Näherungsweise Darstellung von Funktionen
(Taylor- und Fourier-Reihe)

a) Lineare Approximation

Bildung des Differentialquotienten und näherungsweise Berechnung von f(x):

$$f(x) \cong f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0), \text{ denn } \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = f'(x_0)$$

Bsp. 1: Wurzelfunktion

$$f(x) = \sqrt{x}; \quad x_0 = 1$$

$$f' = \frac{1}{2\sqrt{x}}; \quad f'(x_0) = \frac{1}{2}$$

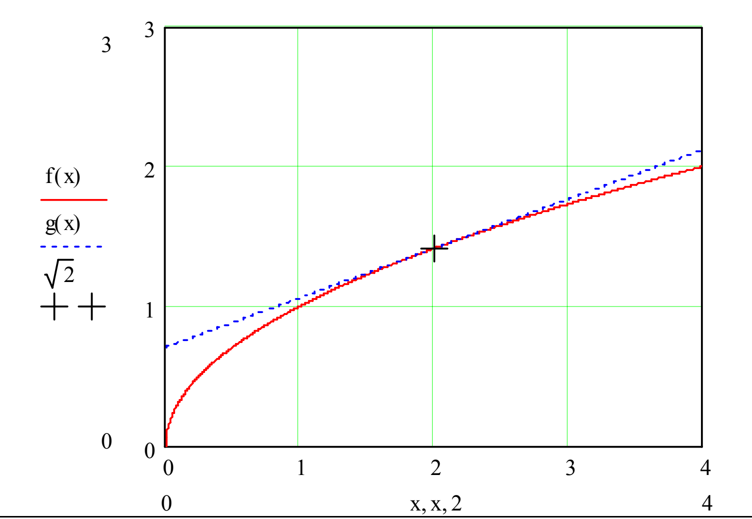
$$\sqrt{x} \cong 1 + \frac{1}{2}(x - 1)$$

z.B $\sqrt{1{,}04} \cong 1{,}02$

$x0 := 2$

$f(x) := \sqrt{x}$

$g(x) := f(x0) + \left(\frac{d}{dx0} f(x0)\right) \cdot (x - x0)$



Verallgemeinerung: Substitution für $(x-x_o) = h$, setze x anstelle von x_o, h ist klein, h auch < 0

$$\boxed{f(x+h) \cong f(x) + f'(x) \cdot h}$$

Bsp.2: Lichtintensität I(r); r = Radius der Pupille des Auges. Änderung der Lichtintensität bei Zunahme des Radius um 5%

$$I(r) = c \cdot r^2$$

$$I'(r) = 2cr$$

$$I(r+h) \cong I(r) + 2cr \cdot h$$

$$h = 0{,}05r; \text{ Zunahme um } 5\%$$

$$I(r+h) \cong I(r) + 0{,}1r^2 c$$

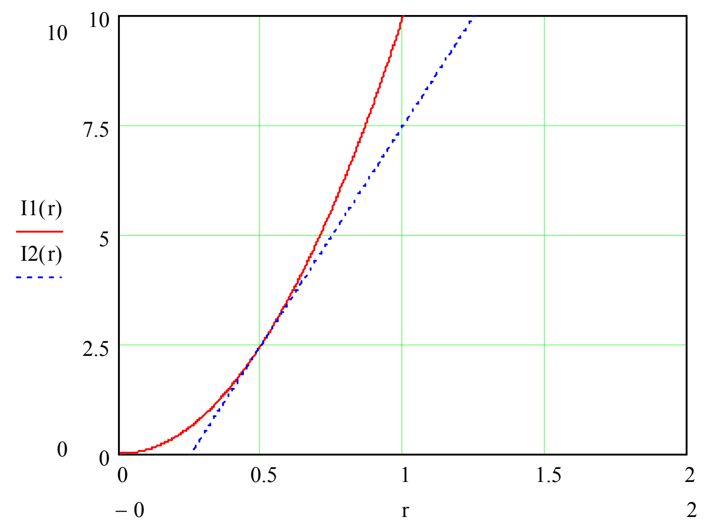
$$I(1{,}05r) - I(r) \cong 0{,}1r^2 c$$

Darstellung der linearen Approximation in der Nähe des Punktes $x_0 = 0.5$

$K := 10 \qquad p := 0.5$

$I1(r) := K \cdot r^2$

$I2(r) := I1(p) + 2K \cdot p \cdot (r - p)$



Bei einer Zunahme von von 5% wächst I(r) näherungsweise um 10%.

b) Quadratische Approximation.

f(x) sei eine (mindestens) 2-mal differenzierbare Funktion. Gesucht wird ein Polynom 2. Grades, das die Bedingungen

$$g(x_0) = f(x_0)$$
$$g'(x_0) = f'(x_0) \quad \text{erfüllt sind.}$$
$$g''(x_0) = f''(x_0)$$

Zunächst wird in einem unbestimmten Ansatz g(x) aufgestellt und anschließend werden die Koeffizienten a_i ermittelt:

$$g(x) = a_0 + a_1(x - x_0) + a_2(x - x_0)^2$$
$$g'(x) = a_1 + 2a_2(x - x_0)$$
$$g''(x) = 2a_2$$
$$g(x_0) = a_0 = f(x_0)$$
$$g'(x_0) = a_1 = f'(x_0)$$
$$g''(x_0) = 2a_2 = f''(x_0);\; a_2 = \frac{1}{2} f''(x_0)$$

Verallgemeinerung: $h = (x - x_0)$

$$\boxed{f(x_0 + h) \cong f(x_0) + f'(x_0) \cdot h + \frac{1}{2} f''(x_0) h^2}$$

Anm: f(x) ist die anzunähernde Funktion, g(x) ist die Näherung, für die gilt:

$$g(x_0 + h) \cong f(x_0 + h)$$
$$g(x_0 + h) = f(x_0) + f'(x_0) \cdot h + \frac{1}{2} f''(x_0) h^2$$

Bsp.1: Cosinus Funktion in der Nähe von $x_0 = 0$

Cosinusfunktion f(x) = cos(x)

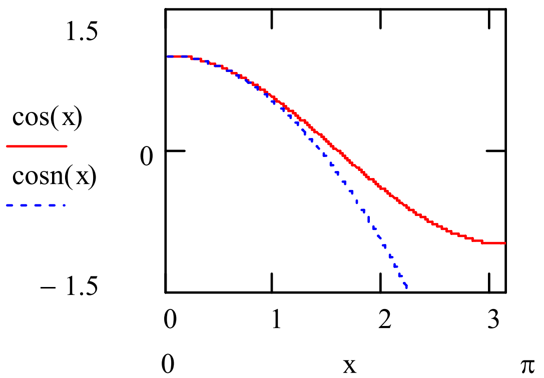
$f(x) = \cos(x)$	$f(0) = +1$
$f'(x) = -\sin(x)$	$f'(0) = 0$
$f''(x) = -\cos(x)$	$f''(x) = -1$
$f'''(x) = \sin(x)$	$f'''(x) = 0$
$f^{IV}(x) = \cos(x)$	$f^{IV}(x) = +1$

$$\cos(0+h) = \cos(h) \cong 1 - \frac{h^2}{2}$$

$$\cos(h) \cong 1 - \frac{h^2}{2}$$ für kleine h, und nur für h im Bogenmaß !!

Näherung:

$$\operatorname{cosn}(x) := 1 - \frac{x^2}{2}$$



Bsp.2: Punktförmige Lichtquelle

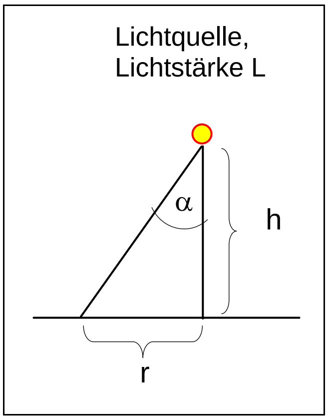
Gesucht ist die Helligkeit des Punktes im Abstand r vom Fußpunkt, Lichtstärke L, Beleuchtungsstärke B im Abstand r:

$$B(r) = \frac{L}{r^2 + h^2} \cdot \cos\alpha; \qquad \tan\alpha = \frac{r}{h}; \qquad \cos\alpha = \frac{h}{\sqrt{r^2 + h^2}}$$

$$B(r) = \frac{L \cdot h}{(r^2 + h^2)^{\frac{3}{2}}} = L \cdot h \cdot f(r) \text{ mit } f(r) = (r^2 + h^2)^{-\frac{3}{2}}$$

$$f'(r) = -\frac{3}{2}(r^2 + h^2)^{-\frac{5}{2}} \cdot 2r$$

$$f''(r) = \frac{15}{4}(r^2 + h^2)^{-\frac{7}{2}} \cdot 2r \cdot 2r + \left(-\frac{3}{2}\right) \cdot (r^2 + h^2)^{-\frac{5}{2}} \cdot 2$$

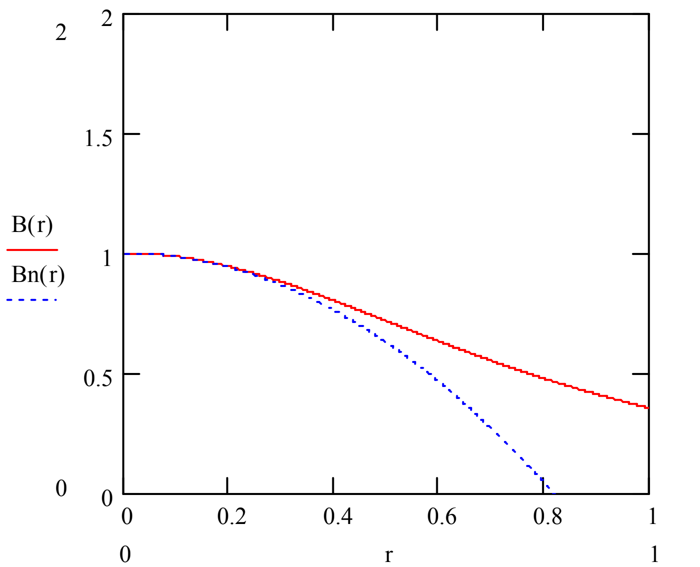


$$f(0) = h^{-3}$$
$$f'(0) = 0$$
$$f''(0) = -3h^{-5}$$
$$f(r) \cong h^{-3} - \frac{3}{2} h^{-5} r^2$$
$$B(r) \cong L(h^{-2} - \frac{3}{2} h^{-4} r^2) \text{ mit } B(0) = Lh^{-2}$$
$$B(r) \cong B(0)\left[1 - \frac{3}{2h^2} \cdot r^2\right]$$

L = 1, h = 1

$$B(r) := \frac{L}{\left(r^2 + h^2\right)^{\frac{3}{2}}}$$

$$Bn(r) := L \cdot h^{-2} \cdot \left(1 - \frac{3}{2 \cdot h^2} \cdot r^2\right)$$



Taylor-Reihen

Wir betrachten ein Polynom *g(x)* in der Nähe von x_0, $h = x - x_0$, bzw. $x = x_0 + h$, dann ist *g(x)*, bzw. $g(x_0+h)$:

$$g(x_0 + h) = a_0 + a_1 h + a_2 h^2 + a_3 h^3 + a_4 h^4 + ...$$
$$g'(x_0 + h) = a_1 + 2a_2 h + 3a_3 h^2 + 4a_4 h^3 + ...$$
$$g''(x_0 + h) = 2a_2 + 2 \cdot 3a_3 h + 3 \cdot 4a_4 h^2 + ...$$
$$g'''(x_0 + h) = 2 \cdot 3a_3 + 2 \cdot 3 \cdot 4a_4 h + 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot a_5 h^2 + ...$$

An der Stelle $x = x_0$, für $h = 0$, können die Koeffizienten a_0, a_1, a_2,… berechnet werden:	$g(x_0) = a_0$ $g'(x_0) = a_1$ $g''(x_0) = 2 \cdot a_2$ $g'''(x_0) = 2 \cdot 3 \cdot a_3$ $g^{iV}(x_0) = 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot a_4$ $g^k(x_0) = k \cdot (k-1) \cdot .... \cdot 2 \cdot a_k$ $g^k(x_0) = k! a_k$ $a_k = \frac{g^k(x_0)}{k!}$

Reihenentwicklung für Funktionen:

Wenn gilt $f^{(j)}(x_0) = g^{(j)}(x_0); \quad j = 1,\dots,k; \quad f(x_0) = g(x_0)$,
dann kann die Funktion f(x) durch ein Polynom (Taylor-Reihe) angenähert werden:

$$f(x_0 + h) = f(x_0) + f'(x_0)\cdot h + \frac{1}{2} f''(x_0)\cdot h^2 + \frac{1}{3!} f'''(x_0)\cdot h^3 + \dots.$$

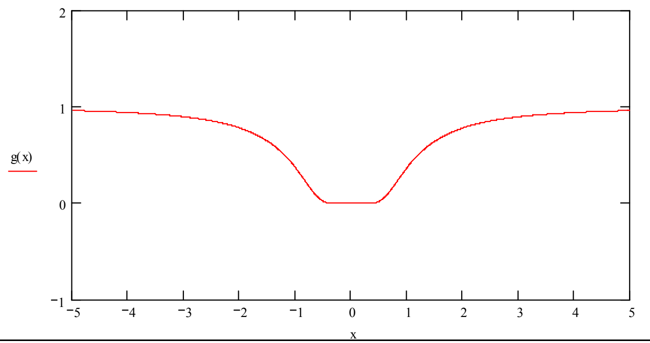
Für k $\to \infty$ heißt diese Reihe dann die Taylor Reihe von f:

$$f(x_0 + h) = f(x_0) + \sum_{j=1}^{\infty} \frac{1}{j!} f^{(j)}(x_0) h^j$$

Die Darstellung als Reihe ist für kleine h bei vielen Funktionen möglich. Diese Reihenentwicklung ist aber nicht überall richtig:

Gegenbeispiel:

$$g(x) = \begin{cases} e^{-1/x^2} & \text{für } x \neq 0 \\ 0 & \text{für } x = 0 \end{cases}$$



f(x) ist auch in x = 0 beliebig oft differenzierbar

$f^{(k)}(0) = 0$ für alle k, also ist die Taylor-Reihe = 0 für alle k, aber f(x) $\neq$ 0 für x $\neq$ 0 !!

Der Fehler der Approximation einer Funktion mit der Taylor-Reihe, bzw. mit einem Polynom k-ten Grades kann durch folgende Formel bestimmt werden (Restglied von Lagrange):

$$f(x_0 + h) = f(x_0) + \sum \frac{1}{j!} f^{(j)}(x_0) h^j + \frac{1}{(k+1)!} f^{(k+1)}(x_0 + \vartheta h)\cdot h^{k+1}$$ für eine

Zahl $\vartheta \in (0,1)$. Im allgemeinen konvergiert das k-te Restglied R_k(h) $\to$ 0, für k $\to \infty$.

Bsp 1: Cosinusfunktion, Darstellung mit Taylor-Reihe

$$f(x) = \cos(x); \quad x_0 = 0$$
$$f(0) = 1$$
$$f'(0) = 0$$
$$f''(0) = -1$$
$$f'''(0) = 0$$
$$f^{IV}(0) = 1 \quad (= \cos(x))$$

$$\cos(h) = 1 - \frac{1}{2!}h^2 + \frac{1}{4!}h^4 - \frac{1}{6!}h^6 + \frac{1}{8!}h^8 - \ldots.$$

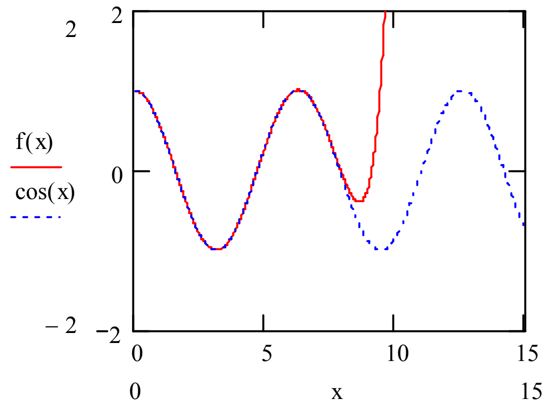
Beachte: $0! = 1; \quad 0^0 = 1$

$$\cos(x) = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \cdot \frac{1}{(2k)!} \cdot x^{2k}$$

Interessant ist das Divergenzverhalten von cos(x) wenn x in die Nähe von n kommt.

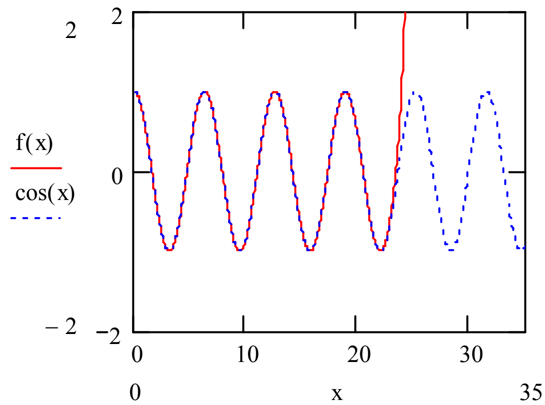
a) Abbruch der Reihenentwicklung mit n = 10

$$f(x) := \sum_{k=0}^{10} (-1)^k \frac{1}{(2k)!} x^{2k}$$



b) Abbruch der Reihenentwicklung mit n = 30

$$f(x) := \sum_{k=0}^{30} (-1)^k \frac{1}{(2k)!} x^{2k}$$



Bsp 2: e-Funktion, Darstellung mit Taylor-Reihe

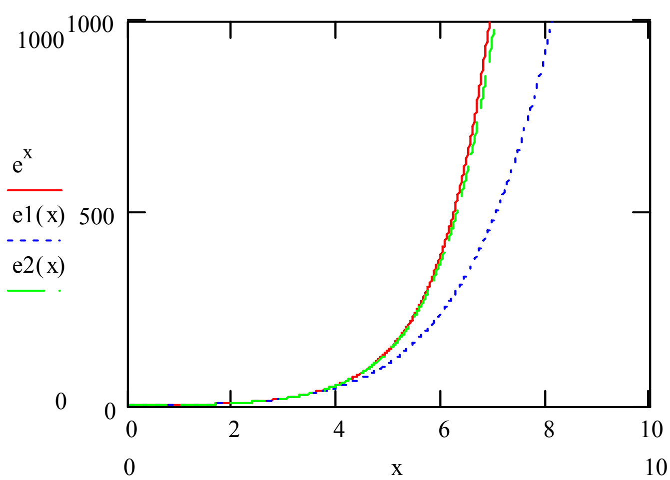
$$e^x = 1 + x + \frac{1}{2!}x^2 + \frac{1}{3!}x^3 + \ldots. \qquad e^x = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{x^i}{i!}$$

n1 := 6

n2 := 10

$$e1(x) := \sum_{i=0}^{n1} \frac{x^i}{i!}$$

$$e2(x) := \sum_{i=0}^{n2} \frac{x^i}{i!}$$



Approximation von periodischen Funktionen

Harmonische Schwingungen (Wechselspannung, Schwingung einer Saite etc.) können durch ein Sinusgesetz dargestellt werden.

$$f(t) = A \cdot \sin(\omega t + \varphi) \qquad \text{oder} \quad f(t) = A_1 \cdot \sin(\omega t) + A_2 \cos(\omega t)$$

A = Amplitude
ω = Kreisfrequenz

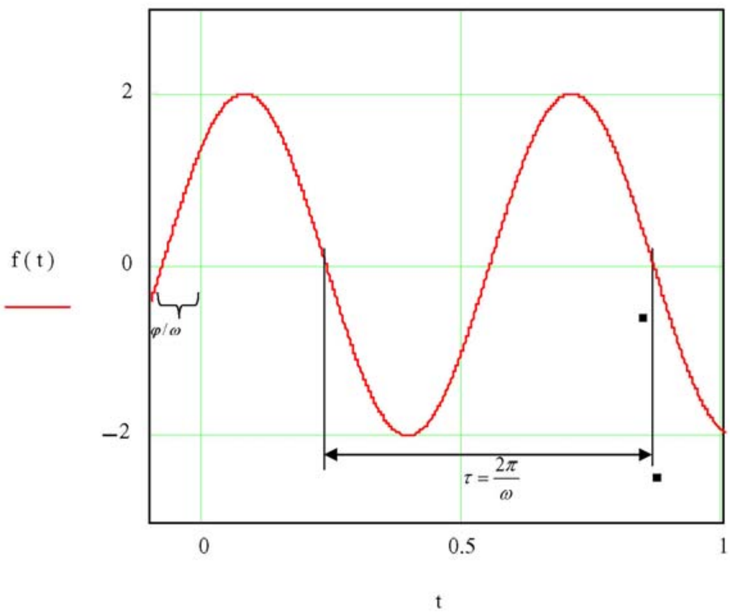
$\varphi := \frac{\pi}{4}$

$A := 2$

$\omega := 10$

$f(t) := A \cdot \sin(\omega \cdot t + \varphi)$

Einfache harmonische Schwingung



In den Naturwissenschaften treten häufig periodische Vorgänge auf, die nicht harmonisch bzw. sinusförmig sind. Unter den nachfolgend angeführten Voraussetzungen können diese periodischen Vorgänge mit der Kreisfrequenz $\omega = 2\pi / \tau$ in eine unendliche Summe (Fourier-Reihe) aus sinus- und kosinusförmigen Einzelschwingungen „entwickelt“ werden:

Def: Unter der Fourier-Reihe versteht man die unendliche Reihe

$$f(x) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos nx + b_n \sin nx$$

Voraussetzungen für die Entwicklung einer periodischen Funktion f(x) in eine Fourier-Reihe (Dirichletsche Bedingungen):

1. Das Periodenintervall lässt sich in endlich viele Teilintervalle zerlegen, in den f(x) stetig und monoton ist.
2. In den Unstetigkeitsstellen (es kommen nur Sprungunstetigkeiten mit endlichen Sprüngen in Frage) existiert sowohl der links- als auch der rechts-seitige Grenzwert.

Unter diesen Voraussetzungen konvergiert die Fourier-Reihe von f(x) für alle $x \in R$. In den Stetigkeitsstellen von f(x) stimmt sie mit der Funktion von f(x) überein, während sie in den Sprungstellen das arithmetische Mittel aus dem links- und rechtsseitigen Grenzwert der Funktion liefert (vgl. Rechteck oder Sägezahnimpuls).

Anmerkung: Meist findet man in den Darstellungen für die Fourier-Reihe als ersten Summand $a_0/2$. Ist nur a_0 angegeben, so unterscheiden sie die Summanden um den Faktor 2, der erste Summand ist in jedem Fall der gleiche (numerische) Wert)

Die Faktoren a_n und b_n ergeben sich aus trigonometrischen Überlegungen; Eine periodische Funktion *f(t)* kann als Summe von Sinusfunktionen **unterschiedlicher** Phasenlage dargestellt werden, deren Frequenzen **ganzzahlige** Vielfache der Grundschwingung ω sind.

$$f(t) = a_0 + f_1(t) + f_2(t) + f_3(t) + ...$$

$$f_1(t) = A_1 \sin \omega(t - t_1);\; f_2(t) = A_2 \sin 2\omega(t - t_2);\; ....;\; f_n(t) = A_n \sin n\omega(t - t_n)$$

ω = Kreisfrequenz, $\omega = \dfrac{2\pi}{\tau}$

τ = Periodendauer; 1/τ = Frequenz,
A_n = Amplitude der n-ten Oberschwingung

Aus der Trigonometrie ist bekannt:

$$\sin(\alpha \pm \beta) = \sin\alpha\cos\beta \;\pm\; \cos\alpha\sin\beta$$

Daher gilt analog: $A_n \sin n\omega(t - t_n) = A_n\left(\sin n\omega t \cdot \cos n\omega t_n - \cos n\omega t \cdot \sin n\omega t_n\right)$

Also:

$$\begin{aligned} f_n(t) &= A_n \sin n\omega(t - t_n) \\ f_n(t) &= A_n(\sin n\omega t \cdot \cos n\omega t_n - \cos n\omega t \cdot \sin n\omega t_n) \\ a_n &= -A_n \sin n\omega t_n \\ b_n &= A_n \cos n\omega t_n \\ f_n(t) &= a_n \cos n\omega t + b_n \sin n\omega t \end{aligned}$$

$\omega t = x$

Es soll gelten: $f(x) = a_0 + a_1 \cos x + b_1 \sin x + a_2 \cos 2x + b_2 \sin 2x + ...$

$$f(x) = f(x + 2\pi)$$

$$f(t) = f\left(\frac{x}{\omega}\right)$$, weil es sich um eine periodische Funktion handelt.

Berechnung des Fourierkoeffizienten a_0

Angenommen f(x) sei darstellbar als Summe von Funktionen der Art:

$$f(x) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos nx + b_n \sin nx$$

Gliedweise Integration der Fourier-Reihe im Intervall (0,2π):

$$\int_0^{2\pi} f(x)\,dx = \int_0^{2\pi} a_0\,dx + \sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n \int_0^{2\pi} \cos nx\,dx + b_n \int_0^{2\pi} \sin nx\,dx \right)$$

Dabei nehmen die einzelnen Integrale folgende Werte an:

$$\int_0^{2\pi} \cos nx\,dx = \int_0^{2\pi} \sin nx\,dx = 0$$

$$\int_0^{2\pi} f(x)\,dx = \int_0^{2\pi} a_0 dx = a_0 2\pi$$

Das Integral reduziert sich daher auf: $a_0 = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(x)\,dx$

Der Mittelwert von f(x) ist demnach a_0

(Anm: Ist als erster Summand der Fourier-Reihe $a_0/2$ angeführt, dann ist $a_0 = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(x)\,dx$)

Berechnung der Fourierkoeffizienten a_1, a_2,…

Beide Seiten werden mit cos*(mx)*, bzw. mit sin*(mx)* multipliziert und dann über das Intervall (0,2π) integriert:

$$\int_0^{2\pi} f(x)\cos mx\,dx = \int_0^{2\pi} a_0 \cos mx\,dx + \sum_{n=1}^{\infty}\left[a_n \int_0^{2\pi} \cos nx \cos mx\,dx + b_n \int_0^{2\pi} \sin nx \cos mx\,dx \right]$$

Daraus ergeben sich folgende Integrale:

$$\int_0^{2\pi} \cos nx \cdot \cos mx\ dx = \int_0^{2\pi} \cos^2 nx\,dx = \pi \qquad \text{für n = m}$$

$$\int_0^{2\pi} \cos nx \sin mx\ dx = 0 \qquad \text{für alle n, m} \in \text{N}$$

$$\int_0^{2\pi} \cos nx \cos mx\ dx = \int_0^{2\pi} \sin nx \sin mx\ dx = 0 \quad \text{für n} \neq \text{m}$$

Der Wert aller Integrale der rechten Seite für n ≠ m = 0, es bleibt nur übrig für m = n:

$$\int_0^{2\pi} f(x)\cos nx\ dx = a_n \int_0^{2\pi} \cos^2 nx\ dx = a_n \pi$$

$$a_n = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(x)\cos nx\ dx$$

Analog erfolgt die Berechnung der Faktoren b_0, b_1 $b_{2,.,}$

$$\int_0^{2\pi} f(x)\sin nx\ dx = b_n \int_0^{2\pi} \sin^2 nx\ dx = b_n \pi$$

$$b_n = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(x)\sin nx\, dx$$

Übergang von f(x) auf f(t): $f(t) = f\left(\frac{x}{\omega}\right)$, $\omega = \frac{2\pi}{\tau}$, f(t) hat Periode von 2π, bzw τ im Zeitmaß. Substitution von x = ωt; dx = ω dt

$$a_0 = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(x)\, dx; \quad a_0 = \frac{\omega}{2\pi}\int_0^{\tau} f(t)\, dt = \frac{1}{\tau}\int_0^{\tau} f(t)\, dt$$

$$a_n = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(x)\cos nx\ dx = \frac{\omega}{\pi}\int_0^{\tau=\frac{2\pi}{\omega}} f(t)\cos n\omega t\ dt$$

$$a_n = \frac{2}{\tau}\int_0^{\tau} f(t)\cos n\omega t\ dt \qquad \text{für } n \geq 1$$

$$b_n = \frac{2}{\tau}\int_0^{\tau} f(t)\sin n\omega t\, dt$$

Häufig wird für a_0 der doppelte Wert genommen: $a_0 = \frac{2}{\tau}\int_0^{\tau} f(t)\ dt$, in Analogie zur Berechnung der a_n, weil für diese Koeffizienten als Faktor vor dem Integral 2/τ steht. In der Schreibweise für die Fourier-Reihe muß a_0 dann entsprechend korrigiert werden:

$$f(t) = \frac{a_0}{2} + a_1 \cos\omega t + b_1 \sin\omega t + a_2 \cos 2\omega t + b_2 \sin 2\omega t + ...$$

Praktische Berechnungsbeispiele

(1) Symmetriebetrachtungen
Die Fourier-Reihe einer geraden Funktion f(x) (achsensymmetrisch zur y-Achse) enthält nur gerade Reihenglieder, d.h. neben dem konstanten Glied nur Kosinusglieder ($b_n = 0$ für n = 1,2,3,…)

$$f(x) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos nx$$

Die Fourier-Reihe einer ungeraden Funktion f(x) (symmetrisch zum Nullpunkt) enthält nur ungerade Reihenglieder, d.h. Sinusglieder ($a_n = 0$ für n = 0,1,2,3…)

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin nx$$

(2) Die Integration darf über ein beliebiges Periodenintervall der Länge 2π erstreckt werden (z.B. (-π,+π))

(3) Durch Abbruch der Fourier-Reihe nach endlich vielen Gliedern erhält man eine Näherungsfunktion für f(x) in Form einer trigonometrischen Reihe. Ähnlich wie bei den

Potenzreihen gilt auch hier: Je mehr Glieder berücksichtigt werden, umso besser ist die Näherung.

Bsp.1: Sägezahnimpuls

$$f(x) = \begin{cases} -kx + d & 0 \le x \le \pi \\ kx + (d - 2k\pi) & \pi < x < 2\pi \end{cases}$$

$$a_0 = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(x)\,dx = d - \frac{k\pi}{2}$$

$$a_n = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(x)\cos nx\,dx = \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}(-kx + d)\,\cos nx\,dx + \frac{1}{\pi}\int_{\pi}^{2\pi}(kx + d - 2k\pi)\,\cos nx\,dx$$

$$a_n = \frac{1}{\pi}\left(-\int_0^{\pi} kx\cos nx\,dx + \underbrace{d\int_0^{\pi}\cos nx\,dx}_{0} + \underbrace{d\int_{\pi}^{2\pi}\cos nx\,dx}_{0} + \int_{\pi}^{2\pi} kx\,\cos nx\,dx - \underbrace{2k\pi\int_{\pi}^{2\pi}\cos nx\,dx}_{0} \right)$$

$$a_n = \frac{1}{\pi}\left(-\int_0^{\pi} kx\cos nx\,dx + \int_{\pi}^{2\pi} kx\,\cos nx\,dx \right)$$

Die Lösung des Integrals $\int kx\,\cos nx\,dx$ erfolgt mit partieller Integration:

$$u = kx \qquad u' = k$$

$$v' = \cos nx \quad v = \frac{1}{n}\sin nx$$

$$\int kx\,\cos nx\,dx = \frac{kx}{n}\sin nx - k\int\frac{1}{n}\sin nx$$

$$\int kx\,\cos nx\,dx = \frac{k}{n^2}\left(nx\cdot\sin nx + \cos nx\right)$$

Zusammenfassen der Teilintegrale:

$h(x) = kx\cos nx$

$$a_n = \frac{1}{\pi}\left(\int_0^{\pi} -h(x)\,dx + \int_{\pi}^{2\pi} h(x)\,dx \right) = \frac{1}{\pi}\left(\int_{\pi}^{0} h(x)\,dx + \int_{\pi}^{2\pi} h(x)\,dx \right) = \frac{1}{\pi}\big(H(0) - H(\pi) + H(2\pi) - H(\pi)\big)$$

$$\frac{1}{\pi}\big(H(2\pi) + H(0) - 2H(\pi)\big) = \frac{k}{\pi\cdot n^2}\left(\underbrace{\cos 2n\pi}_{1} + 2n\pi\cdot\underbrace{\sin 2n\pi}_{0} + \underbrace{\cos n0}_{1} + \underbrace{n0\sin n0}_{0} - 2(\cos n\pi + \underbrace{n\pi\sin n\pi}_{0} \right)$$

$$= \frac{k}{\pi\cdot n^2}\left(2 - 2\cos n\pi\right)$$

Für gerade n (n= 2,4,6,..) verschwindet der Ausdruck $\left(2 - 2\cos n\pi\right)$, für ungerade n ist der Ausdruck in der Klammer = 4

Die Fourierkoeffizienten sind demnach:

$$a_{2n-1} = \frac{k}{(2n-1)^2 \cdot \pi} \cdot (2+2) = \frac{4k}{\pi} \cdot \frac{1}{(2n-1)^2}$$

$$f(x) = d - \frac{k\pi}{2} + \frac{4k}{\pi}\left[\cos(x) + \frac{1}{3^2}\cos(3x) + \frac{1}{5^2}\cos(5x) + ...\right]$$

$$f(x) = d - \frac{k\pi}{2} + \frac{4k}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos((2n-1)x)}{(2n-1)^2}$$

Darstellung eines Dreiecksignals mit der Funktion trunc(x), die den Integerterteil einer Zahl liefert, k= Steigung der Gerade, d = maximaler Funktionswert, τ = Periodendauer

$$\text{segezahn}(t) := \text{if}\left[\sin(t) \ge 0, d - k\cdot\pi\cdot\left(\frac{2t}{\tau} - \text{trunc}\left(\frac{2t}{\tau}\right)\right), d - \frac{k\cdot\tau}{2} + k\cdot\pi\cdot\left(\frac{2t}{\tau} - \text{trunc}\left(\frac{2t}{\tau}\right)\right)\right]$$

$k := 2$

$d := 2$

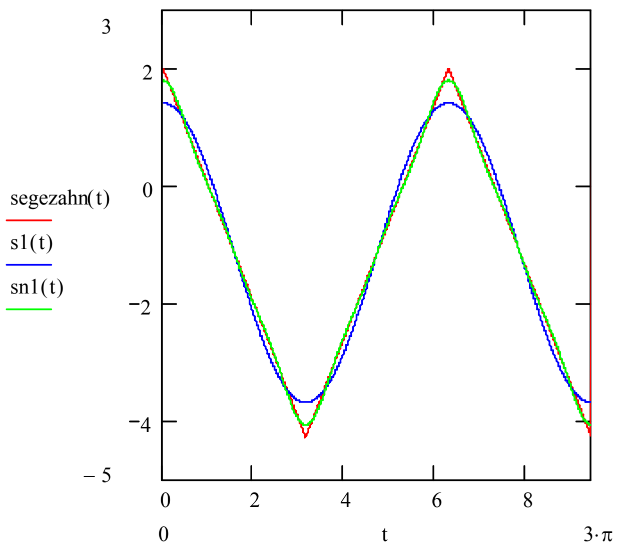
$\tau := 2\cdot\pi$

$$a0 := d - \frac{k\cdot\pi}{2}$$

$$s1(t) := a0 + \frac{4\cdot k}{\pi}\cdot\sum_{a=1}^{1}\frac{\cos[(2a-1)\cdot t]}{(2\cdot a-1)^2}$$

$n := 3$

$$sn1(t) := a0 + \frac{4\cdot k}{\pi}\cdot\sum_{a=1}^{n}\frac{\cos[(2a-1)\cdot t]}{(2\cdot a-1)^2}$$



Bsp 2. Rechteckfunktion

$$f(t) := \begin{cases} 1 & 0 \le x < \tau/2 \\ -1 & \tau/2 < x < \tau \end{cases}$$

f(t) ist ungerade, alle cosinus-Glieder fallen daher weg. $a_n = 0$; n = 0,1,2,3,….

$$f(t) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin n\omega t,$$

$$b_n = \frac{2}{\tau}\int_0^{\tau} f(t) \cdot \sin n\omega t \; dt$$

$$b_n = \frac{2}{\tau}\int_0^{\tau/2} 1 \cdot \sin n\omega t \; dt \;+\; \int_{\tau/2}^{\tau} -1 \cdot \sin n\omega t \; dt$$

$$b_n = \frac{2}{\omega\tau}\left(\frac{1}{n} \cdot -\cos n\omega t \Big|_0^{\tau/2} + \frac{1}{n} \cdot (-1) \cdot -\cos n\omega t \Big|_{\tau/2}^{\tau}\right)$$

$$\frac{2}{\omega\tau} = \frac{1}{\pi}$$

$$b_n = \frac{1}{n\pi}\left(-\cos n\omega\frac{\tau}{2} + \cos 0 + \cos n\omega\tau - \cos n\omega\frac{\tau}{2}\right)$$

$$b_n = \frac{1}{n\pi}\left(\cos 0 + \underbrace{\cos n\omega\tau}_{1 \forall n \in N} - \underbrace{2\cos n\frac{\tau}{2}}_{\substack{-2,\; n=1,3,5,... \\ +2,\; n=2,4,6,..}}\right)$$

Die Fourierkoeffizienten verschwinden für gerade n, n = 2,4,6,…; für ungerade Fourierkoeffizienten ist der Ausdruck in der Klammer = 4

Die Fourierkoeffizienten sind demnach:

$$b_{2n+1} = \frac{1}{(2n-1)\cdot\pi} \cdot (1+1+2) = \frac{4}{\pi} \cdot \frac{1}{(2n-1)}$$

$$f(t) = \frac{4}{\pi}\left[\sin(\omega t) + \frac{1}{3}\sin(3\omega t) + \frac{1}{5}\sin(5\omega t) + ...\right]$$

$$f(x) = \frac{4}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin((2n-1)\omega t)}{2n-1}$$

$$\omega := 10$$

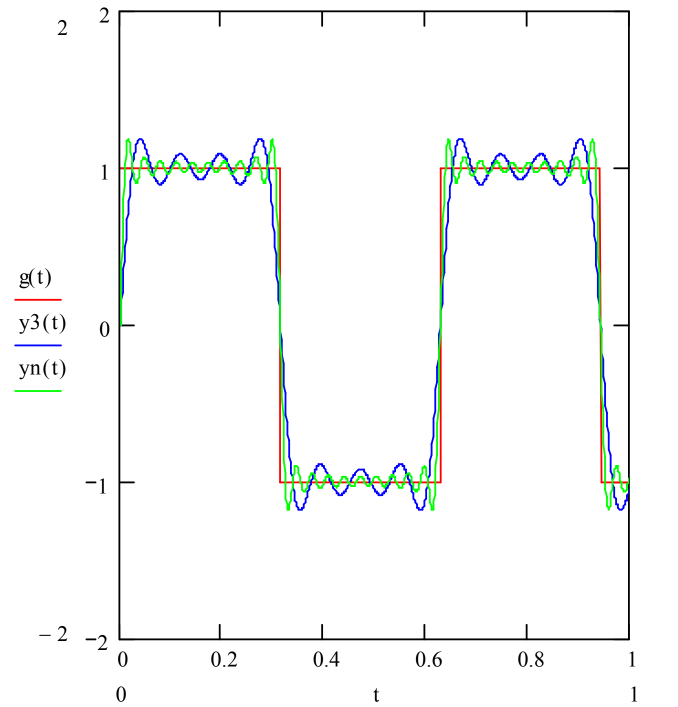
$$\tau := 2\frac{\pi}{\omega}$$

$$g(t) := \mathrm{if}\left[\left(\frac{t}{\tau} - \mathrm{trunc}\left(\frac{t}{\tau}\right)\right) < 0.5, 1, -1\right]$$

$$y3(t) := \frac{4}{\pi}\cdot\left[\sum_{k=1}^{4}\frac{\sin[(2\cdot k-1)\cdot\omega\cdot t]}{2\cdot k-1}\right]$$

$$n := 10$$

$$yn(t) := \frac{4}{\pi}\cdot\left[\sum_{k=1}^{n}\frac{\sin[(2\cdot k-1)\cdot\omega\cdot t]}{2\cdot k-1}\right]$$



Numerische harmonische Analyse

f(t) ist vielfach keine einfache Funktion, die eine analytische Lösung der Integrale f(t).cos(nwt) und f(t).sin(nwt) erlaubt. Unter diesen Umständen sind Methoden der numerischen Integration anzuwenden.
Sei y(k) = f(t_k) bekannt aus Messwerten. Eine Periode wird unterteilt in Intervalle gleicher Länge.

N Anzahl der Unterteilungen in einer Periode, k = {0,1,…N}
δ Schrittweite, im Zeitmaß
τ Periodendauer

$$y_N = y_0$$
$$y_{N+k} = y_k$$
$$t_k = t_0 + k\cdot\delta$$
$$\tau = N\cdot\delta$$
$$\omega = \frac{2\pi}{n\cdot\delta}$$

Numerische Integration zur Berechnung der Faktoren $a_0,\ldots a_n$, $b_1\ldots . b_n$:

$$a_n = \frac{2}{\tau}\int_0^{\tau} f(t)\cdot\cos n\omega t\ dt$$

$$a_0 = \frac{1}{N}\sum_{k=0}^{N-1} y_k$$

$$a_n = \frac{2}{N\cdot\delta}\sum_{k=0}^{N-1} f(t_k)\cos n\omega t_k\cdot\delta$$

$$a_n = \frac{2}{N}\sum_{k=0}^{N-1} y_k\cos\frac{2\pi n}{\tau}t_k$$

$$b_n = \frac{2}{N}\sum_{k=0}^{N-1} y_k\sin\frac{2\pi n}{\tau}t_k$$

$$A := \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 0.05 & 2.2 \\ 0.1 & 2.1 \\ 0.15 & 1.5 \\ 0.2 & 1.4 \\ 0.25 & 1.5 \\ 0.3 & 1.1 \\ 0.35 & 1.5 \\ 0.4 & 1.7 \\ 0.45 & 1.75 \\ 0.5 & 2 \\ 0.55 & 2.2 \\ 0.6 & 2.1 \\ 0.65 & 1.5 \\ 0.7 & 1.4 \\ 0.75 & 1.5 \\ 0.8 & 1.1 \\ 0.85 & 1.5 \\ 0.9 & 1.7 \\ 0.95 & 1.75 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$$

Bsp.: Numerische Fourier-Analyse:
A = Matrix der Messwerte, t = 1. Spalte, Messwert = 2. Spalte
Unterteilung einer Periode in N = 10 Intervalle.
Berechnung der ersten 5 Fourier-Koeffizienten n = 5, a_0, a_1,…a_5, b_1…b_5
Die Berechnung ist nur sinnvoll wenn n < N/2, der 5. Koeffizient ist daher bereits zweifelhaft. a, b = Vektoren der Fourier-Koeffizienten.
Anp1(t) = Anpassung mit Fourier-Reihe.

$$\mathrm{Anp1}(t) := a0 + \sum_{k=1}^{5} \left(a_k \cdot \cos(k \cdot \omega \cdot t) + b_k \cdot \sin(k \cdot \omega \cdot t)\right)$$

$n := 1..5$

$N := 10$

$a0 := 1.67\!\!\!\;\text{5}$

$\tau := 0.5$

$\omega := \dfrac{2\pi}{\tau}$

$k := 0..20$

$$a_n := \frac{2}{N} \cdot \sum_{k=0}^{N-1} A_{k,1} \cdot \cos\left(n\, \frac{2 \cdot \pi}{\tau} \cdot A_{k,0}\right)$$

$$b_n := \frac{2}{N} \cdot \sum_{k=0}^{N-1} A_{k,1} \cdot \sin\left(n\, \frac{2 \cdot \pi}{\tau} \cdot A_{k,0}\right)$$

Matrix der Fourier-Keffizienten: (die ersten Koeffizienten mit dem Wert 0 sind zu ignorieren)

$$a = \begin{pmatrix} 0 \\ 0.384 \\ -1.631 \times 10^{-3} \\ -0.119 \\ 0.077 \\ -0.03 \end{pmatrix} \qquad b = \begin{pmatrix} 0 \\ 0.164 \\ 0.076 \\ 0.096 \\ -0.058 \\ 0 \end{pmatrix}$$