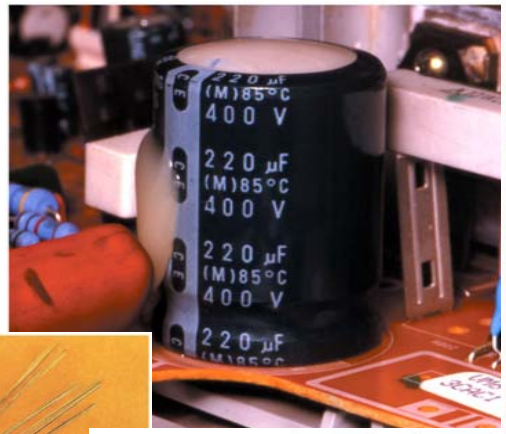
ELEKTRIZITÄT UND MAGNETISMUS

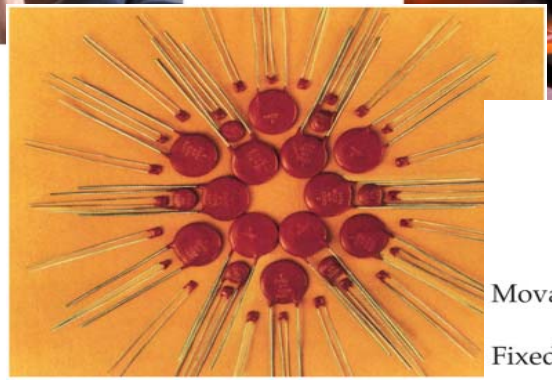
24. Elektrostatische Energie und Kapazität (Electrostatic energy and capacitance)

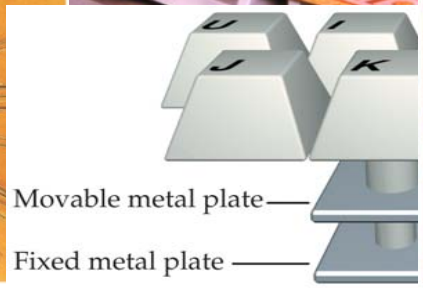
Tipler-Mosca

24.1 Die elektrische Energie (Electrostatic potential energy)
24.2 Die Kapazität (Capacitance)
24.3 Speicherung elektrischer Energie (The storage of electrical energy)

24.4 Kondensatoren, Batterien, und elektrische Stromkreise (Capacitors, batteries, and circuits)
24.5 Dielektrika (Dielectrics)
24.6 Molekulare Betrachtungen von Dielektrika (Molecular view of a dielectric)







Um eine positive Ladung q aus großer Entfernung ($\phi(\infty) = 0$) in ein Gebiet zu bringen, in dem sich schon andere positive Ladungen befinden, muß die Arbeit $q\phi$ verrichtet werden (dabei ist ϕ das Potential der umliegenden Ladungen an dem Punkt, an dem die betrachtete Ladung zu liegen kommt. Die dabei verrichtete Arbeit ist dann in Form von elektrischer Energie gespeichert.

Wenn ein isolierter Leiter mit einer positiven Ladung geladen wird, wächst sein Potential $\Rightarrow$

$$\frac{\text{Ladung eines Leiters}}{\text{gegen unendlich gemessenes Potential des Leiters}} = \text{Kapazität des Leiters}$$

Kondensator: enthält zwei voneinander isolierte Leiter, die eng benachbart sind $\Leftrightarrow$ dient zur Speicherung von Ladung bzw. Energie.

Leidener-Flasche = Ur-Kondensator = Glasflasche, die innen und außen mit einer Metallfolie beschichtet ist

24.1 Die elektrische Energie (Electrostatic potential energy)

Punktladung q_1 am Punkt P1 $\Rightarrow$ Potential im Punkt P2 im Abstand $r_{1\leftrightarrow 2}$ $\phi_2 = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q_1}{r_{1\leftrightarrow 2}}$;

zweite Punktladung q_2 aus dem Unendlichen (dort zunächst ruhend) zu P2 (hier dann ruhend) gebracht $\Rightarrow$

notwendige Arbeit $W_2 = q_2\phi_2 = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q_1 q_2}{r_{1\leftrightarrow 2}}$;

Potential ϕ_3 an einem weiteren Punkt P3 mit Abstand $r_{1\leftrightarrow 3}$ von P1 und $r_{2\leftrightarrow 3}$ von P2: $\phi_3 = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q_1}{r_{1\leftrightarrow 3}} + \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q_2}{r_{2\leftrightarrow 3}}$ $\Rightarrow$

dritte Punktladung q_3 aus dem Unendlichen (dort zunächst ruhend) zu P3 (hier dann ruhend) gebracht $\Rightarrow$

$$W_3 = q_3\phi_3 = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q_3 q_1}{r_{1\leftrightarrow 3}} + \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q_3 q_2}{r_{2\leftrightarrow 3}}$$

Gesamtenergie zum Zusammenbringen der drei Ladungen = elektrische Energie E_{el} des Systems

$$E_{el} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q_1 q_2}{r_{1\leftrightarrow 2}} + \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q_3 q_1}{r_{1\leftrightarrow 3}} + \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q_3 q_2}{r_{2\leftrightarrow 3}}$$, unabhängig von der Reihenfolge

The electrostatic potential energy of a system of point charges is the work needed to bring the charges from an infinite separation to their final positions.

ELECTROSTATIC POTENTIAL ENERGY OF A SYSTEM

da $E_{el} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q_1 q_2}{r_{1\leftrightarrow 2}} + \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q_3 q_1}{r_{1\leftrightarrow 3}} + \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q_3 q_2}{r_{2\leftrightarrow 3}} =$

$$= \frac{1}{2}(E_{el} + E_{el}) = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q_1 q_2}{r_{1\leftrightarrow 2}} + \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q_3 q_1}{r_{1\leftrightarrow 3}} + \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q_3 q_2}{r_{2\leftrightarrow 3}} + \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q_1 q_2}{r_{1\leftrightarrow 2}} + \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q_3 q_1}{r_{1\leftrightarrow 3}} + \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q_3 q_2}{r_{2\leftrightarrow 3}}\right) =$$

$$= \frac{1}{2}\left[q_1\left(\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q_2}{r_{1\leftrightarrow 2}} + \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q_3}{r_{1\leftrightarrow 3}}\right) + q_2\left(\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q_3}{r_{2\leftrightarrow 3}} + \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q_1}{r_{1\leftrightarrow 2}}\right) + q_3\left(\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q_1}{r_{1\leftrightarrow 3}} + \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q_2}{r_{2\leftrightarrow 3}}\right)\right] =$$

$$= \frac{1}{2}\left[q_1\left(\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q_2}{r_{1\leftrightarrow 2}} + \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q_3}{r_{1\leftrightarrow 3}}\right) + q_2\left(\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q_3}{r_{2\leftrightarrow 3}} + \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q_1}{r_{1\leftrightarrow 2}}\right) + q_3\left(\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q_1}{r_{1\leftrightarrow 3}} + \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q_2}{r_{2\leftrightarrow 3}}\right)\right] = \frac{1}{2}\left[q_1\phi_1 + q_2\phi_2 + q_3\phi_3\right]$$

$$U = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n} q_i V_i \qquad \boxed{E_{el} = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n} q_i \phi_i} \qquad 24\text{-}2$$

Elektrische Energie E_{el} eines Systems von n Punktladungen wobei ϕ_i das Potential aller anderen Ladungen am Ort der i-ten Ladung ist

ELECTROSTATIC POTENTIAL ENERGY OF A SYSTEM OF POINT CHARGES

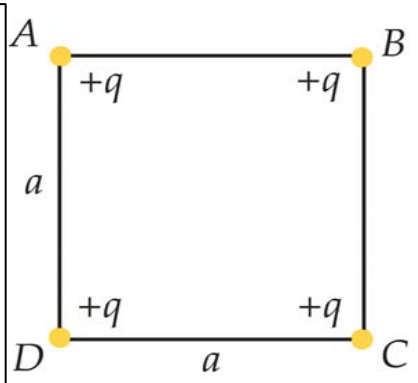
$$U = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n} Q_i V_i \qquad 24\text{-}4$$

Elektrische Energie E_{el} eines Systems von n Leitern mit jeweils Potential ϕ_i und Ladung q_i

ELECTROSTATIC POTENTIAL ENERGY OF A SYSTEM OF CONDUCTORS

Beispiel 24.1: Die Arbeit beim Verschieben von Punktladungen

Quadrat mit Seitenlänge *a* und vier Eckpunkten *A*, *B*, *C*, und *D*.
Vier gleich große positive Punktladungen *q*, anfangs in unendlichem Abstand in Ruhe.
Gesucht: a) die Gesamtarbeit um die vier Ladungen an die vier Ecken des Quadrats zu bringen, b) Überprüfung von Gl. (24.2) $\Rightarrow$



Für alle vier Ladungen im unendlichen Abstand voneinander $\phi_{q_i} = 0$

Teil a) Erste Ladung vom unendlichen im Punkt *A* gebracht $\Rightarrow$ $\phi_A = 0$ $\Rightarrow$ $W_A = 0$

Zweite Ladung an den Punkt B gebracht $\Rightarrow$ $W_B = q\phi_B = q\left(\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q}{a}\right) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q^2}{a}$

dritte Ladung an den Punkt C gebracht $\Rightarrow$ $W_C = q\phi_C = q\left(\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q}{a} + \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q}{\sqrt{2}a}\right) = \left(1+\frac{1}{\sqrt{2}}\right)\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q^2}{a}$,

vierte Ladung an den Punkt D gebracht $\Rightarrow$ $W_D = q\phi_D = q\left(\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q}{a} + \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q}{\sqrt{2}a} + \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q}{a}\right) = \left(2+\frac{1}{\sqrt{2}}\right)\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q^2}{a}$,

$\Rightarrow$ Gesamtarbeit $W = W_A + W_B + W_C + W_D = \left(4+\sqrt{2}\right)\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q^2}{a}$

Teil b) Überprüfung mittels Gl. (24.2) $E_{\text{el}} = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{4} q_i\phi_i$

für jede der vier Ladungen gilt $\phi_i = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q}{a} + \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q}{\sqrt{2}a} + \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q}{a} = \left(2+\frac{1}{\sqrt{2}}\right)\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q}{a}$

$\Rightarrow$ $E_{\text{el}} = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{4} q_i\phi_i = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{4}\left[q_i\left(2+\frac{1}{\sqrt{2}}\right)\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q}{a}\right] = \frac{1}{2}\left(2+\frac{1}{\sqrt{2}}\right)\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q}{a}\sum_{i=1}^{4} q_i = \frac{1}{2}\left(2+\frac{1}{\sqrt{2}}\right)\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q}{a}4q = \left(4+\sqrt{2}\right)\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q^2}{a}$

24.2 Die Kapazität (Capacitance)

Das Potential ϕ einer Ladung q auf einem einzelnen, isolierten Leiter ist proportional zur Ladung q und hängt von der Größe und von der Gestalt des Leiters ab $\Leftrightarrow$ bei gegebenem ϕ kann ein Leiter umso mehr Ladung tragen, je größer sein Oberfächeninhalt ist. Beispiel kugelförmiger Leiter mit Ladung $q \Rightarrow \phi = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q}{r}$ wobei Vereinbarung $\phi(\infty) = 0 \Leftrightarrow$ theoretisch keine Schwierigkeit, praktisch aber $\phi(\infty) = 0$ nicht meßbar $\Rightarrow$
praktisch nur Potentialdifferenzen $\Delta\phi = \phi_b - \phi_a$ zwischen zwei Punkten *a* und *b* meßbar $\Rightarrow$ Spannung *U*

Die elektrische Spannung zwischen zwei Punkten a und b mit den Potentialen ϕ_a und ϕ_b beträgt $U = \phi_b - \phi_a$

Das Verhältnis der Ladung *q*, die sich auf einem Leiter befindet, zu seiner elektrischen Spannung *U* gegenüber einem Referenzpunkt heißt seine Kapazität $C = q/U$

$$C = \frac{Q}{V} \qquad 24\text{-}5$$

DEFINITION—CAPACITANCE

Beispiel: Kapazität eines kugelförmigen Leiters

(Referenzpunkt im ∞) $C = \frac{q}{U} = q \Big/ \left(\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q}{r}\right) = 4\pi\varepsilon_0 r$,

SI-Einheit der Kapazität: Farad (F) $\Leftrightarrow$ $1\ \mathrm{C\ V^{-1}} = 1\ \mathrm{F}$

aus $C = 4\pi\varepsilon_0 r \Rightarrow \varepsilon_0 = \frac{C}{4\pi r} \Rightarrow \varepsilon_0 = 8.854\times10^{-12}\ \mathrm{C^2\ N^{-1}\ m^{-2}} = 8.854\times10^{-12}\ \mathrm{F\ m^{-1}} = 8.854\ \mathrm{pF\ m^{-1}}$

Kondensatoren

Kondensator: Anordnung von zwei Leitern, die beide die gleich große, aber entgegengesetzte Ladung tragen können. Zur Berechnung der Kapazität von Kondensatoren wird auf beide Leiter gleich große, aber entgegengesetzte Ladungen aufgebracht $\Rightarrow$
die Spannung *U* wird über das zwischen den Leitern entstehende elektrische Feld $\vec{E}$ ermittelt.

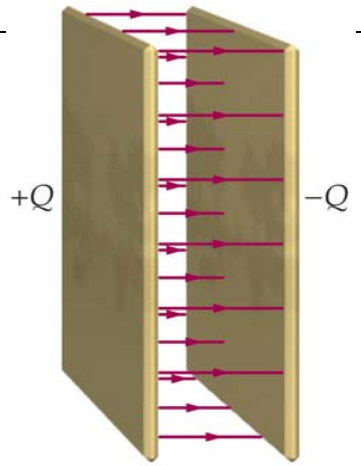
Plattenkondensatoren

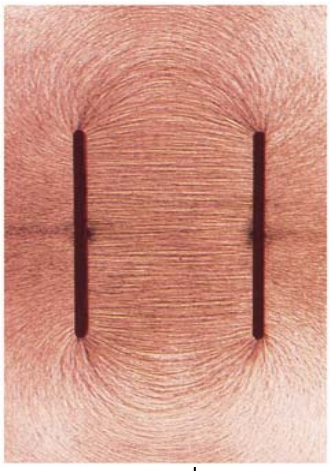
Plattenkondensator: zwei parallele leitende Platten in Abstand d zueinander, mit Flächeninhalt A der der anderen Platte zugewandten Seite jeder Platte.

Eine Platte geladen mit der Ladung $+q$, die andere mit $-q$

$\Rightarrow$ Ladungen homogen verteilt, ziehen sich an;

Abstand d üblicherweise klein $\Rightarrow$ elektrisches Feld E zwischen den Platten $\triangleq$ Feld zwischen zwei unendlich ausgedehnten Ebenen mit jeweils $+q$ und $-q$ $\Rightarrow$ siehe Gl. (22.20):





jede Platte liefert einen Beitrag $E = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0}$ wobei $\sigma = \frac{q}{A}$ $\Rightarrow$ Gesamtfeld zwischen den Platten $E = \frac{\sigma}{\varepsilon_0}$

$\Leftrightarrow$ homogen $\Rightarrow$ mit Gl. (24.5) und (23.2b) $\Rightarrow$ $U = \Delta\phi = Ed = \frac{\sigma}{\varepsilon_0} d = \frac{qd}{\varepsilon_0 A}$ $\Rightarrow$

Kapazität $C = \frac{q}{U} = \frac{\varepsilon_0 A}{d}$

$$C = \frac{Q}{V} = \frac{\epsilon_0 A}{d} \qquad 24\text{-}10$$

CAPACITANCE OF A PARALLEL-PLATE CAPACITOR

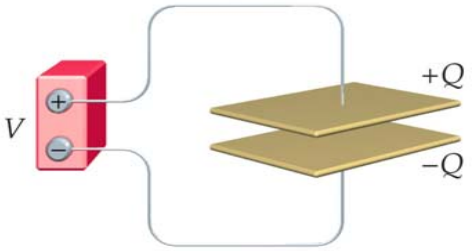
Beispiel 24.2: Die Kapazität eines Plattenkondensators

Plattenkondensator mit quadratischen Platten, Seitenlänge $\ell = 10$ cm, Abstand $d = 1$ mm.
Gesucht: a) Kapazität C des Kondensators, b) Ladung q bei Aufladung mit $U = 12$ V $\Rightarrow$

Teil a) Plattenfläche $A = \ell^2$ $\Rightarrow$ aus Gl. (24.10) $C = \frac{\varepsilon_0 A}{d} = \frac{\left(8.85\times10^{-12}\ \text{pF m}^{-1}\right)\left(0.1\,\text{m}\right)^2}{0.001\,\text{m}}$

$\Rightarrow C = 88.5$ pF

Teil b) aus Gl. (24.6) $C = q/U$ $\Rightarrow$ $q = CU = \left(88.5\ \text{pF}\right)\left(12\ \text{V}\right) = 1.06\times10^{-9}$ C $= 1.06$ nC

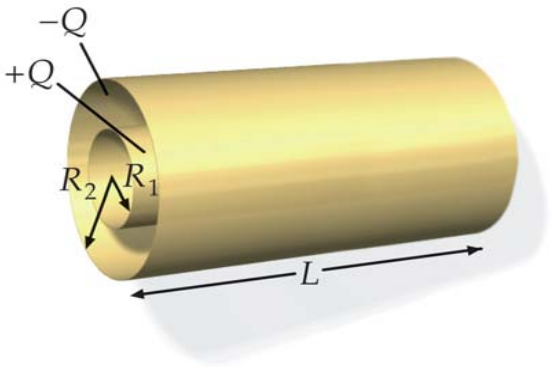


Zylinderkondensatoren

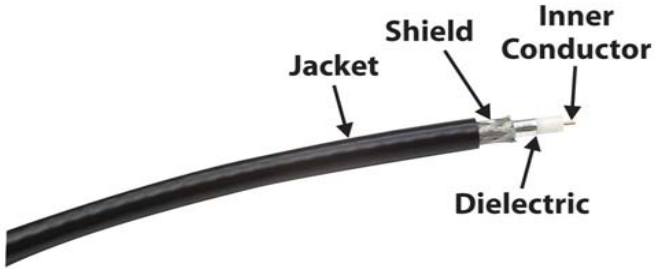
Zylinderkondensator: innen kleiner leitender Zylinder oder Draht mit Radius R_1 und außen konzentrischer Holhzylinder mit Radius R_2, jeweils mit der Länge L

$$C = \frac{2\pi\epsilon_0 L}{\ln(R_2/R_1)} \qquad 24\text{-}11$$

CAPACITANCE OF A CYLINDRICAL CAPACITOR

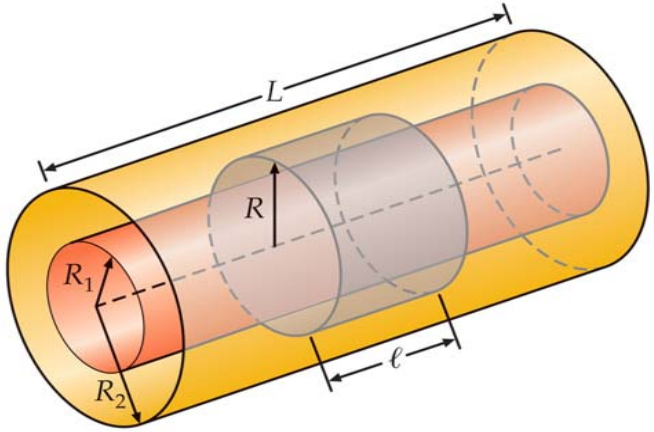


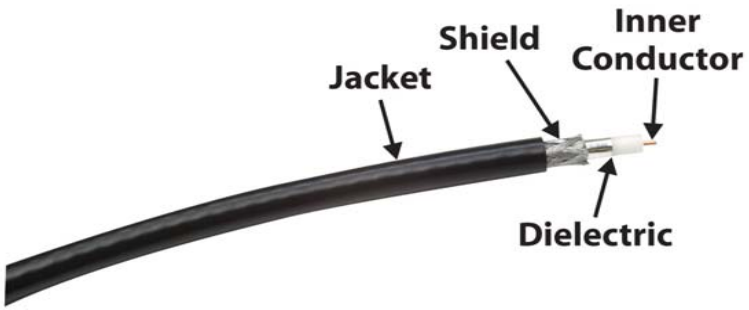
Beispiel Koaxial-Kabel: langer Zylinderkondensator mit einem Volldraht als Innenleiter und einer Drahtgeflechtabschirmung als Außenleiter.



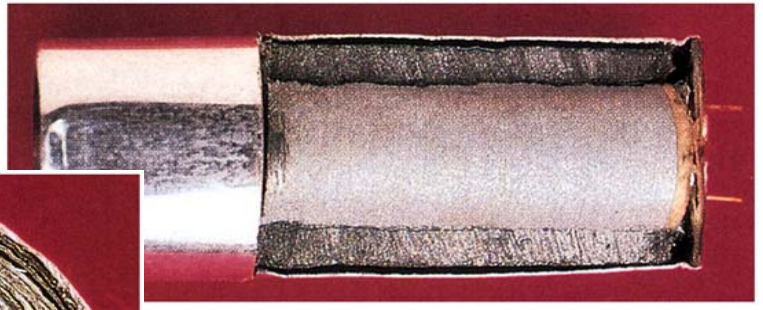
Beispiel 24.3: Die Kapazität eines Zylinderkondensators

mögliches Prüfungsbeispiel



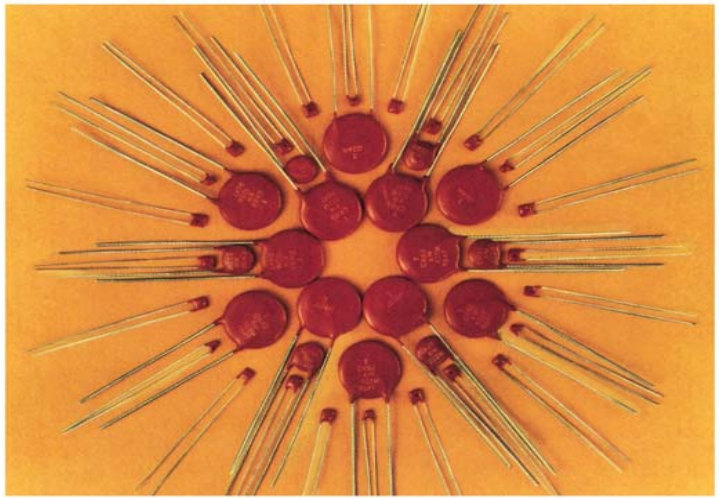


Koaxialkabel

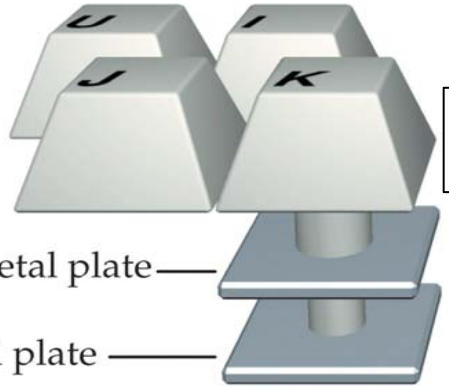


Schnitt durch ein Folienkondensator

Drehkondensator



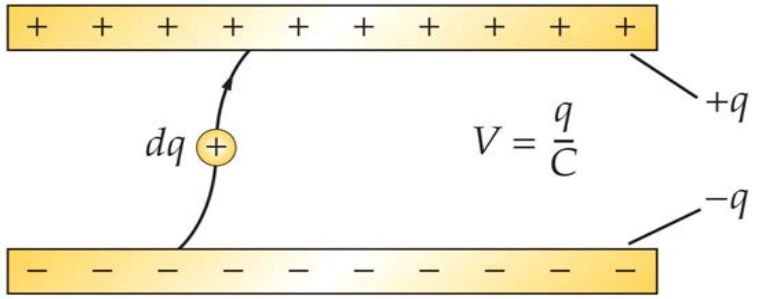
Keramikkondensatoren



Kapazitiver Schalter einer Computertastatur

24.3 Speicherung elektrischer Energie (The storage of electrical energy)

Beim Laden des Kondensators muß Arbeit verrichtet werden $\Rightarrow$ diese Arbeit wird als elektrische Energie gespeichert



Wenn eine kleine positive Ladung dq vom negativen Leiter zum positiven gebracht wird, steigt ihre elektrische Energie um

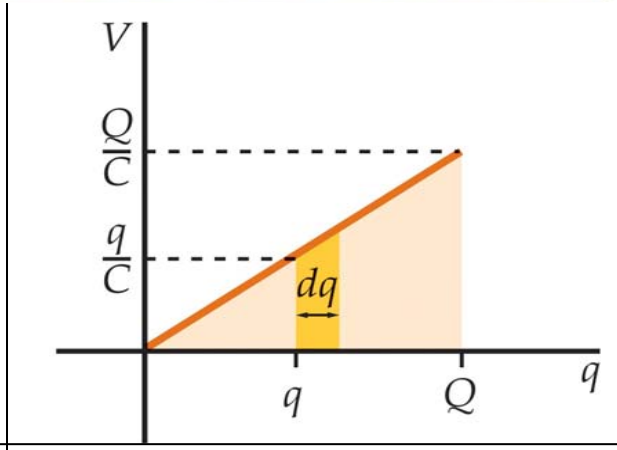
$dE_{el} = U dq = \frac{q}{C} dq$, wobei U die Spannung zwischen den Leitern ist

$\Rightarrow$ Gesamtzuwachs der elektrischen Energie $E_{el} = \int dE_{el}$ wenn q von null bis zur Endladung Q steigt $\Rightarrow$

$E_{el} = \int dE_{el} = \int_0^Q \frac{q}{C} dq = \frac{1}{2}\frac{Q^2}{C}$ $\Leftrightarrow$ gespeicherte elektrische Energie

mit Hilfe von $C = Q/U$ $\Rightarrow$

$E_{el} = \frac{1}{2}\frac{Q^2}{C} = \frac{1}{2}QU = \frac{1}{2}CU^2$



Arbeit zum Laden eines Kondensators $= \int_0^Q U dq$

$$U = \frac{1}{2}\frac{Q^2}{C} = \frac{1}{2}QV = \frac{1}{2}CV^2 \qquad 24\text{-}12$$

ENERGY STORED IN A CAPACITOR

Beispiel 24.4: Laden eines Plattenkondensators mit einer Batterie

Ein Plattenkondensator mit quadratischen Platten, Seitelänge $\ell = 14$ cm, Abstand $d_i = 2.0$ mm, wird an eine Batterie angeschlossen und auf $U_i = 12$ V geladen.

Gesucht: a) die Ladung q_i des Kondensators, b) die Energie $E_{el,i}$ des Kondensators, $\Rightarrow$

c) Batterie vom Kondensator getrennt, Abstand der Platten erhöht auf $d_f = 3.5$ mm $\Leftrightarrow$

gesucht: die Energieerhöhung ΔE_{el}

Teil a) aus Gl. (24.10) $C = \frac{q}{U} = \frac{\varepsilon_0 A}{d} \Rightarrow q_i = \frac{\varepsilon_0 A}{d_i} U_i$ mit $A = \ell^2 \Rightarrow q_i = \frac{\left(8.85 \text{ pF m}^{-1}\right)\left(0.14 \text{ m}\right)^2}{\left(0.002 \text{ m}\right)}\left(12 \text{ V}\right) = 1.04 \text{ nC}$

Teil b) aus Gl. (24.12) $E_{el,i} = \frac{1}{2} q_i U_i = \frac{1}{2}\left(1.04 \text{ nC}\right)\left(12 \text{ V}\right) = 6.24 \text{ nJ}$

Teil c) elektrisches Feld zwischen den Platten aus Gl. (24.9) $E_i = \frac{\sigma}{\varepsilon_0} = \frac{q_i}{\varepsilon_0 A} \Rightarrow$ Abstand erhöht von d_i auf $d_f \Rightarrow$

da q_i bzw. σ konstant bleibt $\Rightarrow E_f = E_i \Rightarrow$ mit Gl. (24.9) $U = Ed \Rightarrow E_f = \frac{U_f}{d_f} = \frac{U_i}{d_i} = E_i \Rightarrow U_f = \frac{U_i}{d_i} d_f \Rightarrow$

potentielle elektrische Energie $E_{el,f} = \frac{1}{2} q_i U_f = \frac{1}{2} q_i \frac{U_i}{d_i} d_f = E_{el,i} \frac{d_f}{d_i} \Rightarrow$

Zunahme der potentiellen elektrischen Energie $\Delta E_{el} = E_{el,f} - E_{el,i} = E_{el,i}\left(\frac{d_f}{d_i} - 1\right) = \left(6.24 \text{ nJ}\right)\left(\frac{3.5 \text{ mm}}{2.0 \text{ mm}} - 1\right) = 4.68 \text{ nJ}.$

Andere Betrachtungsweise: aus Gl. (24.9) $U = Ed \Rightarrow E_i = \frac{U_i}{d_i} = \frac{12 \text{ V}}{2 \text{ mm}} = 6 \text{ kV mm}^{-1} \Rightarrow$

von der unteren Platte erzeugtes Feld auf die $E_{i,u} = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0} = \frac{1}{2} E_i = 3 \text{ kV mm}^{-1} \Rightarrow$

auf die obere Platte ausgeübte Kraft $F = q_i E_{i,u} = \left(1.04 \text{ nC}\right)\left(3 \text{ kV mm}^{-1}\right) = 3.12 \text{ nJ} \Rightarrow$

verrichtete Arbeit um die obere Platte zu verschieben $W = \Delta E_{el} = F\left(d_f - d_i\right) = \left(3.12 \text{ nJ}\right)\left(1.5 \text{ mm}\right) = 4.68 \text{ nJ}$

Die Energie des elektrischen Feldes

Kondensator wird geladen $\Rightarrow$ elektrisches Feld zwischen den Kondensatorplatten wird aufgebaut $\Rightarrow$
Arbeit zum Laden des Kondensators = Arbeit zum Aufbau des elektrischen Feldes $\Rightarrow$
im Kondensator gespeicherte elektrische Energie = Energie des elektrischen Feldes

Plattenkondensator: aus Gl. (24.9) $U = Ed$, aus Gl. (24.10) $C = \frac{\varepsilon_0 A}{d}$ $\Rightarrow$

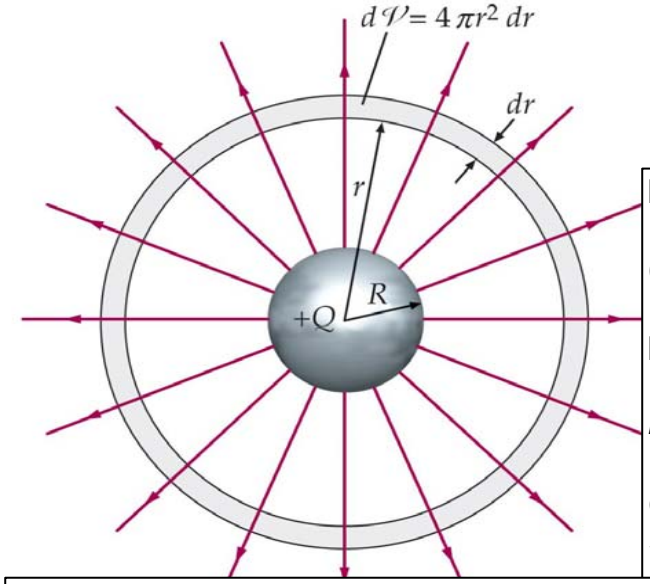
aus Gl. (24.12) $E_{\text{el}} = \frac{1}{2}CU^2 = \frac{1}{2}\frac{\varepsilon_0 A}{d}(Ed)^2 = \frac{1}{2}\varepsilon_0 E^2 Ad = \frac{1}{2}\varepsilon_0 E^2 V$ wobei $V = Ad$ Volumen zwischen den Plattenflächen

$\Rightarrow$ Energiedichte = Energie pro Volumseinheit $w_{el} = \frac{E_{\text{el}}}{V} = \frac{1}{2}\varepsilon_0 E^2$

gültig für beliebige elektrische Felder

$$u_e = \frac{energy}{volume} = \frac{1}{2}\,\epsilon_0\,E^2 \qquad 24\text{-}13$$

ENERGY DENSITY OF AN ELECTROSTATIC FIELD



Beispiel: Energie des elektrischen Feldes eines kugelförmigen Leiters mit Radius R,

geladen mit der Ladung Q $\Rightarrow$ aus Gl. (24.12) $E_{\text{el}} = \frac{1}{2}QU = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{Q^2}{2r}$;

Elektrisches Feld eines kugelförmigen Leiters (siehe Gl. (22.21a) und Gl. (22.21b)):

$E = 0$ für $r < R$ und $E = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{Q}{r^2}$ für $r > R$ $\Rightarrow$

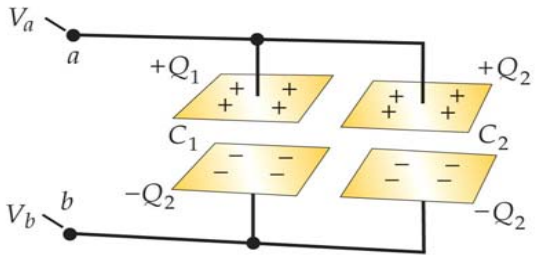
elektrisches Feld kugelsymmetrisch $\Rightarrow$ Hohlkugel mit Radius r und Dicke dr als Volumenelement $\mathrm{d}V = 4\pi r^2 dr$ $\Rightarrow$

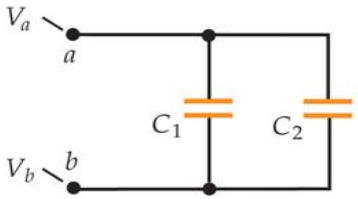
aus Gl. (24.13) Energie dE_{el} im Volumenelement $\Rightarrow$ $\mathrm{d}E_{\text{el}} = w_{\text{el}}\mathrm{d}V = \frac{1}{2}\varepsilon_0 E^2 4\pi r^2 \mathrm{d}r = \frac{1}{2}\varepsilon_0\left(\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{Q}{r^2}\right)^2 4\pi r^2 \mathrm{d}r =$

$= \frac{1}{2}\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{Q^2}{r^2}\mathrm{d}r \quad \Rightarrow \quad E_{\text{el}} = \int w_{\text{el}}\mathrm{d}V = \frac{1}{2}\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}Q^2\int_R^\infty r^{-2}\mathrm{d}r = -\frac{1}{2}\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}Q^2\left.\frac{1}{r}\right|_R^\infty = \frac{1}{2}Q\left(\phi(R)-\phi(\infty)\right) = \frac{1}{2}QU$

24.4 Kondensatoren, Batterien, und elektrische Stromkreise (Capacitors, batteries, and circuits)

Kondensator an einer Batterie (= Ladungspumpe) angeschlossen:
die Spannung zwischen den beiden Anschlüssen einer Batterie heißt allgemein Klemmenspannung, falls keine Ladungen von einem Anschluß zu anderen transportiert werden $\Rightarrow$ Leerlaufspannung $\Rightarrow$ Platten eines ungeladenen Kondensators ($U = 0$) an die Anschlüsse der Batterie angeschlossen $\Rightarrow$ Ladungen von einer Platte zur anderen gepumpt (dabei sinkt die Klemmenspannung) solange bis der Kondensator geladen ist und die Leerlaufspannung wieder erreicht ist.

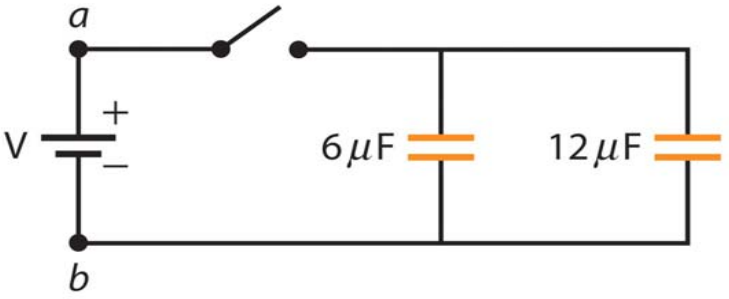


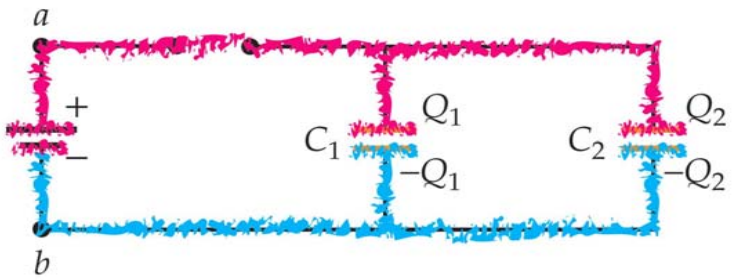


Parallelschaltung von Kondensatoren:
einerseits die oberen Platten beider Kondensatoren mit einem Leitungsdraht verbunden und somit auf gleichem Potential, andererseits die unteren Platten miteinander verbunden und auf gemeinsamen Potential $\Leftrightarrow$ über parallel geschaltete Bauelemente herrscht die gleiche Spannung U.

Beispiel 24.5: Parallelschaltung von Kondensatoren

Parallelschaltung aus einem Kondensator mit $C_1 = 6\ \mu$F und einem Kondensator mit $C_2 = 12\ \mu$F, angeschlossen an einer Batterie mit $U = 12$ V. Gesucht: a) das Potential ϕ an jedem Leiter, b) die Ladung auf jeder Kondensatorplatte, c) die Gesamtladung $\Rightarrow$
Teil a) rot $\leftrightarrow$ Potential $\phi_a = 12$ V, blau $\leftrightarrow$ Potential $\phi_b = 0$ V
Teil b) aus Gl. (24.6) $Q_1 = C_1 U = C_1(\phi_a - \phi_b) = (6\ \mu\text{F})(12\ \text{V}) = 72\ \mu$C,
$Q_2 = C_2 U = C_2(\phi_a - \phi_b) = (12\ \mu\text{F})(12\ \text{V}) = 144\ \mu$C,
Teil c) Gesamtladung $Q = Q_1 + Q_2 = 216\ \mu$C



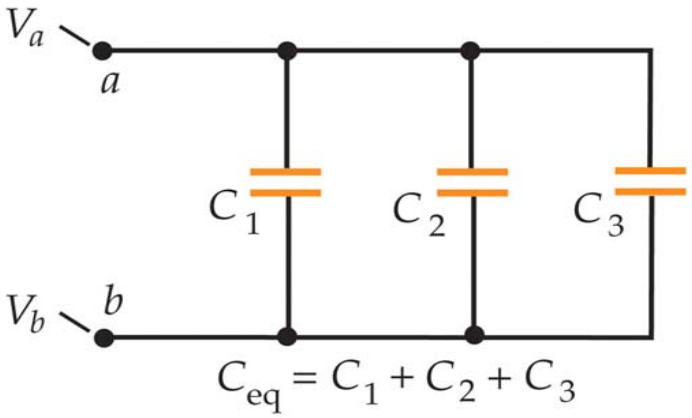


Parallelschaltung von Kondensatoren mit Kapazitäten C_i:

Punkt a und Punkt b an eine Spannungsquelle U angeschlossen $\Rightarrow$ Spannung zwischen den Platten $U = \phi_a - \phi_b$ $\Rightarrow$ auf den Platten der einzenlen Kondensatoren gespeicherte Ladungen $q_i = C_i U$ $\Rightarrow$

gespeicherte Gesamtladung $q = \sum_i q_i = \sum_i C_i U = U \sum_i C_i$

In bestimmten Fällen kann die Kombination von Kondensatoren in einer Schaltung ersetzt werden durch einen Ersatzkondensator mit der Ersatzkapazität $C = \frac{q}{U} = \sum_i C_i$

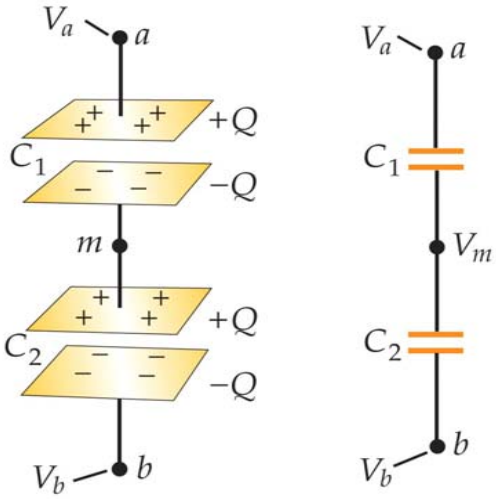


$$C_{eq} = C_1 + C_2 + C_3 + \ldots \qquad 24\text{-}17$$

EQUIVALENT CAPACITANCE FOR CAPACITORS IN PARALLEL

Kondensatorbank zum Speichern von Energie für einen Impulslaser
(Lawrence Livermore National Laboratory)

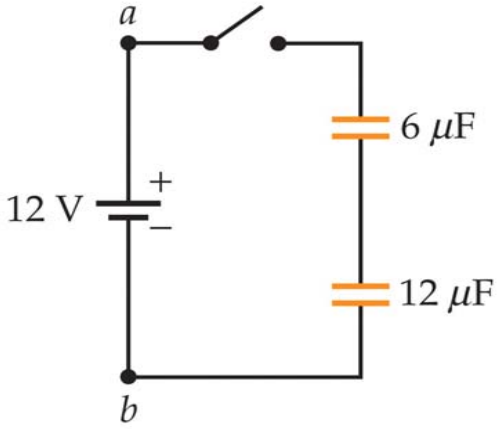
http://www.llnl.gov/nif/project/missions_energy.html
http://www.llnl.gov/

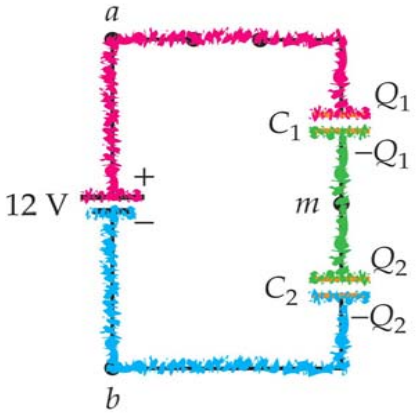


In Reihe (oder in Serie) geschaltete Kondensatoren: die Kondensatoren sind so miteinander verbunden, daß die Summe der Spannung $U_1 = \phi_a - \phi_m$ über Kondensator C_1 und der Spannung $U_2 = \phi_m - \phi_b$ über Kondensator C_2 gleich der Gesamtspannung $U = \phi_a - \phi_b$ ist.
Die Gesamtladung der beiden miteinander verbundenen Kondensatorplatten in der Mitte ist null.

Beispiel 24.6: Reihenschaltung von Kondensatoren

Schaltung auf einem Kondensator mit $C_1 = 6\ \mu$F, einem Kondensator mit $C_2 = 12\ \mu$F, einer Batterie mit $U = 12$ V, und einem Schalter. Am Anfang Kondensatorer ungeladen, danach geladen durch Betätigung des Schalters, bis die Batterie wieder die Leerlaufspannung U hat $\Rightarrow$ Gesucht: a) Potential ϕ_i auf jedem der Leiter, b) Ladung Q_i auf jeder Kondensatorplatte, c) Gesamtladung Q :





Teil a) rot $\leftrightarrow$ Potential $\phi_a = 12$ V, blau $\leftrightarrow$ Potential $\phi_b = 0$ V, grün $\leftrightarrow$ Potential ϕ_m
Teil b) Spannung über Kondensator C_1: $U_1 = \phi_a - \phi_m$,
Spannung über Kondensator C_2: $U_2 = \phi_m - \phi_b$ $\Rightarrow$
Ladung auf C_1: $Q_1 = C_1 U_1 = C_1(\phi_a - \phi_m)$,
Ladung auf C_2: $Q_2 = C_2 U_2 = C_2(\phi_m - \phi_b)$
$\Rightarrow$ Elimination von ϕ_m $\Rightarrow$ $\phi_a - \phi_m = \frac{Q_1}{C_1}$ bzw. $\phi_m - \phi_b = \frac{Q_2}{C_2}$ $\Rightarrow$

$\phi_a - \phi_b = \frac{Q_1}{C_1} + \frac{Q_2}{C_2} = U$; im grünen Gebiet $(-Q_1) + Q_2 = 0$ $\Rightarrow$ $Q_1 = Q_2 = Q$ $\Rightarrow$ eingesetzt $U = \frac{Q}{C_1} + \frac{Q}{C_2} = Q\left(\frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2}\right)$

$$\Rightarrow \quad Q = \frac{U}{\left(\frac{1}{C_1}+\frac{1}{C_2}\right)} = \frac{12\ \text{V}}{\left(\frac{1}{6\ \mu\text{F}}+\frac{1}{12\ \mu\text{F}}\right)} = 48\ \mu\text{C} \quad \Rightarrow \quad \text{Teil c) } Q_1 = Q$$

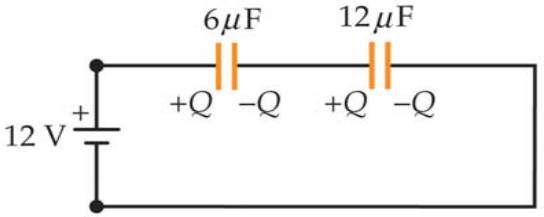
Reihenschaltung von Kondensatoren mit Kapazitäten C_i:

Punkt a und Punkt b an eine Spannungsquelle U angeschlossen $\Rightarrow$ Spannung zwischen den Platten $U = \phi_a - \phi_b$ $\Rightarrow$ Ladungen werden von der oberen Platte des ersten Kondensators auf die untere Platte von des letzten Kondensators gepumpt $\Rightarrow$ die obere Platte erhält die Ladung $+q$, die untere die Ladung $-q$.

Die Ladung $+q$ auf der oberen Platte von C_1 induziert eine gleich große negative Ladung $-q$ auf der unteren Platte von C_1, die aus dem Abzug von Elektronen aus der oberen Platte von C_2 stammt und somit dort eine Ladung $+q$ erzeugt, die eine Ladung $-q$ in der unteren Platte von C_2 induziert, usw. $\Rightarrow$ Spannungen U_i an den einzelnen Kondensatorer $U_i = \frac{q}{C_i}$ $\Rightarrow$ Gesamtspannung $U = \sum_i U_i = \sum_i \frac{q}{C_i} = q\sum_i \frac{1}{C_i} = \frac{q}{C}$ $\Rightarrow$ Kombination von Kondensatoren ersetzbar durch Ersatzkondensator mit der Ersatzkapazität gegeben durch $\frac{1}{C} = \sum_i \frac{1}{C_i}$

$$\frac{1}{C_{\text{eq}}} = \frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2} + \frac{1}{C_3} + \ldots \qquad 24\text{-}21$$

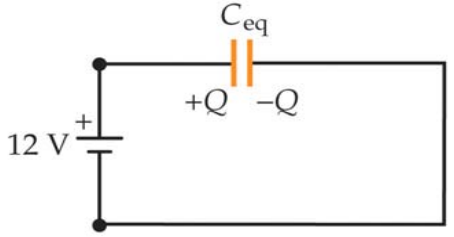
EQUIVALENT CAPACITANCE FOR EQUALLY CHARGED CAPACITORS IN SERIES



Beispiel 24.7: Die Ersatzschaltung bei Reihenschaltung

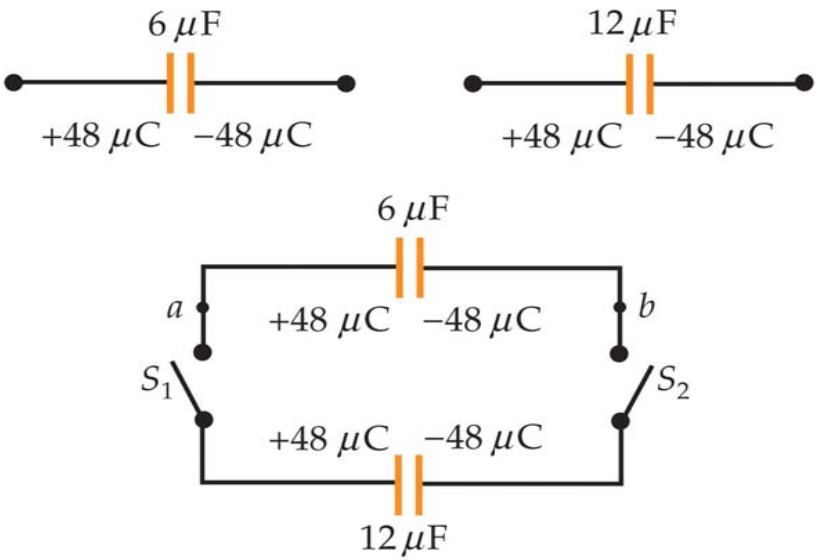
Kondensator $C_1 = 6\ \mu$F und Kondensator $C_2 = 12\ \mu$F, ungeladen, werden in Reihe an einer Batterie mit U=12 V geschaltet. Gesucht: Ersatzkapazität C, Ladung Q an jedem Kondensator C_i und Spannung U_i über diese $\Rightarrow$ aus Gl. (24.21) $\Rightarrow$

$$\frac{1}{C} = \frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2} \quad \Rightarrow \quad C = 4\ \mu\text{F} \quad \Rightarrow \quad Q = CU = 48\ \mu\text{C} \quad \Rightarrow \quad U_1 = \frac{Q}{C_1} = 8\ \text{V},\ U_1 = \frac{Q}{C_1} = 4\ \text{V}$$



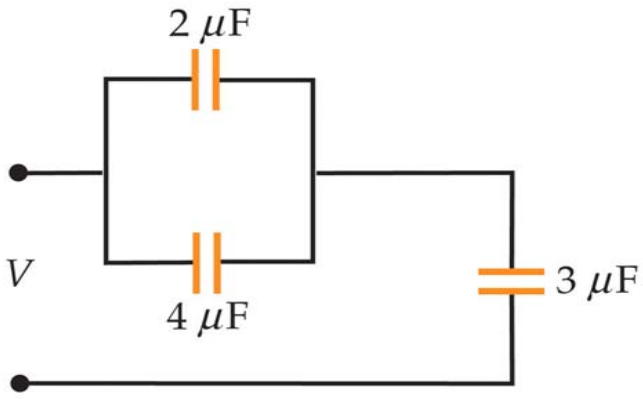
Beispiel 24.8: Parallelschaltung zuvor in Reihe geschlateter Kondensatoren

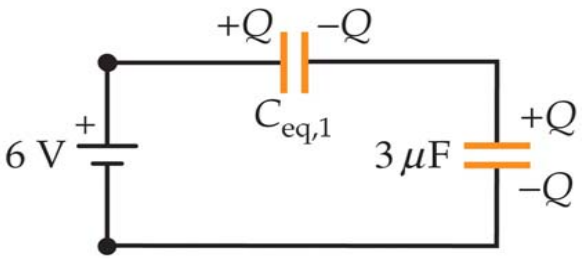
mögliches Prüfungsbeispiel

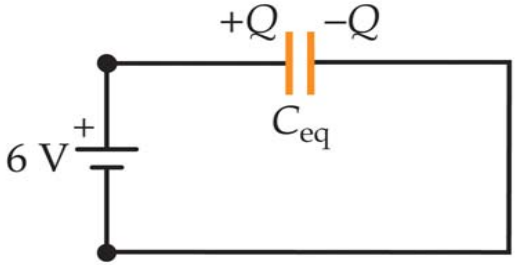


Beispiel 24.9: Parallel- und Reihenschaltung mehrerer Kondensatoren

mögliches Prüfungsbeispiel







24.5 Dielektrika (Dielectrics)

Als Dielektrika werden nicht leitende Materialien (Luft, Glas, Papier, usw.) bezeichnet.

Das elektrische Feld E_0 zwischen den Kondensatorplatten ohne Dielektrikum wird durch das Dielektrikum abgeschwächt:

aus $U = Ed = \frac{E_0}{\varepsilon_{rel}} d = \frac{U_0}{\varepsilon_{rel}} \quad \Rightarrow$

$C = \frac{q}{U} = \frac{q}{U_0 / \varepsilon_{rel}} = \varepsilon_{rel} \frac{q}{U_0} = \varepsilon_{rel} C_0 \quad \Rightarrow$ die Kapazität steigt;

für ein Plattenkondensator

gefüllt mit einem Dielektrikum

$\Rightarrow \; C = \frac{\varepsilon_{rel} \varepsilon_0 A}{d} = \frac{\varepsilon A}{d}$ wobei

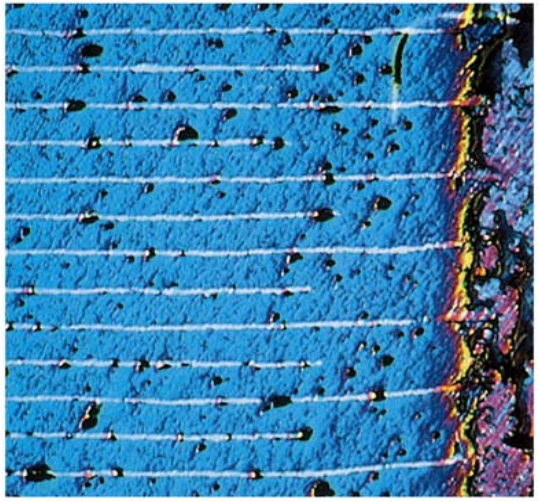
$\varepsilon = \varepsilon_{rel} \varepsilon_0$ Dielektrizitätskonstante des Dielektrikums

$$E = \frac{E_0}{\kappa} \qquad 24\text{-}22$$

ELECTRIC FIELD INSIDE A DIELECTRIC

$$C = \kappa C_0 \qquad 24\text{-}23$$

EFFECT OF A DIELECTRIC ON CAPACITANCE



Dielectric Constants and Dielectric Strengths of Various Materials

Material	Dielectric Constant κ	Dielectric Strength, kV/mm
Air	1.00059	3
Bakelite	4.9	24
Glass (Pyrex)	5.6	14
Mica	5.4	10–100
Neoprene	6.9	12
Paper	3.7	16
Paraffin	2.1–2.5	10
Plexiglas	3.4	40
Polystyrene	2.55	24
Porcelain	7	5.7
Transformer oil	2.24	12

Beispiel 24.10: Ein Dielektrikum in einem Plattenkondensator

Plattenkondensator mit quadratischen Platten, Kantenlänge $\ell = 10$ cm, Abstand $d = 4$ mm:
a) gesucht: Kapazität C_0 ohne Dielektrikum; b) Dielektrikum mit $\varepsilon_{rel} = 2$ und Abmessungen 10 cm × 10 cm × 4 mm eingeführt, gesucht: Kapazität C mit Dielektrikum; c) Dielektrikum mit $\varepsilon_{rel} = 2$ und Abmessungen 10 cm × 10 cm × 3 mm eingeführt, gesucht: Kapazität C mit Dielektrikum $\Rightarrow$

Teil a) Gl. (24.10) $C_0 = \dfrac{\varepsilon_0 A}{d} = \dfrac{\left(8.85\ \text{pF m}^{-1}\right)\left(0.1\,\text{cm}\right)^2}{0.004\ \text{mm}} = 22.1\,\text{pF}$; Teil b) Gl. (24.23) $C = \varepsilon_{rel} C_0 = 44.2$ pF;

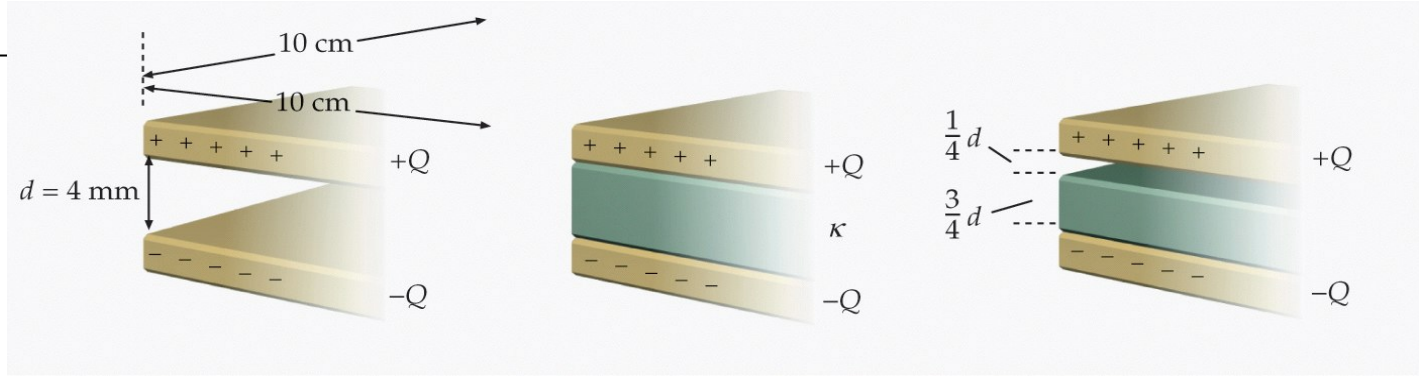
Teil c) $C = \dfrac{Q}{U}$ mit Dielektrikum ergibt sich aus Q ohne Dielektrikum und U nach Einführung des Dielektrikums $\Rightarrow$

U ist die Summe aus der Spannung U_{ZR} im Zwischenraum und aus U_ε über das Dielektrikum: $\Rightarrow$

$$U = U_{ZR} + U_\varepsilon = E_{ZR}\left(\frac{1}{4}d\right) + E_\varepsilon\left(\frac{3}{4}d\right),$$ mit Gl. (24.9) $E_{ZR} = E_0 = \dfrac{\sigma}{\varepsilon_0} = \dfrac{q}{\varepsilon_0 A}$ und mit (Gl. 24.22) $E = \dfrac{E_0}{\varepsilon_{rel}}$ $\Rightarrow$

$$U = E_0\left(\frac{1}{4}d\right) + \frac{E_0}{\varepsilon_{rel}}\left(\frac{3}{4}d\right) = E_0 d\left(\frac{1}{4} + \frac{3}{4\varepsilon_{rel}}\right) = E_0 d\left(\frac{\varepsilon_{rel}+3}{4\varepsilon_{rel}}\right) = U_0\left(\frac{\varepsilon_{rel}+3}{4\varepsilon_{rel}}\right) \Rightarrow$$

$$C = \frac{q}{U} = \frac{q}{U_0\left(\dfrac{\varepsilon_{rel}+3}{4\varepsilon_{rel}}\right)} = C_0\left(\frac{4\varepsilon_{rel}}{\varepsilon_{rel}+3}\right) = \left(22.1\,\text{pF}\right)\left(\frac{8}{5}\right) = 35.4\ \text{pF}$$



Beispiel 24.11: Ein Eigenbau-Kondensator
mögliches Prüfungsbeispiel

Die gespeicherte Energie in Anwesenheit eines Dielektrikums

Gespeicherte Energie aus Gl. (24.12) $E_{el} = \frac{1}{2}qU = \frac{1}{2}CU^2 \Rightarrow$ mit Gl. (24.24) $C = \frac{\varepsilon A}{d}$ und Gl. (24.9) $U = Ed \Rightarrow$

$E_{el} = \frac{1}{2}\frac{\varepsilon A}{d}(Ed)^2 = \frac{1}{2}\varepsilon E^2 Ad = \frac{1}{2}\varepsilon E^2 V \Rightarrow$ Energiedichte $w_{el} = \frac{1}{2}\varepsilon E^2 = \frac{1}{2}\varepsilon_0 \varepsilon_{rel} E^2$

Ein Teil dieser Energie gehört direkt zu dem elektrischen Feld E, und ein Teil rührt von der Polarisation des Dielektrikums her (siehe Abschnitt 24.6)

Beispiel 24.12: Einführung eines Dielektrikums bei getrennter Batterie

Zwei Plattencondensatoren mit $C_{1,0} = 2\ \mu$F und $C_{2,0} = 2\ \mu$F parallel an Batterie mit $U_0 = 12$ V angeschlossen:

Gesucht: a) Ladung $q_{1,0}$ und $q_{2,0}$ auf jedem Kondensator; b) die gespeicherte Gesamtenergie E_{el};

anschließend Kondensatoren von Batterie getrennt, dann in C_2 ein Dielektrikum mit $\varepsilon_{rel} = 2.5$ eingeführt $\Rightarrow$

gesucht: c) Spannung über jeden Kondensator; d) Ladung auf jedem Kondensator; e) die gespeicherte Gesamtenergie:

Teil a) aus Gl. (24.6) $C = \frac{q}{U} \Rightarrow q_{1,0} = C_{1,0}U_0 = (2\ \mu\text{F})(12\ \text{V}) = 24\ \mu\text{C}$ bzw. $q_{2,0} = C_{2,0}U_0 = (2\ \mu\text{F})(12\ \text{V}) = 24\ \mu\text{C}$;

Teil b) aus Gl. (24.12) $E_{el} = \frac{1}{2}qU \Rightarrow E_{el,1,0} = \frac{1}{2}q_{1,0}U_0 = \frac{1}{2}(24\ \mu\text{C})(12\ \text{V}) = 144\ \mu\text{J}$ bzw. $E_{el,2,0} = \frac{1}{2}q_{2,0}U_0 = 144\ \mu\text{J} \Rightarrow$

$E_{el,0} = E_{el,1,0} + E_{el,2,0} = 288\ \mu$J;

Teil c) aus Gl. (24.6) $C = \frac{q}{U} \Rightarrow U = \frac{q}{C} \Rightarrow$ mit Gl. (24.17) $C = C_1 + C_2$ wobei $C_1 = C_{1,0}$ und $C_2 = \varepsilon_{rel}C_{2,0}$

$\Rightarrow C = C_{1,0} + \varepsilon_{rel}C_{2,0} = (2\ \mu\text{F}) + 2.5(2\ \mu\text{F}) = 7\ \mu\text{F} \Rightarrow$ da die parallelgeschalteten Kondensatoren von der Batterie abgetrennt wurden $\Rightarrow q =$ konstant $= q_{1,0} + q_{2,0} = 48\ \mu\text{C} \Rightarrow U = \frac{q}{C} = \frac{48\ \mu\text{C}}{7\ \mu\text{F}} = 6.86$ V;

Teil d) aus Gl. (24.6) $C = \frac{q}{U} \Rightarrow q_1 = C_{1,0}U = (2\ \mu\text{F})(6.86\ \text{V}) = 13.7\ \mu\text{C}$ und $q_2 = C_2U = (5\ \mu\text{F})(6.86\ \text{V}) = 34.3\ \mu\text{C}$;

Teil e) aus Gl. (24.12) $E_{el} = \frac{1}{2}qU \Rightarrow E_{el} = E_{el,1} + E_{el,2} = \frac{1}{2}q_1U + \frac{1}{2}q_2U = \frac{1}{2}(q_1 + q_2)U = \frac{1}{2}(48\ \mu\text{C})(6.86\ \text{V}) = 165\ \mu$J

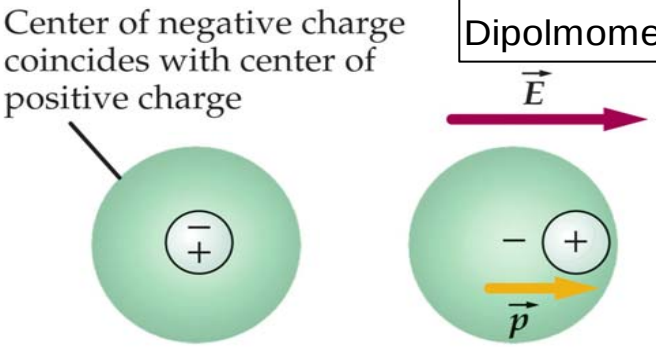
Beispiel 24.13: Einführung eines Dielektrikums bei angeschlossener Batterie mögliches Prüfungsbeispiel

24.6 Molekulare Betrachtungen von Dielektrika (Molecular view of a dielectric)

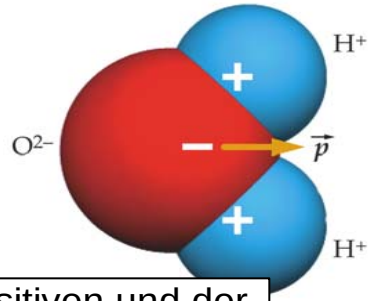
Ein Dielektrikum schwächt das elektrische Feld zwischen den Platten eines Kondensators, da die Moleküle darin ein elektrisches Feld erzeugen, das dem von den Platten erzeugten Feld entgegengerichtet ist.

Nichtpolares Molekül

In Anwesenheit eines äußeren elektrisches Feld ⇒ Molekül polarisiert ⇒ induziertes Dipolmoment

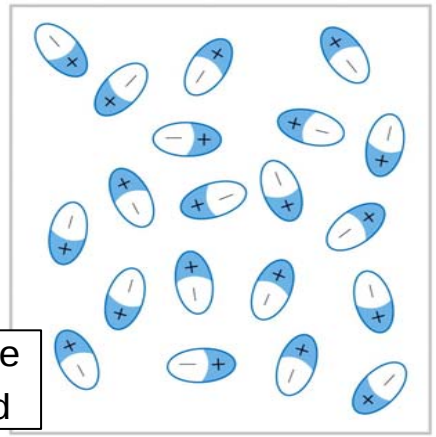


ohne äußeres elektrisches Feld

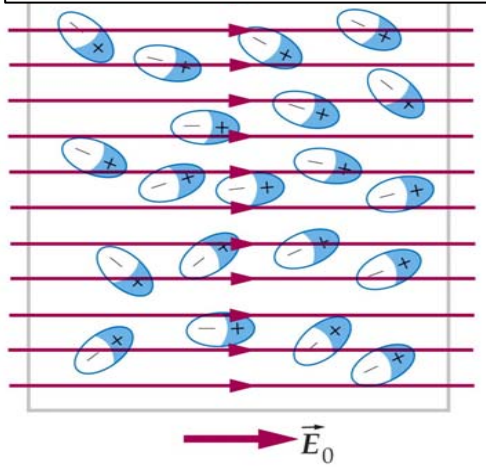


In einigen Molekülen fallen die Mitten der positiven und der negativen Ladung auch ohne äußeres elektrisches Feld zusammen ⇒ permanentes elektrisches Dipolmoment (siehe Abschnitt 21.7)

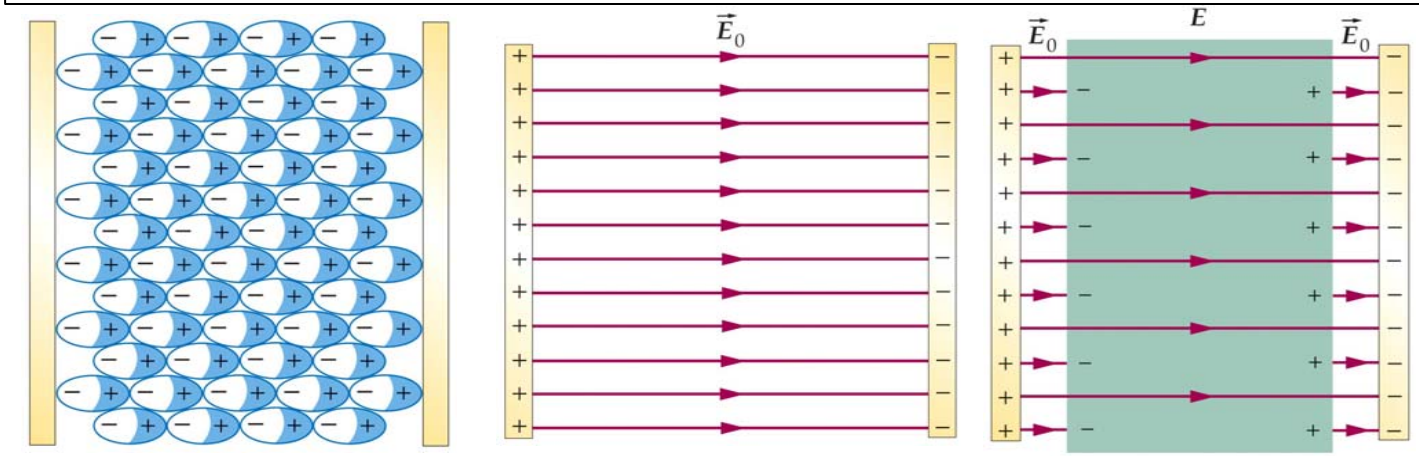
Polares Dielektrikum in Anwesenheit eines äußeren elektrischen Feldes ⇒ die Dipole werden im Feld ausgerichtet (siehe Abschnitt 21.7)



Polares Dielektrikum ohne äußeres elektrisches Feld



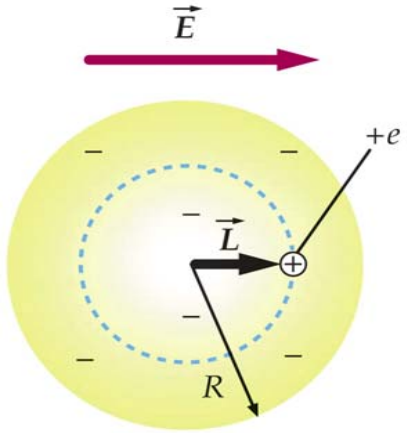
Dielektrikum im Feld eines Kondensators $\Rightarrow$
nichtpolare Moleküle polarisiert $\Rightarrow$ resultierendes Dipolmoment parallel zum Feld,
polare Moleküle durch ausgeübtes Drehmoment ausgerichtet $\Rightarrow$ Ausrichtungsgrad $\sim \frac{pE}{k_B T}$



Gesamtwirkung der Polarisation $\Rightarrow$ an den Oberflächen des Dielektrikums werden in der Nähe der Kondensatorplatten werden Oberflächenladungen erzeugt (gebundene Ladungen) $\Rightarrow$ sie erzeugen ein elektrisches Feld entgegengerichtet zum äußeren elektrischen Feld $\Rightarrow$
das Gesamtfeld wird geschwächt

Beispiel 24.14: Das induzierte Dipolomoment eines Wasserstoffatoms

Wasserstoffatom, bestehend aus Proton als Kern, Ladung $+e$, und Elektron, Ladung $-e$.
Ladungsverteilung kugelsymmetrisch $\Rightarrow$ Atom nicht polar.
Modell: positive Punktladung $+e$ in der Mitte einer homogen geladenen kugelsymmetrischen Ladungswolke mit Radius R und Gesamtladung $-e$. Atom in ein äußeres elektrisches Feld gebracht $\Rightarrow$
Zu zeigen: induziertes Dipolmoment $\sim \vec{E} \Leftrightarrow \vec{p} = \alpha \vec{E}$ wobei α Polarisierbarkeit:



Negative Ladungswolke durch $\vec{E}$ um $\vec{L}$ verschoben $\Rightarrow$ induziertes Dipolmoment $p = eL$;
Berechnung des elektrischen Feldes E_n' der negativen Ladungswolke in einem Abstand L von der Mitte $\Rightarrow$ Anwendung des Gauß'schen Gesetzes $\Phi_{el} = \oint_A E_n' \mathrm{d}A = \frac{q_{innen}}{\varepsilon_0} \Rightarrow$

$$E_n'\left(4\pi L^2\right) = \frac{q_{innen}}{\varepsilon_0} \Rightarrow E_n' = \frac{q_{innen}}{4\pi\varepsilon_0 L^2}$$

Ladung in der homogen geladenen Kugel: $q_{innen} = \rho \frac{4}{3}\pi L^3 = \frac{-e}{\frac{4}{3}\pi R^3}\frac{4}{3}\pi L^3 = -e\frac{L^3}{R^3} \Rightarrow$

$$E_n' = \frac{q_{innen}}{4\pi\varepsilon_0 L^2} = \frac{-e\frac{L^3}{R^3}}{4\pi\varepsilon_0 L^2} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{-e}{R^3}L \Rightarrow L = -\frac{4\pi\varepsilon_0 R^3}{e}E_n' \Rightarrow \text{im Gleichgewicht } E_n' = -E$$

$$\Rightarrow L = \frac{4\pi\varepsilon_0 R^3}{e}E \Rightarrow p = eL = 4\pi\varepsilon_0 R^3 E = \alpha E \Rightarrow \vec{p} = \alpha\vec{E} \text{ wobei } \alpha = 4\pi\varepsilon_0 R^3$$

Die Größe der gebundenen Ladung

Die Dichte σ_b der gebundenen Ladungen auf den Oberflächen des Dielektrikums hängt von der relativen Dielektrizitätskonstante ε_{rel} und von der Dichte σ_f der freien Ladungen auf den Kondensatorplatten.

Annahme: dünnes Dielektrikum und Abstand der Platten gering $\Leftrightarrow$

Feld der gebundenen Ladungen $\triangleq$ Feld zweier unendlicher Ladungsebenen $\Rightarrow$

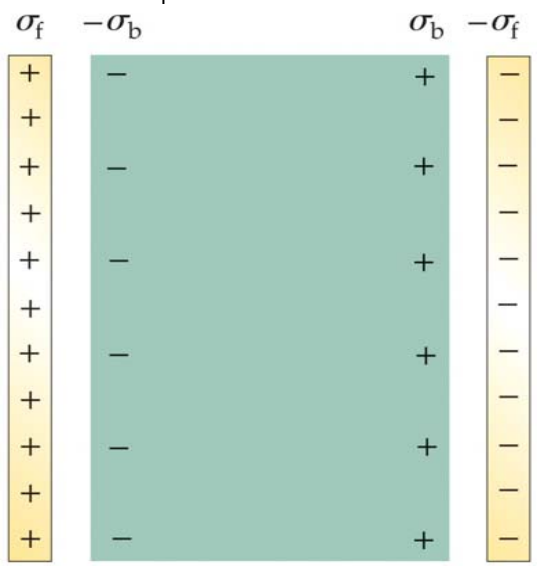
$E_b = \frac{\sigma_b}{\varepsilon_0}$, nach links gerichtet

Feld der freien Ladungen $E_0 = \frac{\sigma_f}{\varepsilon_0}$, nach rechts gerichtet $\Rightarrow$

aus Gl. (24.22) Gesamtfeld $E = \frac{E_0}{\varepsilon_{rel}} = E_0 - E_b \Rightarrow E_b = E_0\left(1 - \frac{1}{\varepsilon_{rel}}\right) \Rightarrow$

$\frac{\sigma_b}{\varepsilon_0} = \frac{\sigma_f}{\varepsilon_0}\left(1 - \frac{1}{\varepsilon_{rel}}\right) \Rightarrow \sigma_b = \sigma_f\left(1 - \frac{1}{\varepsilon_{rel}}\right) \Rightarrow$

die Dichte der gebundenen Ladungen ist immer kleiner als die Dichte der freien Ladungen auf den Kondensatorplatten



Der piezoelektrische Effekt

Piezoelektrischer Effekt: in bestimmten Kristallen (z.B. Quarz), die polare Moleküle enthalten, führt ein mechanischer Druck auf den Kristall zur Polarisation der Moleküle $\Rightarrow$ Spannung $\Rightarrow$

piezoelektrische Kristalle werden in Wandler (Mikrophonen, Schwingungsmelder, Kopfhörer, Uhren) eingesetzt

Alonso-Finn **25. Das elektrische Feld**

25.1 Einführung

25.2 Elektromotive Kraft
25.3 Fluß eines elektrischen Feldes
25.4 Gauss'sches Gesetz für das elektrische Feld
25.5 Eigenschaften eines Leiters in einem elektrischen Feld
25.6 Elektrische Polarisation von Materie
25.7 Der Polarisationsvektor
25.8 Elektrische Verschiebung
25.9 Elektrische Suszeptibilität und permittivität
25.10 Elektrische Kapazität: Kondensatoren
25.11 Energie eines elektrischen Feldes