ellipse mit den Brennpunkten F_1, F_2 und der Hauptachse $2a$.*

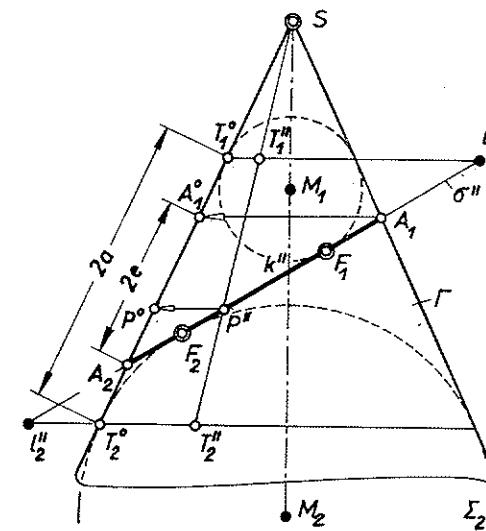


Abb. 65

Werden die Punkte P, T_1, T_2 und der Hauptscheitel A_1 um die Kegelachse auf die linke (im Aufriss unverzerrt erscheinende und den zweiten Hauptscheitel A_2 tragende) Umrißerzeugende hinausgedreht, so erkennt man wegen $\overline{A_1^0 T_1^0} = \overline{A_1 F_1} = \overline{A_2 F_2} = \overline{A_2 T_2^0}$, daß $\overline{A_1^0 A_2} = \overline{F_1 F_2} = 2a$. Bezeichne ferner l_1 die (zweitprojizierende) Schnittgerade von σ mit der Berührkreisebene von Σ_1 . Für den längs einer Falllinie von σ gemessenen Normalabstand $\overline{Pl_1} = \overline{P''l_1''}$ gilt dann auf Grund ähnlicher Dreiecke in Abb. 65

$$\overline{PF_1} : \overline{Pl_1} = \overline{PT_1} : \overline{Pl_1} = \overline{P^0 T_1^0} : \overline{P''l_1''} = \overline{A_1^0 A_2} : \overline{A_1 A_2} = e : a = \epsilon < 1. \quad (24.2)$$

l_1 wird die zum Brennpunkt F_1 gehörige *Leitlinie* der Ellipse k genannt¹. Die dimensionslose Konstante $\varepsilon = e/a$ ist die sogenannte *numerische Exzentrizität* von k ; sie hat für ähnliche Ellipsen denselben Wert, legt also (unabhängig vom Maßstab) die Gestalt der Ellipse fest. Die Proposition (24.2) ist der Ausdruck für den wichtigen Satz des APOLLONIOS: *Für alle Punkte einer Ellipse hat das Verhältnis der Abstände von einem Brennpunkt und der zugehörigen Leitlinie den konstanten Wert $\varepsilon = e/a < 1$.* Offensichtlich gilt auch die Umkehrung: *Der Ort aller Punkte der Ebene, die von einem festen Punkt und einer festen Geraden ein konstantes Abstandsverhältnis $\varepsilon < 1$ haben, ist eine Ellipse.* Die Bedeutung dieses Satzes liegt vor allem darin, daß er – mit anderen Werten von ε – auch für Hyperbel und Parabel besteht (§ 25, § 27).

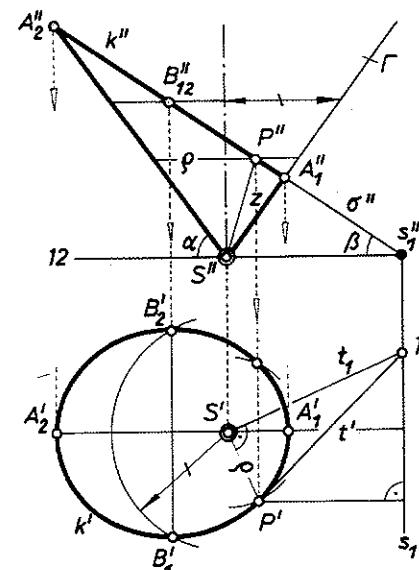


Abb. 66

Um den Ellipsenschnitt eines Drehkegels Γ mit lotrechter Achsenlage im *Grundriß* darzustellen, sucht man zuerst die durch extreme Höhenlage ausgezeichneten Hauptscheitel A_1, A_2 auf (Abb. 66). Die Nebenscheitel B_1, B_2 liegen in halber Höhe und können mittels des sie tragenden Schichtenkreises von Γ gefunden werden. Damit ist die Ellipse k vollständig bestimmt. – Sei P ein beliebiger (gleichfalls, mittels eines Schich-

¹ l_1 ist die Polare von F_1 bezüglich k ; analog gehört zum zweiten Brennpunkt F_2 eine Leitlinie l_2 (Abb. 65).

tenkreises zu konstruierender) Punkt von k , und bezeichne z seine Höhenkote bezüglich der durch die Kegelspitze S gehenden Schichtenebene π_1 , die als *Grundrißebene* gelten kann. Die Entfernung des Punktes P von S bzw. von der Spur $s_1 = \sigma\pi_1$ der Schnittebene σ lassen sich dann mit Hilfe des Neigungswinkels α der Erzeugenden bzw. des Neigungswinkels $\beta < \alpha$ leicht berechnen. Für die *Grundrißprojektionen* dieser Abstandsstrecken gilt:

$$\overline{PS'} : \overline{P's_1} = z \cot \alpha : z \cot \beta = \tan \beta : \tan \alpha = \varepsilon' = \text{const.} \quad (24.3)$$

Mit Rücksicht auf die Apollonische Eigenschaft bedeutet das, daß S' ein *Brennpunkt* und s_1 die zugehörige *Leitlinie* der *Grundrißellipse* k' ist.

Die *Tangente* t von k in P liegt in σ und in jener *Tangentialebene* τ , welche Γ in P , also längs der Erzeugenden SP berührt; t ist mithin als *Schnitt* der Ebenen σ und τ zu erhalten (L2). Da SP Falllinie von τ ist, steht die 1. Spur t_1 von τ in $S = S'$ normal auf $S'P'$ (Abb. 66); die gesuchte Tangente t verbindet demnach P mit dem Spurpunkt $T_1 = s_1 t_1$. Hieraus fließt eine nette *Tangenteneigenschaft* der Ellipse: *Für alle Ellipsentangenten erscheint das Stück zwischen Berührungs punkt und einer Leitlinie vom zugehörigen Brennpunkt aus unter rechtem Winkel.* Dieselbe Eigenschaft kommt übrigens auch den Hyperbel- und Paraltangenten zu.

Wird der Ellipsenschnitt eines Drehkegels mit der Spitze S und dem Basiskreis k_0 in *beliebiger Parallelprojektion* dargestellt, so ergibt sich eine Figur vom Aussehen der Abb. 67.¹ Bedeutet s die Basisspur der

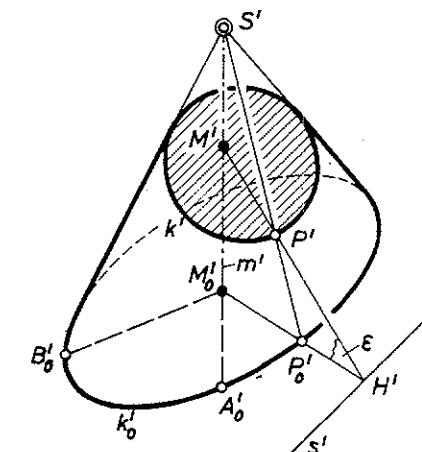


Abb. 67

¹ Der Akzent bezeichnet jetzt die Parallelprojektion.

Schnittebene σ , M_0 den Mittelpunkt von k_0 und M den Durchstoßpunkt der Kegelachse $SM_0 = m$ mit σ , dann kann die Schnittellipse k folgendermaßen punktweise konstruiert werden: Die durch einen beliebigen Punkt $P_0 \in k_0$ gehende Erzeugende SP_0 schneidet σ in einem Punkt $P \in k$ (L1); die zu diesem Zweck geeignete Hilfsebene $\varepsilon = M_0P_0S$ hat die Basisspur M_0P_0 und schneidet σ nach einer Geraden MH , die mit M_0P_0 auf s in $H = es$ zusammentrifft; die Gerade MH liefert also auf SP_0 den gesuchten Punkt P . Diese Konstruktion läßt sich unmittelbar im Bild ausführen (Abb. 67).

Eine vollkommen gleichartige Figur würde sich ergeben, wenn ein *schiefer Kreiskegel* mit einer Ebene zu schneiden wäre, wobei ja dieselbe Methode anwendbar ist. Durch Rückschluß aus der Bild- auf die Raumfigur folgt daher: *Jeder ebene, ganz im Endlichen verlaufende Schnitt eines beliebigen Kreiskegels ist eine Ellipse.*

Zur Stützung dieses Schlusses ist nur noch nachzuweisen, daß jede aus einer Ellipse k' und einem ihrer Durchmesser m' bestehende Figur der Bildebene tatsächlich stets als Parallelprojektion eines Kreises k_0 und seiner Rotationsachse m gedeutet werden kann. Zu diesem Zweck betrachte man zwei konjugierte Halbmesser $M'_0A'_0, M'_0B'_0$ von k_0 , wobei der erste auf m' liegt (Abb. 67). Dann lege man durch m' eine (passende) Ebene α und errichte in $M_0 = M'_0$ die Normale $b \perp \alpha$. Der Fußpunkt des aus B'_0 auf b gefällten Lotes p sei mit B_0 bezeichnet. Die durch A'_0 gelegte Parallele zu p verläuft in α ; einer ihrer Schnittpunkte mit dem um M_0 mit dem Radius M_0B_0 in α geschlagenen Kreis sei A_0 .¹ Der durch die orthogonalen Halbmesser M_0A_0 und M_0B_0 bestimmte Kreis k_0 liefert nun bei Parallelprojektion in Richtung p die vorgelegte Ellipse k'_0 , und da seine Rotationsachse m der Ebene α angehört, fällt ihre Projektion mit $\alpha' = m'$ zusammen, womit die gewünschte Deutbarkeit der Bildfigur (k'_0, m') nachgewiesen ist.

Hinsichtlich der Ermittlung konjugierter Durchmesser der Schnittellipse eines schiefen Kreiskegels siehe § 29.

25. Hyperbelschnitt des Drehkegels

Sei Γ wieder ein *Drehkegel* mit lotrechter Achse, und σ eine *Ebene*, die jetzt *steiler* ansteigen soll als die Kegelerzeugenden. Wenn sie die Kegelspitze S nicht enthält, so schneidet sie Γ nach einer Kurve k , die aus zwei sich ins Unendliche erstreckenden „Ästen“ besteht, welche sich auf die beiden durch S getrennten Kegelhälften verteilen (Abb. 68). Diese Kurve wird *Hyperbel* genannt. – Auch hier gibt es wieder zwei Dandelinische

¹ Die genannten Schnittpunkte fallen sicher reell aus, wenn die Ebene α genügend steil gewählt wird.

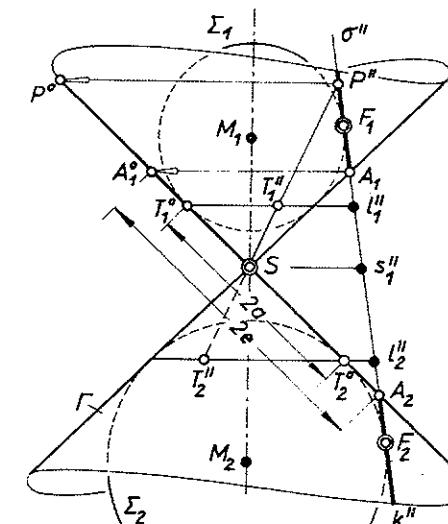


Abb. 68

Kugeln Σ_1, Σ_2 , welche Γ eingeschrieben sind und σ in zwei Punkten F_1, F_2 berühren. Für jeden Punkt $P \in k$ gilt nun auf Grund ähnlicher Überlegungen wie beim Ellipsenschnitt (§ 24):

$$\overline{PF_2} - \overline{PF_1} = \overline{PT_2} - \overline{PT_1} = \pm \overline{T_1T_2} = \pm 2a = \text{const.} \quad (25.1)$$

Das bedeutet: *Die Hyperbel ist der Ort aller Punkte der Ebene, für welche die Abstands differenz von zwei festen Punkten einen konstanten Betrag hat.* Die beiden Vorzeichen in (25.1) entsprechen den beiden Hyperbelästen.

Die Festpunkte F_1, F_2 heißen die *Brennpunkte* der Hyperbel. Von ihnen ausgehend könnten bei gegebener Differenzstrecke $2a$ beliebig viele Hyperbelpunkte mittels Zirkelschlägen um F_1 und F_2 , deren Öffnungen sich um $2a$ unterscheiden, planimetrisch konstruiert werden¹. – Die Verbindungsgerade F_1F_2 ist eine Symmetriechse der Hyperbel („Hauptachse“). Die ihr angehörenden Scheitelpunkte A_1, A_2 von k haben die Entfernung $2a$ (Abb. 69). Auch die Symmetrale der Strecke $\overline{F_1F_2} = 2c$ ist wegen (25.1) eine Spiegelachse („Nebenachse“); die beiden Hyperbeläste sind demnach kongruent. Der Achsenschnittpunkt M („Mittelpunkt“) ist Symmetriezentrum.

Die *Hyperbeltangente* t in P schließt als Schnittgerade von σ und der längs T_1T_2 berührenden Kegeltangentialebene τ aus Symmetriegründen

¹ Zu empfehlen ist diese Schulkonstruktion allerdings nicht; bessere Vorschriften werden in § 26 entwickelt werden.

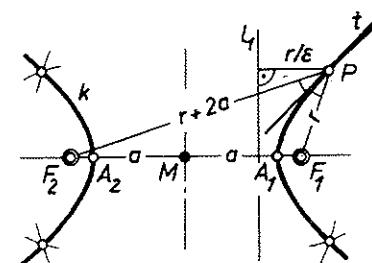


Abb. 69

wieder gleiche Winkel mit den Brennstrahlen PF_1 und PF_2 ein (vgl. § 23); t halbiert diesmal den Winkel F_1PF_2 selbst (Abb. 69).

Die Berührkreisebene der Kugel Σ_1 schneidet die Ebene σ nach einer Geraden l_1 , welche die zum Brennpunkt F_1 gehörige Leitlinie der Hyperbel ist (Abb. 68). Nach dem Muster von (24.2) beweist man über

$$\overline{PF_1} : \overline{Pl_1} = \overline{PT_1} : \overline{Pl_1} = \overline{A_1A_2} : \overline{A_1A_2} = e : a = e > 1 \quad (25.2)$$

die Apollonische Eigenschaft: Für alle Punkte einer Hyperbel hat das Verhältnis der Abstände von einem Brennpunkt und der zugehörigen Leitlinie den konstanten Wert $e = e/a > 1$ (Abb. 69). Die Formzahl e ist für ähnliche Hyperbeln gleich.

Für den bei Abb. 68 leicht zu ergänzenden Grundriß k' leitet man wie in (24.3) die Konstanz des Verhältniswertes $\overline{P'S'} : \overline{P's'_1} = e' > 1$ ab, wobei s'_1 wieder die in der Höhe der Kegelspitze S verlaufende Schichtenlinie der Schnittebene σ bedeutet. Es gilt demnach: Bei lotrechter Achsenlage des Drehkegels ist der Grundriß einer Schnitthyperbel im allgemeinen wieder eine Hyperbel, die einen Brennpunkt im Grundriß der Kegelspitze hat; s'_1 ist die zugehörige Leitlinie. Eine Sonderstellung kommt lediglich dem achsenparallelen Schnitt des Drehkegels zu; hier ist der Grundriß der Schnitthyperbel in eine Gerade ausgeartet.

26. Hyperbelkonstruktionen

Um in einer Ebene σ eine Hyperbel k zu zeichnen, denke man sich durch dieselbe einen passenden Drehkegel Γ mit zu σ paralleler Achse gelegt (Abb. 70, $\sigma = \pi_1$). Die beiden Dandelinischen Kugeln Σ_1, Σ_2 haben dann den gleichen Radius b , der mit der Hauptachse $2a$ und der Exzentrizität e von k durch

$$a^2 + b^2 = e^2 \quad (26.1)$$

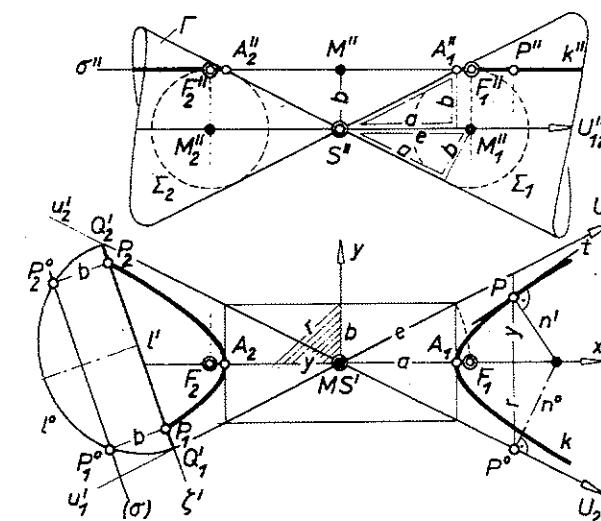


Abb. 70

verknüpft ist, wie aus den in Abb. 70 geränderten, durch Drehung ineinander überführbaren rechtwinkligen Dreiecken hervorgeht.

Die Hyperbel werde nun durch kartesische Koordinaten x, y auf ihre Achsen bezogen (Abb. 70). Für den Radius r des durch den Punkt $P(x, y) \in k$ gehenden Parallelkreises von Γ gilt einerseits

$$r^2 = y^2 + b^2, \quad (26.2)$$

andererseits $r : x = b : a$. Durch Elimination von r erhält man die Hyperbelgleichung

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1. \quad (26.3)$$

Die zur vorgegebenen Abszisse x gehörige Ordinate y findet man gemäß (26.2) zeichnerisch, indem man beim Mittelpunkt M das in Abb. 70 schraffierte rechtwinklige Dreieck mit der bekannten Hypotenuse r und den Katheten b, y aufbaut, was am besten mit dem Stechzirkel geschieht. Diese empfehlenswerte Stechzirkelkonstruktion der Hyperbel ist sparsam und genau¹.

Die bei der Anwendung dieser Konstruktion benötigten Diagonalen des Achsenrechtecks mit den Seiten $2a$ und $2b$ heißen die Asymptoten der

¹ Eine zweite Stechzirkelkonstruktion der Hyperbel bringt § 64.

Hyperbel. Mit zunehmender Entfernung vom Mittelpunkt nähert sich die Hyperbel den Asymptoten immer mehr, wobei der Abstand monoton gegen Null abnimmt, wie aus der zu (26.2) äquivalenten Beziehung $(r-y)(r+y) = b^2$ abzulesen ist. Der richtige Verlauf einer Hyperbel ist ohne Benützung ihres Asymptotenpaars kaum zu treffen. – Die beiden zu σ parallelen (Umriß-) Erzeugenden u_1, u_2 schneiden σ in zwei Fernpunkten $U_1, U_2 \in k$. Die zugehörigen Hyperbeltangenten ergeben sich im Schnitt der längs u_1 bzw. u_2 berührenden (erstprojizierenden) Tangentialebenen des Kegels mit σ , fallen also mit den Asymptoten u'_1, u'_2 zusammen: *Die Asymptoten einer Hyperbel sind als ihre Tangenten in den beiden Fernpunkten anzusehen.*

Sind von einer Hyperbel die *Asymptoten und ein Punkt P* bekannt, was oft der Fall ist, so liefert die *Umkehrung der Stechzirkelkonstruktion* zunächst die Halbachse b (Abb. 71). Die Ergänzung des Achsenrechteckes

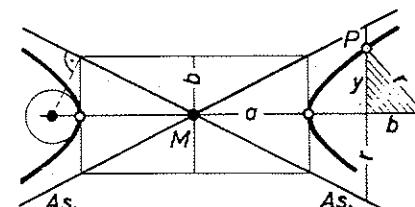


Abb. 71

führt anschließend auf die Hauptscheitel. – Das in einer Ecke des Achsenrechtecks auf die hindurchgehende Asymptote errichtete Lot schneidet auf der Hauptachse den Mittelpunkt eines *Scheitelkrümmungskreises* aus, wie später bewiesen wird (§ 50).

Legt man in Abb. 70 durch zwei eigentliche Hyperbelpunkte P_1, P_2 die erstprojizierende Ebene ζ , so schneidet sie den Hilfskegel Γ nach einer Ellipse oder Hyperbel l , die ihre Hauptscheitel Q_1, Q_2 auf den Umrißerzeugenden u_1, u_2 hat und auf der die Punkte P_1, P_2 symmetrisch zur Nebenachse angeordnet sind, da sie dieselbe Höhenkote b besitzen (vgl. die wahre Gestalt von l zeigende Umlappung). Hieraus folgt $\overline{P_1Q_1} = \overline{Q_2P_2}$, in Worten: *Jede nicht zu einer Asymptote parallele Gerade schneidet zwischen der Hyperbel und den Asymptoten zwei Strecken gleicher Länge aus.* Diese Tatsache liegt der bequemen „*Papierstreifenkonstruktion*“ der Hyperbel zugrunde, welche bei Kenntnis des Asymptotenpaars und eines Punktes P beliebig viele weitere Hyperbelpunkte liefert, ohne die Achsen zu benötigen (Abb. 72): Längs der geraden, durch P gelegten Kante eines Papierstreifens wird das zwischen P und einer Asymptote

befindliche Stück mit dem Stechzirkel abgegriffen und von der anderen Asymptote aus aufgetragen.

Befindet sich der Papierstreifen speziell in einer solchen Lage, daß die beiden Punkte zusammenfallen (T in Abb. 72), so liegt er längs einer *Tangente*. Es gilt also: *Der zwischen den beiden Asymptoten liegende Abschnitt einer Hyperbeltangente wird durch den Berührungs punkt halbiert.* Umgekehrt ist dadurch die zu einem Hyperbelpunkt T gehörige Tangente t leicht zu finden, indem man T in Richtung einer Asymptote auf die andere projiziert und den Mittelpunkt an dieser Projektion spiegelt (Abb. 72).

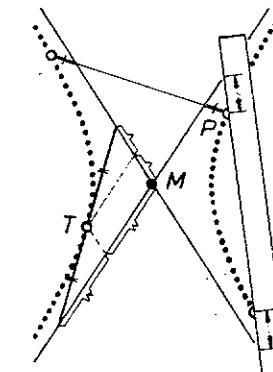


Abb. 72

Eine weitere *Tangentenkonstruktion* zeigt Abb. 70: Bei der verwendeten Aufstellung ist die Hyperbeltangente t in P die Spur der Tangentialebene τ von Γ und steht daher senkrecht auf dem Grundriß der *Kegelnormale* $n \perp \tau$ (M3b); diese wird zunächst in der auf den Umriß hinausgedrehten Lage P^0 von P bestimmt und dann mit Benützung ihres Fixpunkts auf der Kegelachse zurückgedreht.

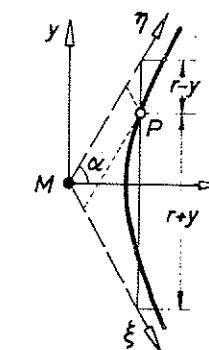


Abb. 73

Wird die Hyperbel (26.3) durch *schiefwinkelige Koordinaten* ξ, η auf ihre *Asymptoten* bezogen (Abb. 73), so ergibt sich unter Verwendung des Asymptotenwinkels 2α die einfache Gleichung

$$\xi \eta = \frac{r-y}{2 \sin \alpha} \cdot \frac{r+y}{2 \sin \alpha} = \frac{b^2}{4 \sin^2 \alpha} = \frac{e^2}{4} = \text{const.} \quad (26.4)$$

Auf Grund dieser Beziehung gilt der für die Darstellung wichtige Satz: *Jede nichtausgeartete Parallelprojektion einer Hyperbel ist wieder eine Hyperbel, wobei einander die Asymptoten entsprechen.* Der Satz könnte übrigens auch aus der gegenüber Parallelprojektion invarianten Papierstreifenkonstruktion gefolgert werden.

Auf dem Weg über eine Figur nach dem Muster der Abb. 67 ergibt sich schließlich wie bei der Ellipse: *Jeder ebene, aus zwei Teilen bestehende Schnitt eines beliebigen Kreiskegels ist eine Hyperbel.*

27. Parabelschnitt des Drehkegels

Von den ebenen Schnitten eines Drehkegels sind jetzt die Annahmen erledigt, daß der Achsenwinkel der Schnittebene größer oder kleiner als der halbe Öffnungswinkel des Kegels ist. Der verbleibende Grenzfall gleicher Winkel, also der Schnitt mit einer Ebene σ , die zu einer Tangentialebene $\bar{\sigma}$ des Kegels parallel ist, führt auf eine Kurve k , die nur auf einer Kegelhälfte verläuft, sich jedoch ins Unendliche erstreckt. Diese als *Parabel* bekannte Kurve stellt eine Übergangsform zwischen Ellipse und Hyperbel dar, die sich einstellt, wenn ein Scheitel immer weiter hinausrückt, während der andere im Endlichen bleibt.

Zur Untersuchung sei die Achse des Kegels Γ wieder lotrecht aufgestellt (Abb. 74). Jetzt existiert nur eine einzige Dandelin-Kugel Σ ,

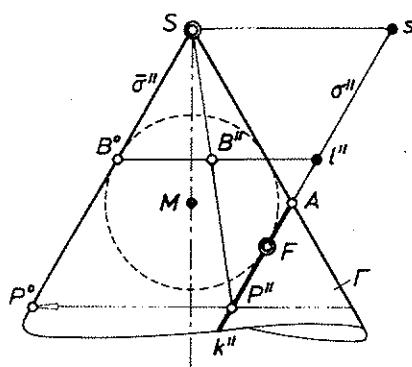


Abb. 74

welche Γ eingeschrieben ist und σ in einem Punkt F berührt. Durch jeden Punkt $P \in \kappa$ geht eine Kegelerzeugende; ihr Treppunkt mit dem Berührkreis von Σ sei B . Aus der Gleichheit der aus P an die Kugel Σ gehenden Tangentenstrecken PF , PB und der parallelgedrehten Lage P^0B^0 folgt dann für den Normalabstand des Punktes P von der Schnittgeraden l der Berührkreisebene mit σ :

$$PF = PB = P^0B^0 = P''l'' = Pl. \quad (27.1)$$

Das bedeutet: *Die Parabel ist der Ort aller Punkte der Ebene, die von einem festen Punkt und von einer festen Geraden gleiche Abstände haben.*

Der feste Punkt F heißt der *Brennpunkt* der Parabel, die feste Gerade l ihre *Leitlinie*. Die durch F gehende Normale von l ist *Symmetrieachse* der Parabel (Abb. 75). Die Lotstrecke $Fl = p$ wird als *Parameter* der

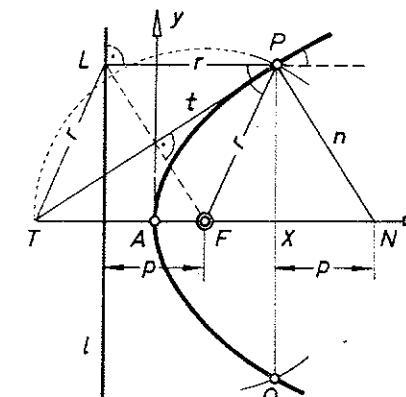


Abb. 75

Parabel bezeichnet; ihr Halbierungspunkt A ist der *Scheitel*.¹ Alle Parabeln sind untereinander ähnlich, da das Aussehen jeder einzelnen bloß von der Größe p abhängt.

Die *Tangente* t im Parabelpunkt P bildet als Schnittgerade von σ und der den Kegel längs PB , die Kugel Σ daher in B berührenden Tangentialebene τ gleiche Winkel mit PF und PB . Ebenso bildet sie gleiche Winkel mit den Falllinien der gleich geneigten Ebenen σ und τ , also der Abstandsstrecke Pl und der Erzeugenden PB . Hieraus folgt: *Die Parabeltangente in P halbiert den Winkel zwischen dem Brennstrahl PF und dem Lot Pl auf die Leitlinie* (Abb. 75). – Auf dieser Tatsache beruht die „*Scheinwerfereigenschaft*“ des Parabolspiegels: Alle vom Brennpunkt ausge-

¹ Mittelpunkt, zweiter Scheitel und zweiter Brennpunkt sind im Fernpunkt der Parabelachse vorzustellen.

henden Lichtstrahlen treten nach Reflexion parallel zur Achse aus. Umgekehrt wird die Sammelwirkung, die parallel zur Achse einfallende Strahlen nach Reflexion im Brennpunkt vereinigt, etwa in Sonnenkraftwerken und Radargeräten ausgenützt.

Die Aufrissfigur Abb. 74 ließe sich unter Heranziehung der Schichtenkreise des Kegels leicht durch den Grundriß ergänzen. Bezeichnet s die in Höhe der Kegelspitze S verlaufende Schichtenlinie der Schnittebene σ , so besteht für jeden Parabelpunkt P zunächst die Abstandsgleichheit $\overline{PS} = \overline{P^0S} = \overline{Ps}$. Infolge der gleichen Neigung dieser Abstandsstrecken gegen die Horizontale sind auch ihre Grundrisse gleich lang: $\overline{PS'} = \overline{P's}$. Daraus ist zu erkennen: Bei lotrechter Achsenlage des Drehkegels ist der Grundriß jeder Schnittparabel eine Parabel, die ihren Brennpunkt im Grundriß der Kegelspitze hat (Abb. 79); s' ist ihre Leitlinie.

28. Parabelkonstruktionen

Die punktweise Konstruktion einer *Parabel* kann bei Kenntnis des Brennpunkts F und der Leitlinie l gemäß der definierenden Relation (27.1) erfolgen, indem unter wechselnder Vorgabe der Entfernung $\overline{PF} = \overline{Pl} = r$ ein um F mit dem Radius r geschlagener Kreisbogen und die im Abstand r zu l gezogene Parallele miteinander geschnitten werden (Abb. 75).

Wird die Parabel durch kartesische Koordinaten x, y auf das von Achse und Scheiteltangente gebildete Achsenkreuz bezogen (Abb. 75), so führt die Gleichsetzung der Ausdrücke $\overline{PF} = \sqrt{(x - p/2)^2 + y^2}$ und $\overline{Pl} = x + p/2$ auf die *Parabelgleichung*

$$y^2 = 2px. \quad (28.1)$$

Verdopplung der Abszisse x eines Punktes bedingt danach die Multiplikation der Ordinate y mit $\sqrt{2}$. Diese mit dem Stechzirkel leicht auszuführende Operation gestattet in einfacher Weise aus einem bekannten Parabelpunkt weitere Punkte abzuleiten. Geht man insbesondere von dem Punkt $B(p/2, p)$ aus, so ergibt sich eine vor allem für schlanke Parabeln recht günstige Punktkette $C(p, p\sqrt{2}), D(2p, 2p), E(4p, 2p\sqrt{2})$ usf. (Abb. 76). – In der Umgebung des Scheitels A wird die Parabel durch ihren Krümmungskreis mit dem Radius $\varrho = p$ angenähert (§ 31).

Eine Reihe von nützlichen *Tangenteneigenschaften* der Parabel folgen aus ihrer „*Scheinwerfereigenschaft*“ (§ 27), wenn man in Abb. 75 die beiden gleichen Strecken PF und $Pl = PL$ zum Rhombus $PFTL$ ergänzt, in welchem die zu P gehörige Tangente t als Diagonale PT auftritt. So ergibt sich etwa der Achsenpunkt T von t einfach durch

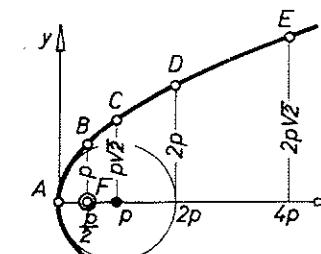


Abb. 76

Übertragen der bei der Konstruktion von P benutzten Strecke $\overline{FP} = r$ nach \overline{FT} . Ferner gilt: Die Tangentenstrecke zwischen Berührungs- punkt und Achse wird durch die Scheiteltangente halbiert, und damit zusammenhängend: Die „Subtangente“ TX wird durch den Scheitel halbiert. Weiters: Der Fußpunkt des aus dem Brennpunkt auf eine Tangente gefällten Lotes gehört der Scheiteltangente an, und schließlich: Die „Subnormale“ XN ist gleich dem Parameter p (also konstant).

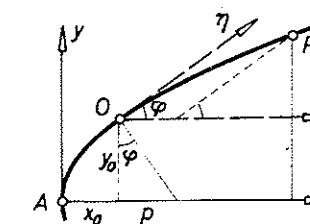


Abb. 77

Sei $O(x_0, y_0)$ ein allgemeiner Parabelpunkt. Der Übergang von den ursprünglichen Koordinaten x, y zu *schiefwinkligen Koordinaten* ξ, η , die sich auf die Achsenparallele und die Tangente in O beziehen, erfolgt gemäß Abb. 77 vermöge

$$x = x_0 + \xi + \eta \cos \varphi, \quad (28.2)$$

$$y = y_0 + \eta \sin \varphi \quad \text{mit} \quad \tan \varphi = p/y_0.$$

Die Parabelgleichung (28.1) transformiert sich dadurch in

$$\eta^2 = 2q\xi \quad \text{mit} \quad q = p/\sin^2 \varphi, \quad (28.3)$$

behält also ihre charakteristische Gestalt. Umgekehrt stellt eine Gleichung (28.3) bei beliebigem q und φ stets eine *Parabel* dar, weil sich aus q und φ die Größen p , y_0 und x_0 zurückrechnen lassen. Mit Rücksicht darauf, daß

sich bei Parallelprojektion die Koordinaten bloß mit konstanten Verzerrungsfaktoren multiplizieren, ergibt sich schließlich der für die Darstellung wichtige Satz: *Jede nicht ausgeartete Parallelprojektion einer Parabel ist wieder eine Parabel, wobei die Achsenrichtungen einander entsprechen.*

Zwei sich nur durch das Vorzeichen der Ordinate unterscheidende Parabelpunkte $P(\xi, \eta)$ und $Q(\xi, -\eta)$ liegen in Richtung der η -Achse (schief-) symmetrisch zur ξ -Achse, welche demnach auch den Schnittpunkt T der zu P und Q gehörigen Tangenten enthält. Umgekehrt: Kennt man von einer Parabel k zwei Punkte P, Q samt ihren Tangenten PT, QT , so gibt die durch T gehende Schwerlinie des Dreiecks PQT die Achsenrichtung von k an (Abb. 78). Darüber hinaus gilt: Der Halbierungs-

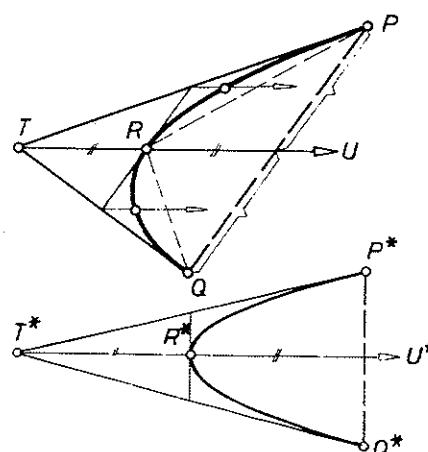


Abb. 78

punkt R der Schwerlinie ist ein weiterer Parabelpunkt, und seine Tangente ist parallel zur Sehne PQ . Um dies einzusehen, fasse man das Dreieck PQT als Parallelprojektion eines gleichschenkligen Dreiecks $P^*Q^*T^*$ auf (was etwa mit $P^* = P$ und $Q^* = Q$ stets möglich ist); die k entsprechende Parabel k^* liefert als Bild ihres Scheitels R^* den genannten Punkt R , dessen Lage aus der oben erwähnten Subtangenteneigenschaft folgt. Der Prozeß, der aus den Punkten P und Q und ihren Tangenten den neuen Punkt R samt Tangente ableitet, kann nun neuerlich auf P und R oder auf Q und R angewendet und beliebig oft wiederholt werden. – Wünscht man noch Achse, Brennpunkt und Scheitel der Parabel k zu ermitteln, so lasse man Lichtstrahlen parallel zur bereits bekannten Achsenrichtung in P und Q einfallen; nach Reflexion daselbst kommen

sie im Brennpunkt F zusammen¹. Der Fußpunkt des aus F auf eine Tangente gefällten Lotes legt dann die Scheiteltangente fest. Diese Konstruktion wurde bei der Darstellung des Parabelschnitts im Aufriss von Abb. 79 angewendet.

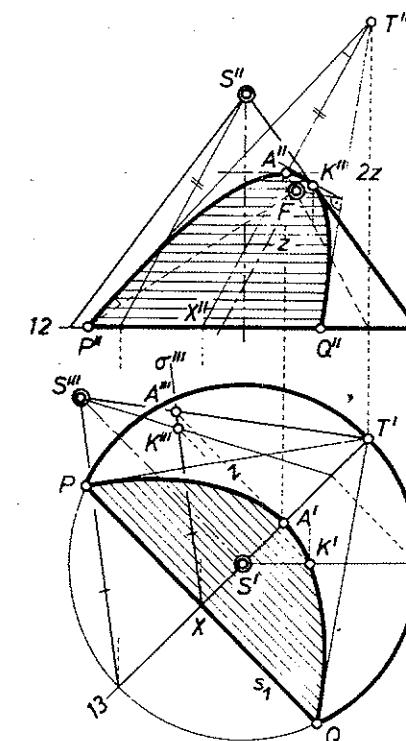


Abb. 79

Mit Hilfe einer Figur nach dem Muster Abb. 67 ist schließlich festzustellen: *Jeder parallel zu einer Tangentialebene geführte ebene Schnitt eines beliebigen Kreiskegels ist eine Parabel.*

29. Zusammenfassung

Unter der gemeinsamen Bezeichnung „*Kegelschnitte*“ werden jene Kurven zusammengefaßt, die als *ebene Schnitte von Drehkegeln* auftreten. Es handelt sich dabei nach den vorangegangenen Ausführungen im wesentlichen um die *Ellipsen* (mit Einschluß der Kreise), die *Hyperbeln*

¹ Sollten die reflektierten Lichtstrahlen einen schleifenden Schnitt liefern oder ganz zusammenfallen, so ziehe man noch den Lichtstrahl durch R heran.

und die *Parabeln*. Im weiteren Sinn treten zu diesen „regulären“ Kegelschnitten noch die „singulären“ (ausgearteten, zerfallenden) in Form von *Geradenpaaren*. Solche Geradenpaare entstehen beim Schnitt von Drehkegeln mit Ebenen durch die Spitze; sie können aus getrennten (reellen oder imaginären) Geraden bestehen, aber auch aus vereinigten (zusammenfallenden, zusammengerückten), wenn nämlich die Schnittebene den Kegel berührt.

Wie andeutungsweise gezeigt wurde, treten dieselben Kurven auch als die ebenen Schnitte *beliebiger Kreiskegel* auf. Es ist also nicht notwendig, sich auf Drehkegel zu beschränken.

Die *punktweise Konstruktion* des Schnittes k eines Kreiskegels Γ mit einer Ebene σ , welche die Kegelspitze S nicht enthält, erfordert nur die Ermittlung der Durchstoßpunkte P der Erzeugenden $e \subset \Gamma$ mit σ (L1). Durchläuft e den Kegel in einem bestimmten Sinn, so durchläuft P den Kegelschnitt k in einem Zuge. In diesem Sinne sind alle regulären Kegelschnitte als in sich geschlossene Kurven anzusehen; dies gilt insbesondere auch für Hyperbel und Parabel, die sich über das Unendliche schließen, welches ja in der projektiven Ebene keine Sonderstellung einnimmt.¹ – Die zu P gehörige Tangente t von k ergibt sich als Schnitt der Ebene σ mit der längs $e = SP$ berührenden Tangentialebene τ von Γ (L2), was bereits wiederholt benutzt wurde.

Um die *Art* eines Kegelschnittes $k = \Gamma\sigma$ von vornherein zu erkennen, mag die durch den Kegelscheitel S gelegte „*Scheitelebene*“ $\bar{\sigma} \parallel \sigma$ dienen, die dreierlei Lage haben kann:

a) $\bar{\sigma}$ trennt die beiden Kegelhälften (schneidet Γ nach zwei konjugiert imaginären Erzeugenden). Der Kegelschnitt k ist dann eine *Ellipse*. – Zur Konstruktion von k gehe man von jenen beiden Punkten des Basiskreises aus, deren Tangenten parallel zur Basisspur von σ verlaufen; die zugehörigen Erzeugenden schneiden σ in den Endpunkten eines Durchmessers von k , wie die Anwendung der Tangentenkonstruktion lehrt, die parallele Tangenten liefert. Der hierzu konjugierte Durchmesser von k hat die Richtung dieser Tangenten und ist daher der Lage nach bekannt; seine Endpunkte sind als Durchstoßpunkte mit Γ (unter Verwendung seiner Verbindungsebene mit S) leicht zu finden.

b) $\bar{\sigma}$ schneidet Γ nach zwei reellen Erzeugenden $\bar{u} \neq \bar{v}$. Der Kegelschnitt k ist dann eine *Hyperbel*. – Die Erzeugenden \bar{u}, \bar{v} treffen σ in Fernpunkten U und V , geben daher die Asymptotenrichtungen von k an. Die Asymptoten u, v selbst ergeben sich als Tangenten in U bzw. V im

¹ Der die Hyperbel durchlaufende Punkt wandert jeweils längs einer Asymptote hinaus und kommt dann nach Überschreitung der Ferngeraden von der entgegengesetzten Seite derselben Asymptote auf dem anderen Ast wieder herein.

Schnitt der längs \bar{u} bzw. \bar{v} berührenden Tangentialebenen mit σ . Ein zusätzlicher Punkt $P \in k$ legt schließlich die Hyperbel ausreichend fest (§ 26).

c) $\bar{\sigma}$ berührt Γ längs einer Erzeugenden \bar{u} . Der Kegelschnitt k ist dann eine *Parabel*. – Die Erzeugende \bar{u} trifft σ in einem Fernpunkt U , gibt also die Achsenrichtung von k an. Zwei weitere Punkte $P, Q \in k$ und die Tangente in P legen schließlich die Parabel ausreichend fest (§ 28).

Dementsprechend kann man sagen: Die beiden Fernpunkte U, V eines Kegelschnittes sind bei der Hyperbel reell und getrennt, bei der Ellipse konjugiert-imaginär und bei der Parabel zusammengerückt. Die Parabel wird also im Achsenfernypunkt $U = V$ von der Ferngeraden berührt.

Unter den gemeinsamen Eigenschaften der regulären Kegelschnitte ist die nachgewiesene *Apollonische Definition* hervorzuheben, derzu folge sie als Örter jener Punkte zu erklären sind, deren Abstände von einem festen Punkt F (Brennpunkt) und einer festen Geraden l (Leitlinie) ein konstantes Verhältnis $\bar{PF} : \bar{Pl} = e > 0$ (numerische Exzentrizität) besitzen. Je nach dem Wert dieser Formzahl hat man eine *Ellipse* für $e < 1$, eine *Parabel* für $e = 1$ und eine *Hyperbel* für $e > 1$ (Abb. 80). Dieser Kennzeichnung entzieht sich lediglich der *Kreis*, für welchen F in den Mittelpunkt fällt, während die Leitlinie l zur Ferngeraden wird.

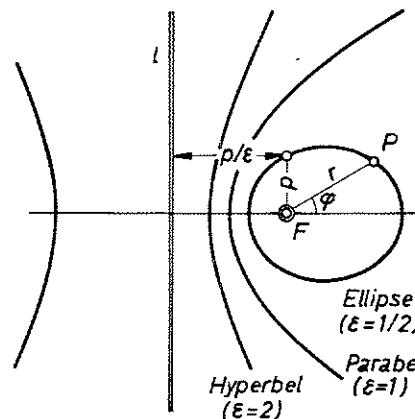


Abb. 80

Bezieht man einen Kegelschnitt durch Polarkoordinaten r, φ auf den Brennpunkt F als Nullpunkt und die Hauptachse als Nulllinie, so erhält man über die Apollonische Eigenschaft sofort die *Polargleichung*

$$r(1 - e \cos \varphi) = p = \text{const}, \quad (29.1)$$

wenn der Abstand $\tilde{Fl} = p/e$ gesetzt wird. Die so eingeführte Konstante p („Parameter“) tritt als Radiusvektor r für $\varphi = \pi/2$ auf, bedeutet also die halbe Länge der zur Hauptachse normalen Brennpunktssehne (Abb. 80). – Aus den kartesischen Gleichungen $(x/a)^2 \pm (y/b)^2 = 1$ der Ellipse bzw. Hyperbel berechnet sich der Parameterwert über $x = e$ zu $y = p = b^2/a$; p stimmt mithin (wie bei der Parabel) mit dem Krümmungsradius im Hauptscheitel überein.

V. ELEMENTE DER KURVEN- UND FLÄCHENLEHRE

30. Ebene Kurven

Eine Kurve ist – grob gesagt – eine eindimensionale stetige Folge von Punkten. Gehören alle Punkte einer bestimmten Ebene an, so liegt eine *ebene Kurve* vor.

In den Anwendungen kann man zwei Arten von Kurven unterscheiden:

a) *Gesetzmäßige Kurven*. Sie sind durch ein Gesetz mathematischen Charakters erklärt, dem ihre Punkte (oder Tangenten oder sonstige Elemente) genügen. Beispiele hierfür sind etwa der Kreis (Ort aller Punkte, die von einem festen Punkt einen festen Abstand haben) und die Kegelschnitte (definierbar etwa durch die Apollonische Eigenschaft). Unter Einsatz geeigneter Koordinaten kann das in Rede stehende Gesetz in Gleichungsform übersetzt werden. Die Zugehörigkeit eines Punktes zur Kurve lässt sich mithin exakt nachprüfen.

b) *Graphische Kurven*. Sie sind durch eine Zeichnung gegeben und haben empirischen Charakter. Beispiele sind etwa die von registrierenden Meßinstrumenten aufgezeichneten Diagramme, die Schaubilder von Versuchsreihen, die Schichtenlinien auf einer Landkarte usw. Die Zugehörigkeit eines Punktes zur Kurve lässt sich nur im Rahmen der Zeichen- und Beobachtungsgenauigkeit nachprüfen.

Drastisch ausgedrückt: Gesetzmäßige Kurven lassen sich telefonisch weitergeben (durch Mitteilung ihres Entstehungsgesetzes oder ihrer Gleichung), graphische Kurven hingegen nur durch Übermittlung einer Kopie. Der Mathematiker pflegt graphische Kurven durch gesetzmäßige anzunähern; der Techniker – der sehr viel mit graphischen Kurven zu tun hat – verwertet gefühlsmäßig die Erfahrungen, die er bei gesetzmäßigen Kurven erworben hat.

Eine wichtige Kategorie unter den gesetzmäßigen Kurven bilden die *algebraischen Kurven*. In kartesischen Koordinaten x, y werden sie beschrieben und erklärt durch eine Gleichung $F(x, y) = 0$, wobei F ein *Polynom* in x und y ist, also durch

$$F(x, y) \equiv \sum_{j+k \leq n} a_{jk} x^j y^k = 0 \quad (j, k \geq 0, \text{ ganz}; a_{jk} = \text{const}). \quad (30.1)$$

Die höchste wirklich vorhandene Exponentensumme $j + k = n$ ($a_{jk} \neq 0$) heißt der *Grad* des Polynoms und die *Ordnung* der Kurve. Diese Kennzahl n der Kurve ist unabhängig vom verwendeten Koordinatensystem. Der