ELEKTRIZITÄT UND MAGNETISMUS

Tipler-Mosca

25. Elektrischer Strom - Gleichstromkreise (Electric current and direct-current circuits)

25.1 Elektrischer Strom und die Bewegung von Ladungsträgern (Current and the motion of charges)

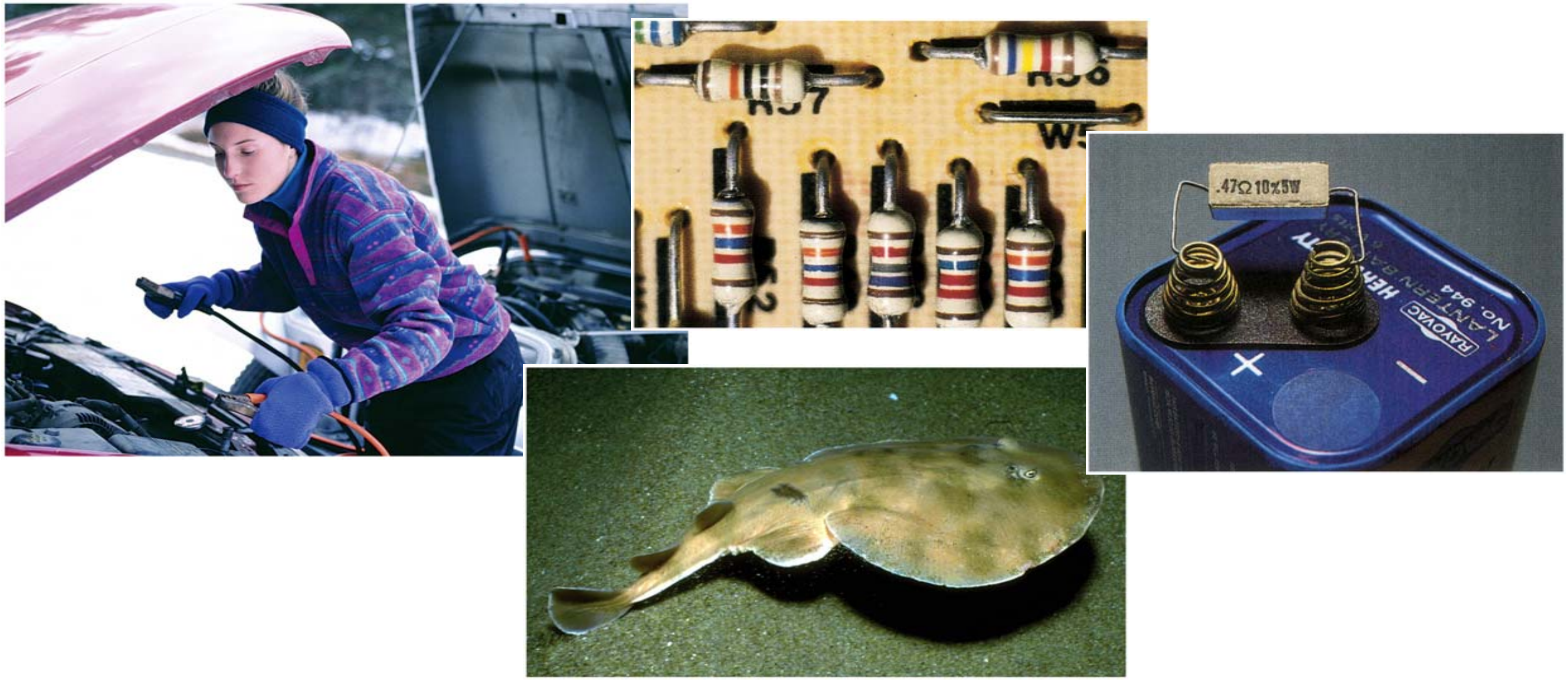
25.2 Widerstand und Ohm'sches Gesetz (Resistance and Ohm's law)

25.3 Energetische Betrachtungen elektrischer Stromkreise (Energy in electric circuits)

25.4 Zusammenschaltungen von Widerständen (Combinations of resistors)

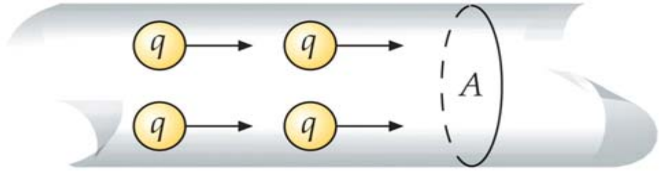
25.5 Die Kirchhoff'schen Regeln (Kirchhoff's rules)

25.6 RC-Stromkreise (RC circuits)



25.1 Elektrischer Strom und die Bewegung von Ladungsträgern (Current and the motion of charges)

Die Rate, mit der elektrische Ladungen durch eine Fläche A fließt, bezeichnet man als elektrischer Strom
Gleichstromkreise: Stromkreise, in denen sich die Richtung des Stromes nicht ändert;
Wechselstromkreise: Stromkreise, in denen sich die Richtung des Stromes ständig ändert (siehe Teil 29)

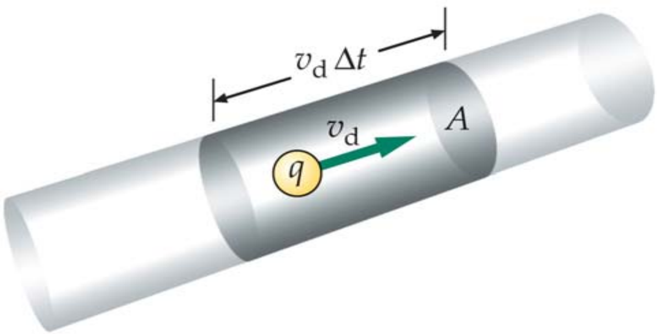


$$I = \frac{\Delta Q}{\Delta t} \qquad 25\text{-}1$$

DEFINITION—ELECTRIC CURRENT

SI-Einheit des Stromes I: Ampere (A) $\Leftrightarrow$ 1 A $=$ 1 C s^{-1}; siehe auch Teil 26, Definition des Ampere anhand der Kraft, die zwei stromdurchflossene Leiter aufeinander ausüben.
Vereinbarung: Richtung des Stromes = Bewegungsrichtung der positiv geladenen Ladungsträger $\Rightarrow$ Elektronen bewegen sich entgegengesetzt der konventionellen Stromrichtung.

Bewegung freier Elektronen durch einen leitfähigen Draht $\Rightarrow$
Kein elektrisches Feld am Draht anliegend $\Rightarrow$ Elektronen bewegen sich in zufälligen Richtungen $\Rightarrow$ stoßen mit den Gitterionen zusammen $\Rightarrow$ mittlere Geschwindigkeit der Elektronen = null.
Elektrisches Feld am Draht anliegend $\Rightarrow$ Kraft $-e\vec{E}$ auf jedes freie Elektron $\Rightarrow$ Beschleunigung entgegengesetzt zur Feldrichtung $\Rightarrow$ stoßen mit den Gitterionen zusammen $\Rightarrow$ durch ständiges Wechsel von Beschleunigung und Energieumwandlung $\Rightarrow$ Elektronen driften entgegengesetzt zur Feldrichtung mit der Driftgeschwindigkeit v_d.



Sei $n = N/V$ die Anzahldichte der Ladungsträger (= Anzahl freier Ladungsträger pro Volumseinheit) in einem Leiter mit der Querschnittsfläche A. Die Ladungsträger mit jeweils Ladung q bewegen sich mit v_d senkrecht zu A. Während Δt gelangen alle Ladungsträger aus dem Volumen $\Delta V = Av_d\Delta t$ durch die Fläche A $\Rightarrow$ innerhalb ΔV ist die Teilchenzahl $\Delta N = nAv_d\Delta t$ $\Rightarrow$ die Ladung $\Delta q = qnAv_d\Delta t$ $\Rightarrow$

Strom durch die Bewegung beliebiger Ladungsträger $I = \frac{\Delta q}{\Delta t} = qnAv_d$

$$I = \frac{\Delta Q}{\Delta t} = qnAv_d \qquad \text{25-3}$$

RELATION BETWEEN CURRENT AND DRIFT VELOCITY

Die Anzahldichte n der Ladungsträger in einem Leiter kann man mit dem Hall-Effekt messen (siehe Teil 26)
$\Rightarrow$ Metalle: ca. 1 freies Elektron pro Atom

Beispiel 25.1: Berechnung der Driftgeschwindigkeit

Kupferdraht mit Durchmesser $d = 1.63$ mm $\Rightarrow$ Annahme für Kupfer: ein freies Elektron pro Atom, gesucht: Driftgeschwindigkeit v_d der Elektronen bei $I = 1$ A $\Rightarrow$

es gilt Gl. (25.3) $I = qnAv_d \Rightarrow v_d = \frac{I}{qnA}$;

aus Annahme für Kupfer: ein freies Elektron pro Atom $\Rightarrow$ Anzahldichte der Ladungsträger = Anzahldichte der Atome

$\Rightarrow$ aus Molmasse $M_{Cu} = 63.5$ g mol^{-1}, Avogadro-Zahl $N_A = 6.02\times10^{23}$ Atome mol^{-1}, und $\rho_{Cu} = 8.93$ g cm^{-3} $\Rightarrow$

$$\frac{m}{M_{Cu}} = \frac{N}{N_A} \Rightarrow n = n_{Cu} = \frac{N_{Cu}}{V} = \frac{N_A}{M_{Cu}}\frac{m}{V} = \frac{N_A}{M_{Cu}}\rho = \frac{6.02\times10^{23}\ \text{Atome mol}^{-1}}{63.5\ \text{g mol}^{-1}} 8.93\ \text{g cm}^{-3} = 8.47\times10^{22}\ \text{Atome cm}^{-3} =$$

$$= 8.47\times10^{28}\ \text{Atome m}^{-3};$$

Querschnittsfläche A des Drahtes: $A = \pi\frac{d^2}{4} = \pi\frac{(1.63\ \text{mm})^2}{4} = 2.087\times10^{-6}\ \text{m}^2$

Ladung q der Ladungsträger: $q = -e = 1.60\times10^{-19}$ C $\Rightarrow$

$$v_d = \frac{I}{qnA} = \frac{1\ \text{C s}^{-1}}{(-1.60\times10^{-19}\ \text{C})(8.47\times10^{28}\ \text{m}^{-3})(2.087\times10^{-6}\ \text{m}^2)} = -3.54\times10^{-5}\ \text{m s}^{-1} = -3.54\times10^{-2}\ \text{mm s}^{-1}$$

Beispiel 25.2: Berechnung der Anzahldichte der Ladungsträger
mögliches Prüfungsbeispiel

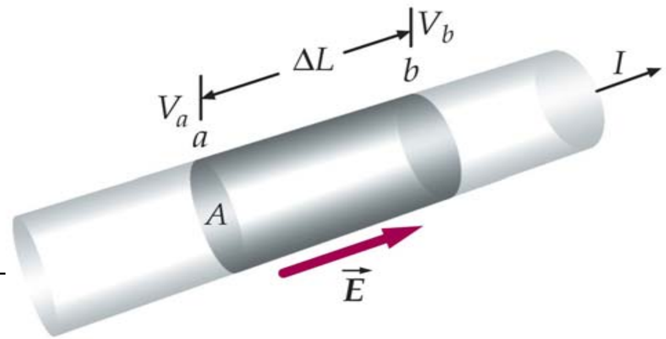
25.2 Widerstand und Ohm'sches Gesetz (Resistance and Ohm's law)

Ein elektrischer Strom fließt, wenn innerhalb eines Leiters ein elektrisches Feld $\vec{E}$ herrscht, welches auf die freien Ladungsträger die Kraft $q\vec{E}$ ausübt $\Leftrightarrow$ $\vec{E}$ zeigt in Stromrichtung bzw. in Richtung des abnehmedem Potentials (d.h von ϕ_a nach ϕ_b) $\Rightarrow$ Voraussetzung: homogenes elektrisches Feld E

$\Rightarrow$ Spannung zwischen Punkt a und Punkt b: $U = \phi_a - \phi_b = |\vec{E}|\Delta L$ $\Rightarrow$

Quotient aus Spannung und Strom $\Leftrightarrow$ Widerstand $R = \dfrac{U}{I}$

wobei SI-Einheit des Widerstands R: Ohm (Ω) $\Leftrightarrow$ $1\ \Omega = 1\ \mathrm{V\ A^{-1}}$



$$R = \frac{V}{I} \qquad 25\text{-}5$$

DEFINITION—RESISTANCE

$$V = IR, \quad R \text{ constant} \qquad 25\text{-}7$$

OHM'S LAW

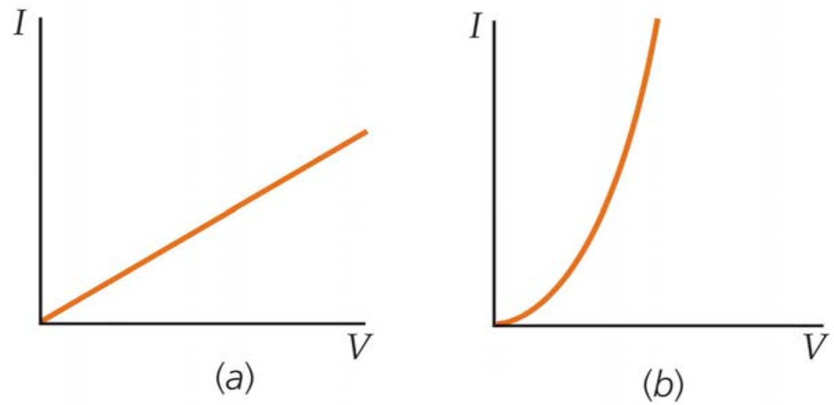
Der Widerstand R vieler Materialien, insbesondere der meisten Metalle, hängt weder der Spannung noch vom Strom ab $\Leftrightarrow$ Ohm'sches Verhalten

Aus experimentellen Beobachtungen: Widerstand eines Leiters proportional zu dessen Länge ℓ und umgekehrt proportional zu dessen Querschnitt A $\Rightarrow$ $R = \rho\dfrac{\ell}{A}$

wobei ρ spezifischer Widerstand, SI-Einheit Ω m

$\dfrac{1}{\rho}$ elektrische Leitfähigkeit, SI-Einheit Siemens (S),

$1\ \mathrm{S} = 1\ \Omega^{-1}\ \mathrm{m^{-1}}$



Ohm'sches Gesetz befolgt

Ohm'sches Gesetz nicht befolgt

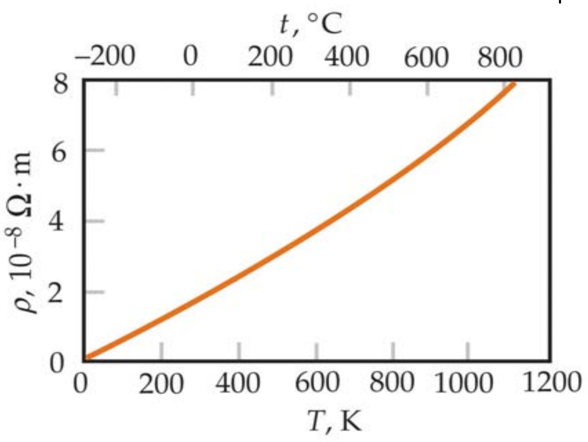
TABLE 25-1

Resistivities and Temperature Coefficients

Material	Resistivity ρ at 20°C, $\Omega\cdot$m	Temperature Coefficient α at 20°C, K^{-1}
Silver	1.6×10^{-8}	3.8×10^{-3}
Copper	1.7×10^{-8}	3.9×10^{-3}
Aluminum	2.8×10^{-8}	3.9×10^{-3}
Tungsten	5.5×10^{-8}	4.5×10^{-3}
Iron	10×10^{-8}	5.0×10^{-3}
Lead	22×10^{-8}	4.3×10^{-3}
Mercury	96×10^{-8}	0.9×10^{-3}
Nichrome	100×10^{-8}	0.4×10^{-3}
Carbon	3500×10^{-8}	-0.5×10^{-3}
Germanium	0.45	-4.8×10^{-2}
Silicon	640	-7.5×10^{-2}
Wood	$10^{8} - 10^{14}$	
Glass	$10^{10} - 10^{14}$	
Hard rubber	$10^{13} - 10^{16}$	
Amber	5×10^{14}	
Sulfur	1×10^{15}	

Der spezifische Widerstand aller Metalle ist temperaturabhängig

$$\alpha = \frac{\left(\rho - \rho_{20°C}\right)/\rho_{20°C}}{T\left[°C\right] - 20°C}$$



Die Querschnitte von Leitungsdrähten sind genormt

TABLE 25-2

Wire Diameters and Cross-Sectional Areas for Commonly Used Copper Wires

Gauge Number	Diameter at 20°C, mm	Area, mm²
4	5.189	21.15
6	4.115	13.30
8	3.264	8.366
10	2.588	5.261
12	2.053	3.309
14	1.628	2.081
16	1.291	1.309
18	1.024	0.8235
20	0.8118	0.5176
22	0.6438	0.3255

Beispiel 25.3: Länge eines Widerstandsdrahts

Draht aus Nichrom $\left(\rho = 10^{-6}\ \Omega\ \text{m}\right)$ mir Radius $r = 0.65$ mm. Gesucht: Länge ℓ für $R = 2\ \Omega \Rightarrow$ aus Gl. (25.8) $R = \rho\,\ell/A \quad \Rightarrow$

$$\ell = \frac{RA}{\rho} = \frac{R\pi r^2}{\rho} = \frac{(2\ \Omega)\pi(0.65\ \text{mm})^2}{10^{-6}\ \Omega\ \text{m}} = 2.65\ \text{m}$$

Farbcode für Widerstände und andere Bauelemente

TABLE 25-3

The Color Code for Resistors and Other Devices

Colors		Numeral
Black	=	0
Brown	=	1
Red	=	2
Orange	=	3
Yellow	=	4
Green	=	5
Blue	=	6
Violet	=	7
Gray	=	8
White	=	9

Tolerance		
Brown	=	1 %
Red	=	2 %
Gold	=	5 %
Silver	=	10 %
None	=	20 %

The color bands are read starting with the band closest to the end of the resistor. The first two bands represent an integer between 1 and 99. The third band represents the number of zeros that follow. For the resistor shown, the colors of the first three bands are, respectively, orange, black, and blue. Thus, the number is 30,000,000 and the resistance is 30 MΩ. The fourth band is the tolerance band. If the fourth band is silver, as shown here, the tolerance is 10 percent. Ten percent of 30 is 3, so the resistance is (30 ± 3) MΩ.

Beispiel 25.4: Widerstand pro Längeneinheit
Mögliches Prüfungsbeispiel

Beispiel 25.5: Elektrisches Feld in einem Strom führenden Draht

Kupferdraht, Querschnitt 1.5 mm^2, durch den Draht fließt $I = 1.3$ A; gesucht: elektrisches Feld E

$\Rightarrow$ elektrisches Feld = Potentialdifferenz pro Längeneinheit $\Rightarrow$ $E = \dfrac{U}{\ell}$,

aus $U = IR$ $\Rightarrow$ $E = \dfrac{U}{\ell} = \dfrac{IR}{\ell} = I\dfrac{R}{\ell}$ $\Rightarrow$

mit $\dfrac{R}{\ell} = 1.13 \times 10^{-2}\ \Omega\ \mathrm{m}^{-1}$ $\Rightarrow$

$$E = I\frac{R}{\ell} = (1.3\ \mathrm{A})(1.13 \times 10^{-2}\ \Omega\ \mathrm{m}^{-1}) = 1.47 \times 10^{-2}\ \mathrm{V\ m}^{-1}$$

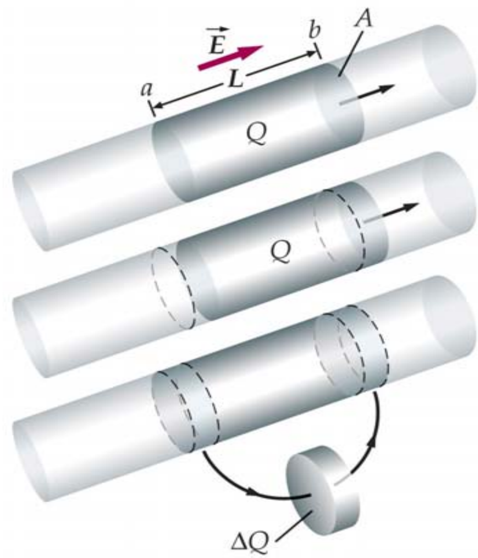
Farbig kodierte Kohleschichtwiderstände

25.3 Energetische Betrachtungen elektrischer Stromkreise (Energy in electric circuits)

Herrscht in einem Leiter ein elektrisches Feld, so verrichtet es Arbeit an den freien Elektronen, und die Energie des Elektronengases nimmt zu. Nach kurzer Zeit stellt sich jedoch ein Gleichgewicht, weil die erworbene kinetische Energie durch Zusammenstöße der Ladungsträger mit Gitterionen ständig in thermische Energie (Joule'sche Wärme) umgewandelt wird.

Durch den Draht fließe ein stationärer Strom $\Rightarrow$ eine Ladungsmenge ΔQ fließt von links nach rechts $\Rightarrow$ Änderung ΔE_{el} der elektrischen Energie von ΔQ: $\Delta E_{\text{el}} = \Delta Q(\phi_{\text{b}} - \phi_{\text{a}})$ $\Rightarrow$ da $\phi_{\text{a}} < \phi_{\text{b}}$ $\Rightarrow$ $\Delta E_{\text{el}} < 0$ $\Rightarrow$ Energieverlust $\Rightarrow$ mit $U = \phi_{\text{a}} - \phi_{\text{b}}$ $\Rightarrow$ $-\Delta E_{\text{el}} = \Delta Q U$ $\Rightarrow$

Verlustrate $-\dfrac{\Delta E_{\text{el}}}{\Delta t} = \dfrac{\Delta Q}{\Delta t} U = IU$ $\Rightarrow$ Der Verlust an elektrischer Energie pro Zeiteinheit entspricht der im Leiterabschnitt umgesetzte Leistung $P = IU$



$$P = IV \qquad 25\text{-}10$$

POTENTIAL ENERGY LOSS PER UNIT TIME

gilt für alle Bauelemente beliebiger Stromkreise

An einem Widerstand wird elektrische Energie in Form von Wärme an die Umgebung abgeführt $\Rightarrow$ mit Gl. (25.7) $U = IR$ $\Rightarrow$ $P = UI = RI^2 = U^2/R$

$$P = IV = I^2R = \frac{V^2}{R} \qquad 25\text{-}11$$

POWER DISSIPATED IN A RESISTOR

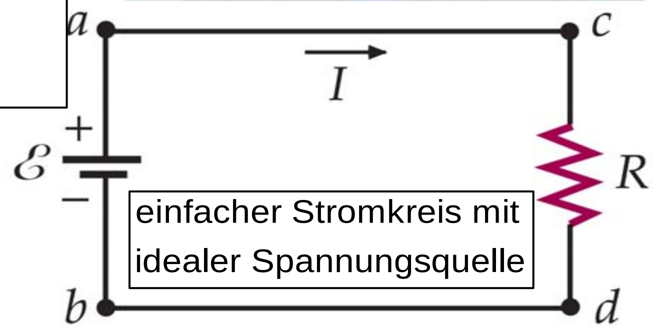
Beispiel 25.6: In einem Widerstand umgesetzte Leistung

Durch einen Ohm'schen Widerstand, $R = 12\ \Omega$, fließt ein Strom $I = 3$ A. Gesucht: umgesetzte Leistung $\Rightarrow$ aus Gl. (25.11) $P = RI^2$ $\Rightarrow$ $P = (12\ \Omega)(3\ \text{A})^2 = 108$ W

Spannungsquellen und Quellenspannungen

Um einen stationären Strom durch einen Leiter aufrechtzuerhalten, muß durch eine Spannungsquelle ständig elektrische Energie zugeführt werden.
Die Spannungsquelle verrichtet Arbeit an den hindurchtretenden Ladungen, deren elektrische Energie dadurch zunimmt.
Die pro Ladungseinheit verrichtete Arbeit ist die Quellenspannung U_Q (früher elektromotorische Kraft).
An den Polen einer idealen Spannungsquelle kann unabhängig vom fließenden Strom stets die gleiche Quellenspannung abgegriffen werden.

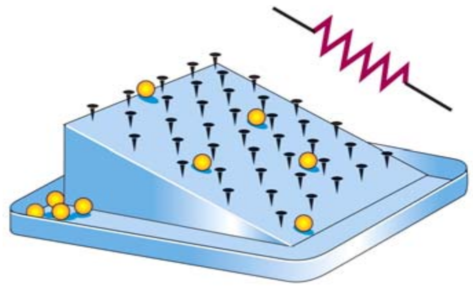
Die Ladung innerhalb der Spannungsquelle fließt vom niedrigen zum höheren Potential, wodurch die elektrische Energie um $\Delta q U_Q$ zunimmt.
Im Widerstand wird die elektrische Energie in Wärme umgewandelt $\Rightarrow$
von der Spannungsquelle abgegebene Leistung $P = \frac{\Delta q}{\Delta t} U_Q = I U_Q$



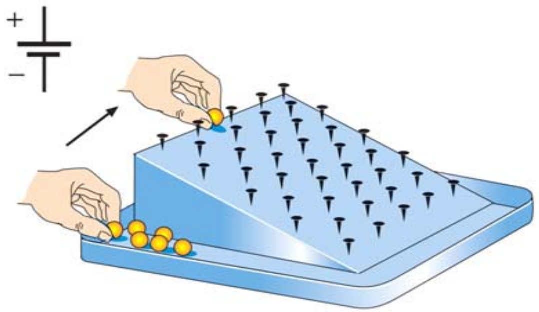
einfacher Stromkreis mit idealer Spannungsquelle

$$P = \frac{\Delta Q \mathcal{E}}{\Delta t} = I\mathcal{E} \qquad 25\text{-}12$$

POWER SUPPLIED BY AN EMF SOURCE

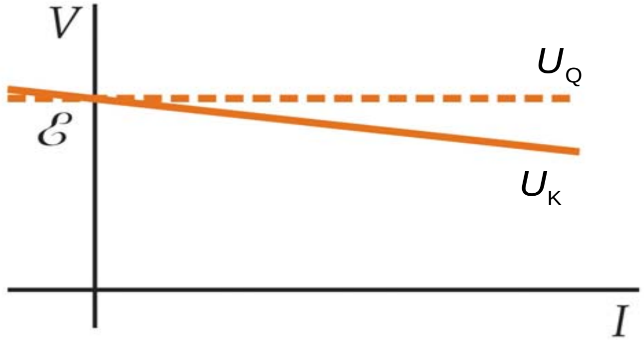


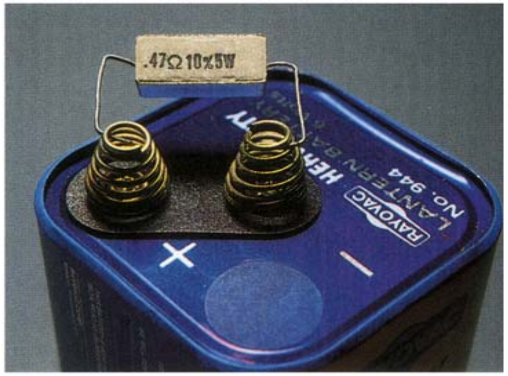
Spannungsquelle $\triangleq$ Ladungspumpe

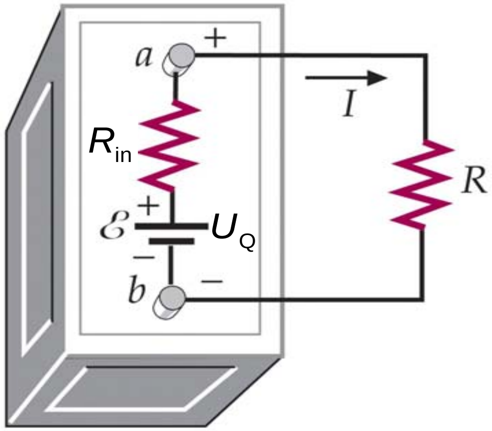


Zitterrochen: bis 50 A bei 50 V

An den Polen einer realen Spannungsquelle greift man die Klemmenspannung U_K ab, die niedriger als U_Q ist.
Reale Spannungsquelle: Kombination aus idealer Spannungsquelle mit Quellenspannung U_Q und aus einem Innenwiderstand R_{in}.







aus $\phi_a = \phi_b + U_Q - IR_{in} \Rightarrow$ Klemmenpannung $U_K = \phi_a - \phi_b = U_Q - IR_{in}$

Spannungsabfall U_R am Ohm'schen Widerstand:

$$U_R = RI = \phi_a - \phi_b = U_Q - R_{in} I \quad \Rightarrow \quad I = \frac{U_Q}{R + R_{in}}$$

Auf Batterein und Akkumulatoren: Angabe (in A h) der insgesamt entnehmbare Ladung:
1 A h = 1 C s^{-1} 3600 s = 3600 C $\Rightarrow$ gespeicherte Energie: E_{el} = entnehmbare Ladung $\times$ Quellspannung $= qU_Q$

Beispiel 25.7: Klemmenspannung, Leistung, und gespeicherte Energie

Ohm'scher Widerstand $R = 11\,\Omega$ mit Batterie verbunden ($U_Q = 6$ V, $R_{in} = 1\,\Omega$, 150 A h).
Gesucht: a) Strom I, b) Klemmenspannung U_K, c) die von der Spannungsquelle abgegebene Leistung P, d) die am Ohm'schen Widerstand umgesetzte Leistung, e) die am Innenwiderstand umgesetzte Leistung, f) die Energie der Batterie $\Rightarrow$

Teil a) mit Gl. (25.14) $I = U_Q/(R + R_{in}) = (6\text{ V})/(11\,\Omega + 1\,\Omega) = 0.5$ A;

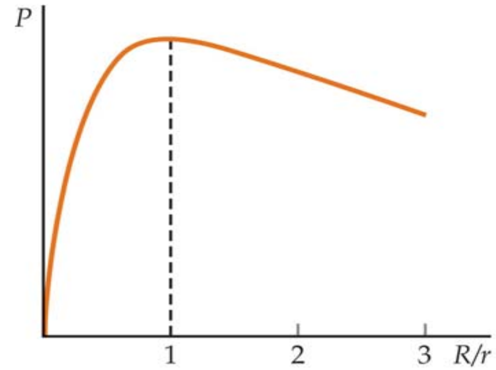
Teil b) mit Gl. (25.13) $\phi_a - \phi_b = U_Q - R_{in} I = 6\text{ V} - (1\,\Omega)(0.5\text{ A}) = 5.5$ V;

Teil c) mit Gl. (25.12) $P_Q = IU_Q = (0.5\text{ A})(6\text{ V}) = 3$ W

Teil d) mit Gl. (25.11) $P_R = I^2 R = (0.5\text{ A})^2 (11\,\Omega) = 2.75$ W; Teil e) $P_{in} = I^2 R_{in} = (0.5\text{ A})^2 (1\,\Omega) = 0.25$ W

Teil f) mit Gl. (25.15) $E_{el} = qU_Q = (150\text{ A h})(6\text{ V}) = 150(3600\text{ C})(6\text{ V}) = 3.24$ MJ

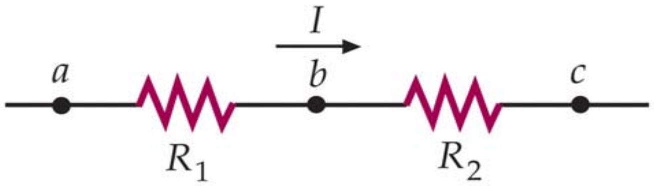
Beispiel 25.8:
Maximal abgegebene Leistung
mögliches Prüfungsbeispiel

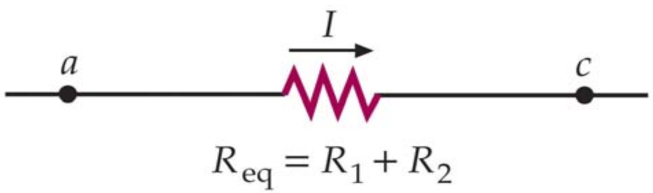


25.4 Zusammenschaltungen von Widerständen (Combinations of resistors)

Vereinfachung der Analyse von Stromkreisen: mehrere Widerstände durch einen einzigen Widerstand ersetzt.

Reihenschaltung von Widerständen



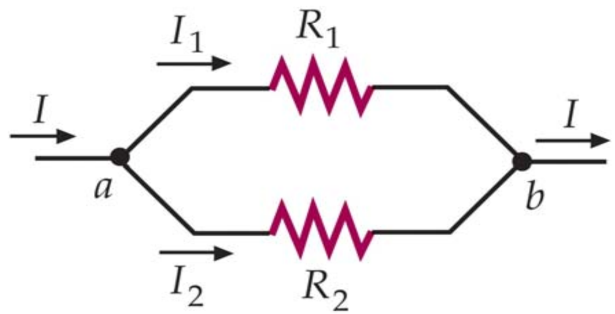


Serienschaltung oder Reihenschaltung: der gleiche Strom fließt durch beide Widerstände $\Rightarrow$
Gesamtspannungsabfall $U_R = R_1 I + R_2 I = I(R_1 + R_2) = IR \quad \Rightarrow \quad R = R_1 + R_2$

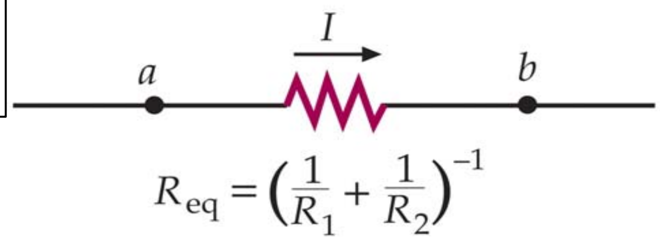
$$R_{eq} = R_1 + R_2 + R_3 + \ldots \qquad 25\text{-}17$$

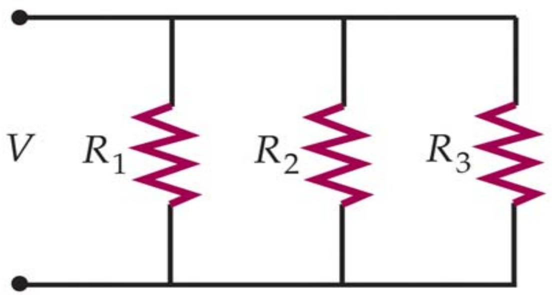
EQUIVALENT RESISTANCE FOR RESISTORS IN SERIES

Parallelschaltung von Widerständen



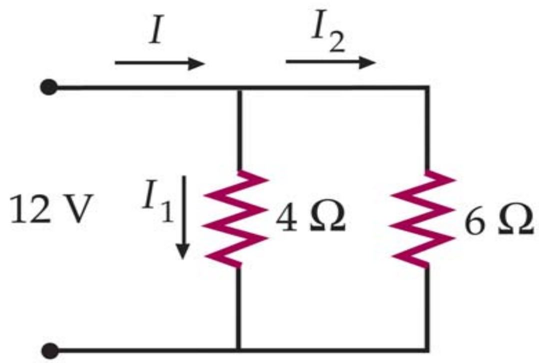
Parallelschaltung: die gleiche Spannung fällt über alle Widerstände ab $\Rightarrow$
an den Knotenpunkten a und b gilt: $I = I_1 + I_2$ wobei I_1 und I_2 Teilströme $\Rightarrow$
Spannungsabfall $U_R = I_1 R_1 = I_2 R_2$; für den Ersatzwiderstand $U_R = IR \quad \Rightarrow$
aus $I = I_1 + I_2 \quad \Rightarrow \quad \frac{U_R}{R} = \frac{U_R}{R_1} + \frac{U_R}{R_2} = U_R\left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}\right) \quad \Rightarrow \quad \frac{1}{R} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}$





$$\frac{1}{R_{eq}} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_3} + \ldots \qquad \text{25-21}$$

EQUIVALENT RESISTANCE FOR RESISTORS IN PARALLEL



Beispiel 25.9: Parallel geschaltete Ohm'sche Widerstände

An zwei parallel geschalteten Ohm'sche Widerständen,
$R_1 = 4\ \Omega$ und $R_2 = 6\ \Omega$, liegt eine Spannung $U_Q = 12$ V an.
Gesucht: a) Ersatzwiderstand R, b) ingesamt fließender Strom I, c) die durch die Widerstände fließende Teilströme I_1 und I_2, d) in in den einzelnen Winderständen umgesetzte Leistung, e) die von der Batterie abgegebene Leistung $\Rightarrow$

Teil a) mit Gl. (25.21) $\frac{1}{R} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} \quad \Rightarrow R = \frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2} = \frac{(4\ \Omega)(6\ \Omega)}{4\ \Omega + 6\ \Omega} = 2.4\ \Omega$

Teil b) mit Gl. (25.20) $I = U_R / R = (12\text{ V})/(2.4\ \Omega) = 5$ A,

Teil c) mit Gl. (25.19) $I_1 = U_R / R_1 = (12\text{ V})/(4\ \Omega) = 3$ A, $I_2 = U_R / R_2 = (12\text{ V})/(6\ \Omega) = 2$ A,

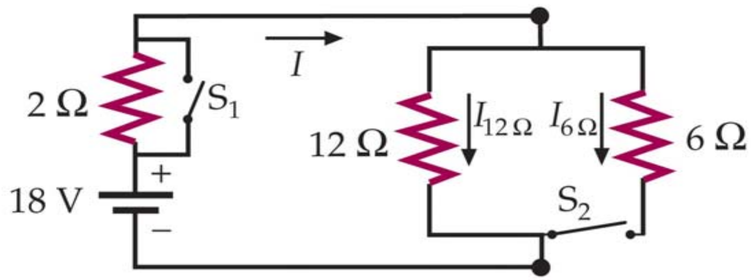
Teil d) mit Gl. (25.11) $P_1 = UI_1 = R_1 I_1^2 = (4\ \Omega)(3\ A)^2 = 36$ W, $P_2 = UI_2 = R_2 I_2^2 = (6\ \Omega)(4\ A)^2 = 24$ W,

Teil e) mit Gl. (25.12) $P = IU_Q = (5\text{ A})(12\text{ V}) = 60$ W

Beispiel 25.10: In Reihe geschaltete Ohm'sche Widerstände
mögliches Prüfungsbeispiel

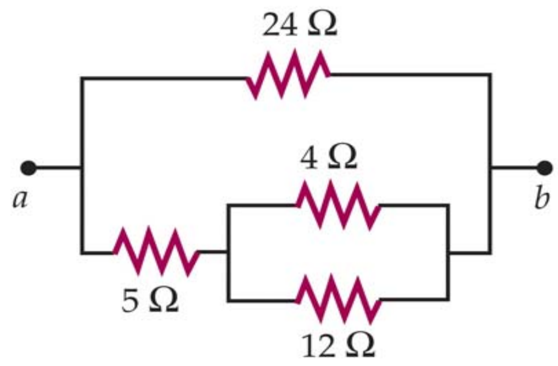
Beispiel 25.11: Parallel- und Reihenschaltung Ohm'scher Widerstände

mögliches Prüfungsbeispiel



Beispiel 25.12: Eine komplizierte Schaltung Ohm'scher Widerstände

mögliches Prüfungsbeispiel



Beispiel 25.13: Elektrogeräte in einem Stromkreis

Aufgenommene Leistungen von Elektrogertäten: Toaster $P_{\text{toaster}} = 900$ W, Mikrowelle $P_{\text{mikro}} = 1200$ W, Kaffeemaschine $P_{\text{kaffee}} = 600$ W, Stromkreis abgesichert mit Sicherung mit 10 A. Können alle Geräte gleichzeitig betrieben werden?

Angeschlossene Geräte parallel betrieben, Spannung $U_{\text{netz}} = 230$ V $\Rightarrow$

gesucht: Strom durch die einzelne Geräte, bzw. Gesamtstrom $\Rightarrow$

aus Gl. (25.11) $P = UI \Rightarrow I_{\text{toaster}} = \frac{P_{\text{toaster}}}{U_{\text{netz}}} = \frac{900 \text{ W}}{230 \text{ V}} = 3.9$ A, $I_{\text{mikro}} = \frac{P_{\text{mikro}}}{U_{\text{netz}}} = \frac{1200 \text{ W}}{230 \text{ V}} = 5.2$ A, $I_{\text{kaffee}} = \frac{P_{\text{kaffee}}}{U_{\text{netz}}} = \frac{600 \text{ W}}{230 \text{ V}} = 2.6$ A,

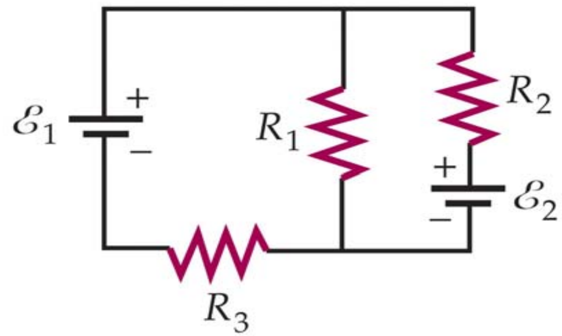
durch Parallelschaltung $\Rightarrow$ Gesamtstrom $I = I_{\text{toaster}} + I_{\text{mikro}} + I_{\text{kaffee}} = 3.9 \text{ A} + 5.2 \text{ A} + 2.6 \text{ A} = 11.7 \text{ A} \Rightarrow$

dieser Strom ist größer als die Angabe auf der Sicherung (10 A)

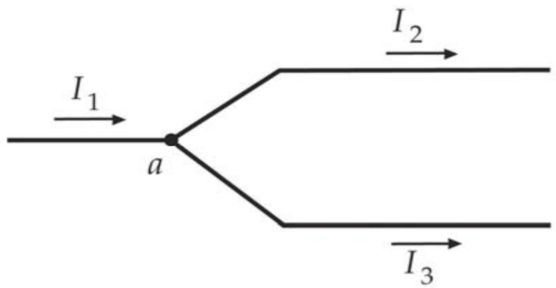
25.5 Die Kirchhoff'schen Regeln (Kirchhoff's rules)

Viele Stromkreise lassen sich nicht als Parallelschaltung oder Reihenschaltung Ohm'scher Widerstände analysieren

1. When any closed-circuit loop is traversed, the algebraic sum of the changes in potential must equal zero. Maschenregel
2. At any junction (branch point) in a circuit where the current can divide, the sum of the currents into the junction must equal the sum of the currents out of the junction. Knotenregel



KIRCHHOFF S RULES



Zweite Kirchhoff'sche Regel oder Knotenregel: $I_1 = I_2 + I_3$

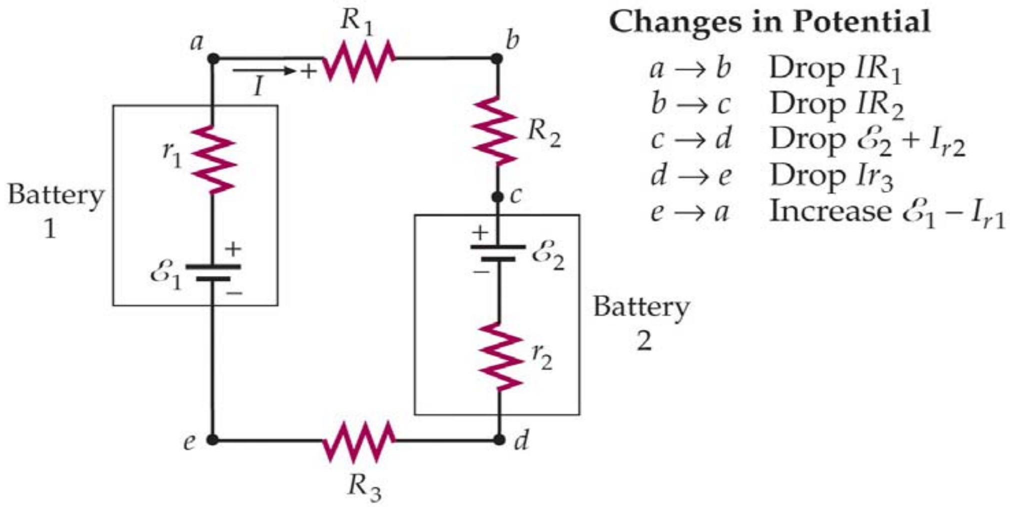
Die erste Kirchhoff'sche Regel oder Maschenregel folgt aus der Anwesenheit eines konservativen elektrischen Feldes: $\oint_C \vec{E} \cdot d\vec{s} = 0$ wobei C beliebiger geschlossener Weg $\Rightarrow$ da $\Delta U = \phi_b - \phi_a = -\int_a^b \vec{E} \cdot d\vec{s} \Rightarrow$ Summe der Potentialänderungen entlang eines beliebigen geschlossenen Weg = 0

Stromkreis in einer Masche

Anwendung der Maschenregel: die Uhrzeigerrichtung als *positive* Stromrichtung festgelegt $\Rightarrow$

$$-IR_1 - IR_2 - U_{Q,2} - IR_{in,2} - IR_3 + U_{Q,1} - IR_{in,1} = 0 \quad \Rightarrow$$

$$I = \frac{U_{Q,1} - U_{Q,2}}{R_1 + R_2 + R_3 + R_{in,1} + R_{in,2}}$$



Beispiel 25.14: Potentialdifferenz im Stromkreis

Gesucht: a) Potentiale in den Punkten a bis d, b) die Leistungsaufnahme und Leistungsabgabe des Stromkreises $\Rightarrow$

Teil a) aus Gl. (25.25) $I = \dfrac{U_{Q,1} - U_{Q,2}}{R_1 + R_2 + R_3 + R_{in,1} + R_{in,2}} \Rightarrow$

$$I = \frac{12\text{ V} - 4\text{ V}}{5\ \Omega + 5\ \Omega + 4\ \Omega + 1\ \Omega + 1\ \Omega} = \frac{8\text{ V}}{16\ \Omega} = 0.5\text{ A},$$

$$\phi_a = \phi_e + U_{Q,1} - IR_{in,1} = 0\text{ V} + 12\text{ V} - (0.5\text{ A})(1\ \Omega) = 11.5\text{ V}$$

$$\phi_b = \phi_a - IR_1 = 11.5\text{ V} - (0.5\text{ A})(5\ \Omega) = 9.0\text{ V}, \ \phi_c = \phi_b - IR_2 = 9.0\text{ V} - (0.5\text{ A})(5\ \Omega) = 6.5\text{ V},$$

$$\phi_d = \phi_c - U_{Q,2} - IR_{in,2} = 6.5\text{ V} - 4\text{ V} - (0.5\text{ A})(1\ \Omega) = 2.0\text{ V}$$

Teil b) von der Spannungsquelle 1 abgegebene Leistung:

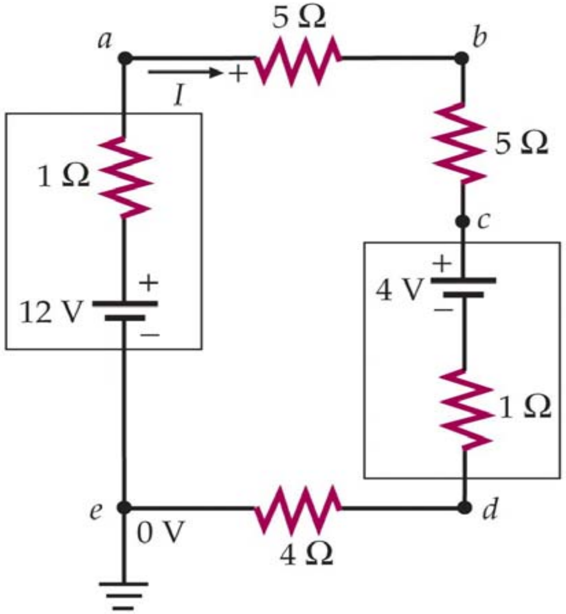
$$P_{Q,1} = IU_{Q,1} = (0.5\text{ A})(12\text{ V}) = 6.0\text{ W},$$

von der Widerständen umgesetzte Leistung:

$$P_R = I^2R_1 + I^2R_2 + I^2R_3 + I^2R_{in,1} + I^2R_{in,2} = (0.5\text{ A})^2(5\ \Omega + 5\ \Omega + 4\ \Omega + 1\ \Omega + 1\ \Omega) = 4.0\text{ W}$$

von der Spannungsquelle zur Aufladung aufgenommene Leistung:

$$P_{Q,2} = IU_{Q,2} = (0.5\text{ A})(4\text{ V}) = 2.0\text{ W} \quad \Rightarrow \quad P_{Q,1} = P_R + P_{Q,2}$$



Masse oder Erde

Beispiel 25.15: Fremdstarten eines Autos

Starthilfe für ein Auto, dessen Akkumulator entladen ist:

a) Welche Pole des entladenen und des geladenen Akkumulators mit Hilfe von Fremtstartkabeln verbunden?

b) geladenes Akkumulator: $U_{Q,1} = 12\ \text{V}$, $R_{\text{in},1} = 0.02\ \Omega$, entladenes Akkumulator $U_{Q,2} = 11\ \text{V}$, $R_{\text{in},2} = 0.02\ \Omega$,
Fremdstartkabel $R = 0.01\ \Omega \quad \Rightarrow$ gesucht: Ladestrom

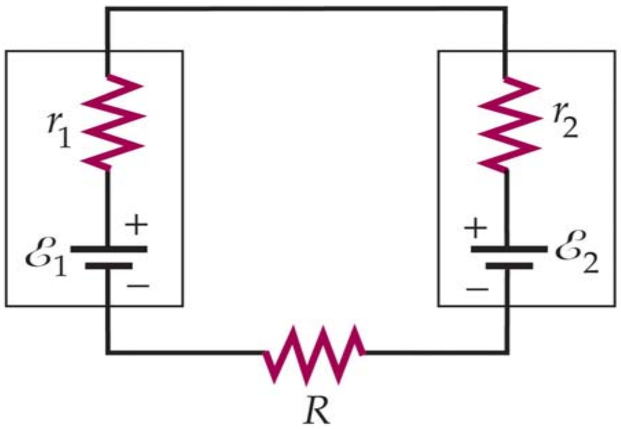
c) Akkus falsch angeschlossen $\Rightarrow$ gesucht: Strom

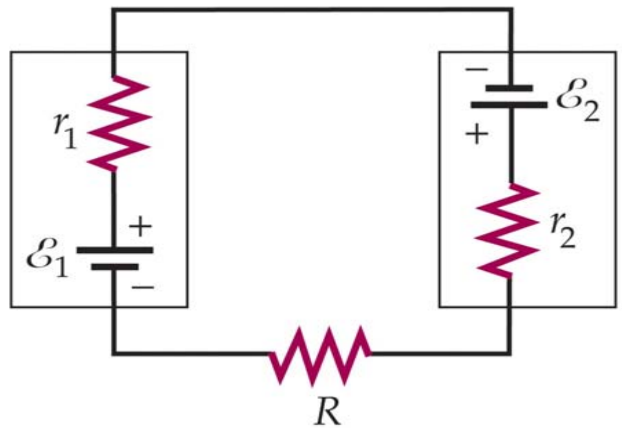
Teil a) damit entladenes Akku wieder aufgeladen $\Rightarrow$ durch diese ein Strom von positiven zum negativen Pol $\Rightarrow$ *gleichnamige* Pole der Akkus verbinden!

Teil b) aus Maschenregel: $U_{Q,1} - IR_{\text{in},1} - IR_{\text{in},2} - U_{Q,2} - IR = 0 \quad \Rightarrow \quad I = \dfrac{U_{Q,1} - U_{Q,2}}{R + R_{\text{in},1} + R_{\text{in},2}} = \dfrac{12\ \text{V} - 11\ \text{V}}{0.05\ \Omega} = 20\ \text{A}$

Teil c) Akkus falsch angeschlossen $\Leftrightarrow$ die Teilspannungen addieren sich $\Rightarrow$ aus Maschenregel

$$U_{Q,1} - IR_{\text{in},1} - IR_{\text{in},2} + U_{Q,2} - IR = 0 \quad \Rightarrow \quad I = \frac{U_{Q,1} + U_{Q,2}}{R + R_{\text{in},1} + R_{\text{in},2}} = \frac{12\ \text{V} + 11\ \text{V}}{0.05\ \Omega} = 460\ \text{A}$$





RICHTIG
gleichnamige Pole verbunden

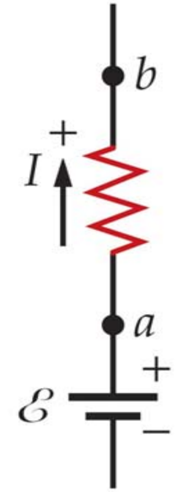
FALSCH!
Kurzschluß über *R*

Stromkreise mit mehreren Maschen

Die positive Stromrichtung kann in jeder Masche willkürlich festgelegt werden

For each branch of a circuit, we draw an arrow to indicate the positive direction for that branch. Then, if we traverse a resistor in the direction of the arrow, the change in potential ΔV is equal to $-IR$ (and if we traverse a resistor in the opposite direction, ΔV is equal to $+IR$).

SIGN RULE FOR THE CHANGE IN POTENTIAL ACROSS A RESISTOR



$\phi_b - \phi_a = -IR$

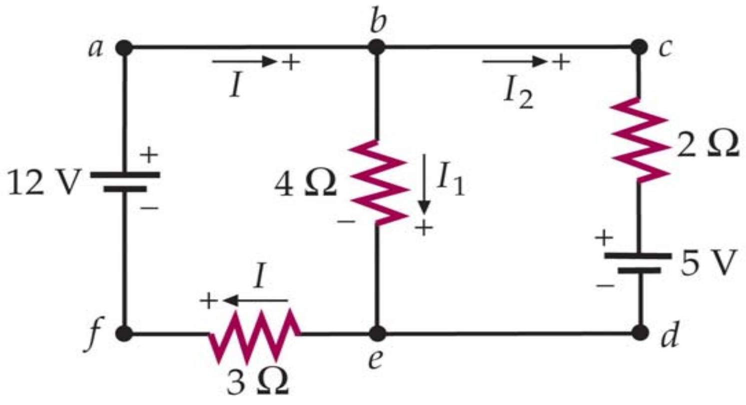
Für Stromkreise mit mehr als eine Masche benötigt man beide Kirchhoff'sche Regeln.

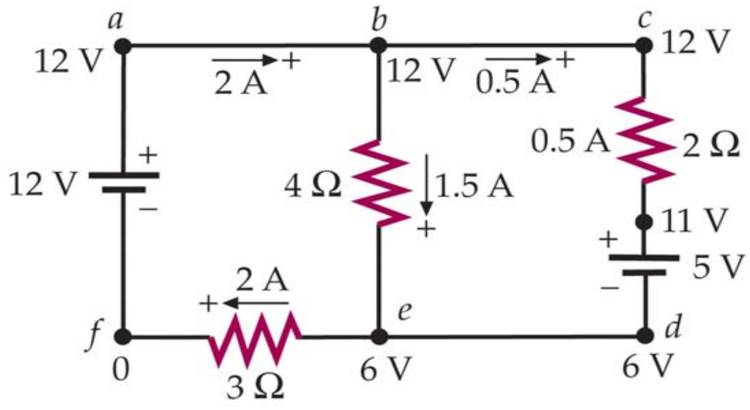
1. Draw a sketch of the circuit.
2. Replace any series or parallel resistor combinations or capacitor combinations by their equivalent values.
3. Choose the positive direction for each branch of the circuit and indicate the positive direction with a direction arrow. Label the current in each branch. Add plus and minus signs to indicate the high-potential terminal and low-potential terminal of each source of emf.
4. Apply the junction rule to all but one of the branch points (junctions).
5. Apply the loop rule to each loop until you obtain as many independent equations as there are unknowns. When traversing a resistor in the positive direction, the change in potential equals $-IR$. When traversing a battery from the negative terminal to the positive terminal, the change in potential equals $\mathcal{E} - IR$. $\boxed{U_Q - R_{in} I}$
6. Solve the equations to obtain the desired values.
7. Check your results by assigning a potential of zero to one point in the circuit and use the values of the currents found to determine the potentials at other points in the circuit.

GENERAL METHOD FOR ANALYZING MULTILOOP CIRCUITS

Beispiel 25.16: Anwendung der Kirchhoff'schen Regeln

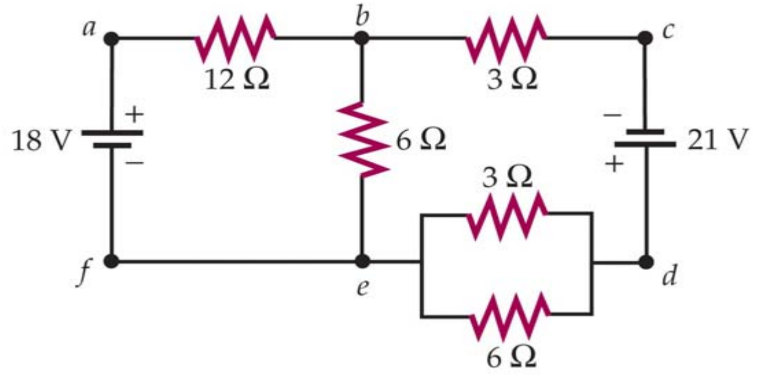
mögliches Prüfungsbeispiel

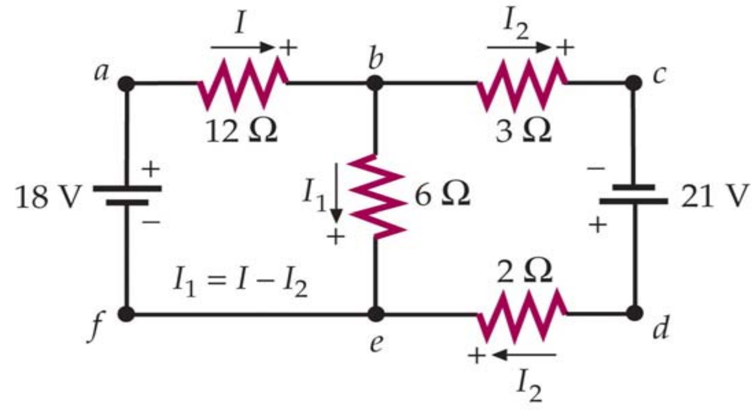


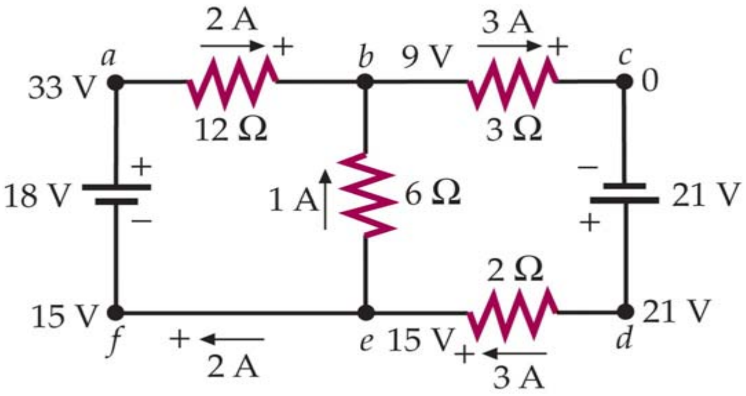


Beispiel 25.17: Ein Stromkreis mit drei Zweigen

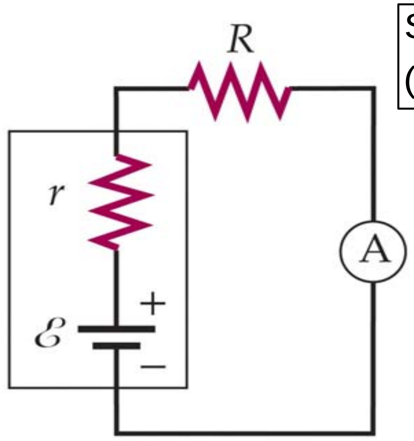
mögliches Prüfungsbeispiel





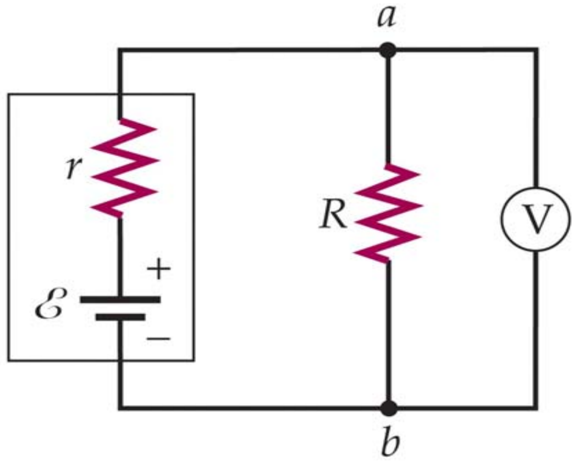


Meßgeräte für Strom, Spannung, und Widerstand

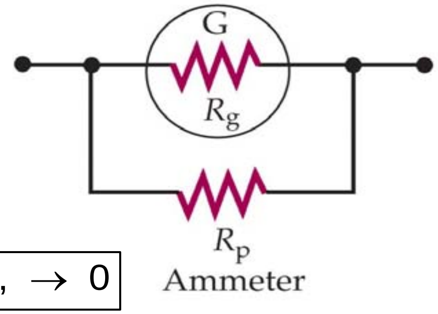


Strommessung mit einem Amperemeter (in Reihe zu R geschaltet)

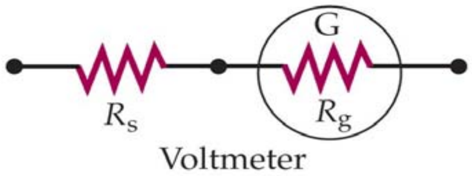
Spannungsmessung mit einem Voltmeter (parallel zu R geschaltet)



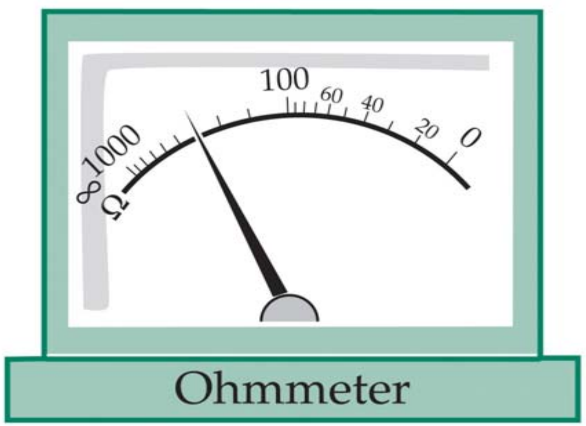
Galvanometer

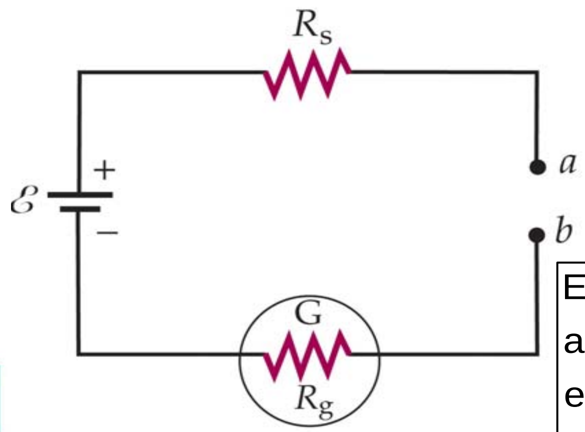


R_S sehr groß, $\rightarrow \infty$



R_P sehr klein, $\rightarrow 0$



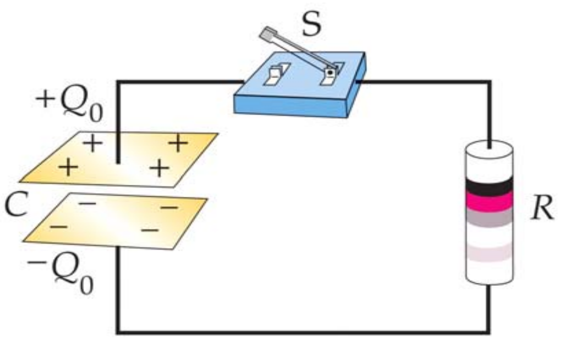


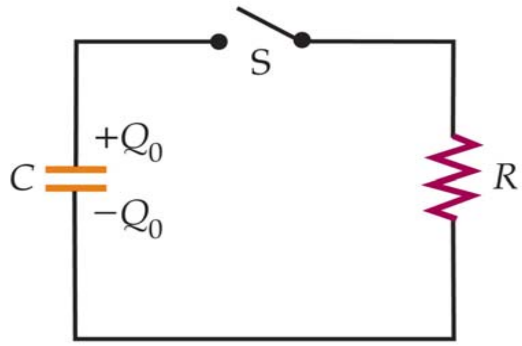
Ein einfaches Ohmmeter ist eine Reihenschaltung aus Spannungsquelle, einem Galvanometer, und einem Widerstand R_S (so gewählt, daß wenn a und b kurzgeschlossen $\Rightarrow$ Vollausschlag)

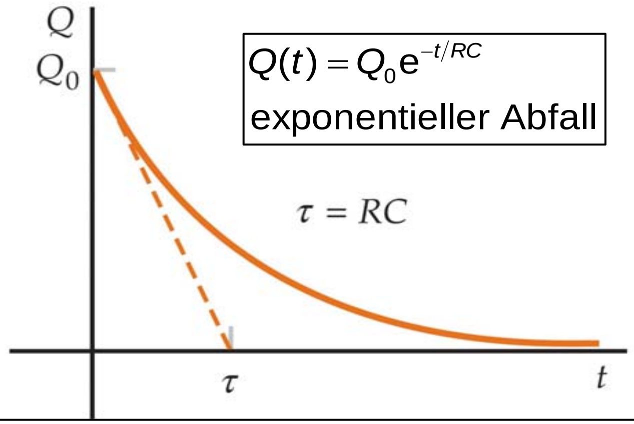
25.6 RC-Stromkreise (RC circuits)

Eine Schaltung, die einen Ohm'schen Widerstand und einen Kondensator enthält, bezeichnet als RC-Stromkreis. Der Strom fließt in einer Richtung, aber die Stromstärke ist zeitlich nicht konstant.

Entladen eines Kondensators







Reihenschaltung eines Kondensators C, eines Schalters S und eines Widerstands R: Zum Zeitpunkt $t \leq 0 \Rightarrow$ obere Platte des Kondensators C enthält die Ladung $+Q_0$, die untere Platte $-Q_0$ $\Rightarrow$ Potentialdifferenz zwischen den Platten $U_{C,0} = \dfrac{Q_0}{C}$. Zum Zeitpunkt $t = 0$ Schalter geschlossen $\Rightarrow$ Anfangsstrom $I_0 = \dfrac{U_{C,0}}{R} = \dfrac{Q_0}{RC} \Rightarrow$ mit der Zeit nimmt die Ladung des Kondensators ab: $I = -\dfrac{dQ}{dt} \Rightarrow$ Kirchhoff'sche Maschenregel $U_C - IR = 0 \Rightarrow$

$$\frac{Q}{C} + \frac{dQ}{dt}R = 0 \Rightarrow \frac{dQ}{dt} = -\frac{Q}{RC} \sim -Q \Rightarrow \frac{dQ}{Q} = -\frac{dt}{RC} \Rightarrow \int_{Q_0}^{Q'} \frac{dQ}{Q} = -\frac{1}{RC}\int_0^{t'} dt \Rightarrow \ln\frac{Q'}{Q_0} = -\frac{t'}{RC} \Rightarrow$$

da t' beliebig gewählt $\Rightarrow t' = t$ und $Q' = Q(t) \Rightarrow Q(t) = Q_0 e^{-t/RC}$

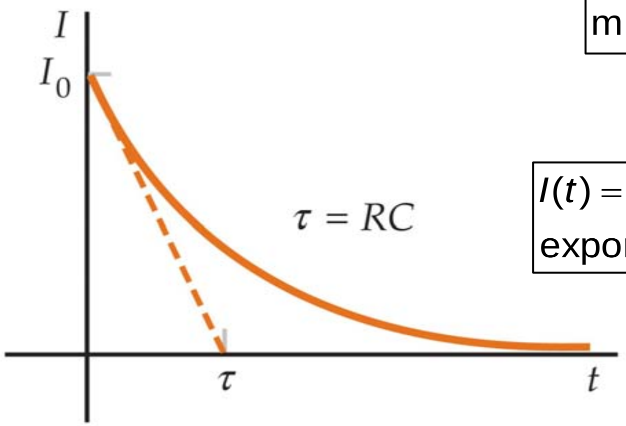
Zeitkonstante τ: wie lange es dauert bis die Ladung um den Faktor $1/e = 0.37$ abnimmt

$$\tau = RC \qquad (25\text{-}32)$$

DEFINITION—TIME CONSTANT

aus $Q(t) = Q_0 e^{-t/RC}$ mit Gl. (25.27) $I = -\frac{dQ}{dt} \Rightarrow I = -\left(-\frac{Q_0}{RC}\right) e^{-t/RC} = \frac{Q_0}{RC} e^{-t/RC} \Rightarrow$

mit Gl. (25.26) $I = I_0 e^{-t/RC}$



$I(t) = I_0 e^{-t/RC}$

exponentieller Abfall

Beispiel 25.18: Entladung eines Kondensators

Kondensator mit $C = 4\ \mu\text{F}$, aufgeladen auf $U_{C,0} = 24$ V, wird entladen über Widerstand mit $R = 200\ \Omega \Rightarrow$

Gesucht: a) Anfangsladung q_0, b) Anfangsstrom I_0, c) Zeitkonstante $\tau = RC$, d) Ladung nach $t = 4$ ms nach Schließen der Verbindung Kondensator - Widerstand.

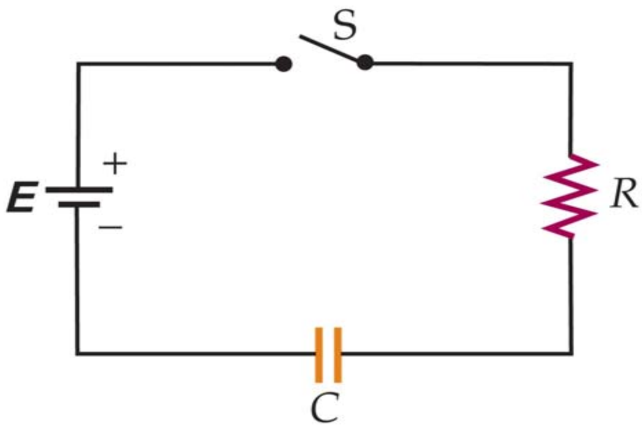
a) aus Gl. (24.6) $C = \frac{q}{U} \Rightarrow q_0 = CU_{C,0} = (4\ \mu\text{F})(24\ \text{V}) = 96\ \mu\text{C}$

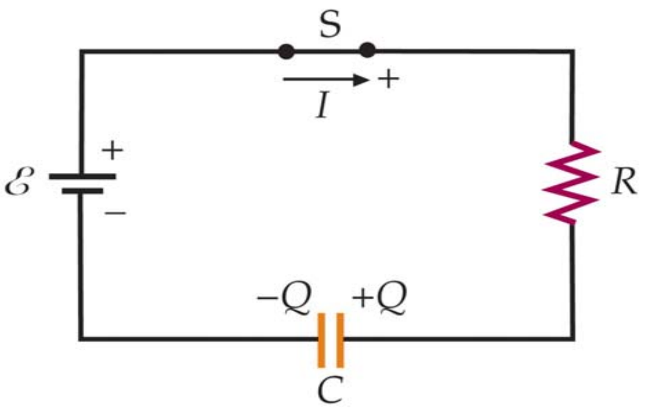
b) aus Gl. (25.26) $I_0 = \frac{U_{C,0}}{R} = \frac{24\ \text{V}}{200\ \Omega} = 0.12$ A

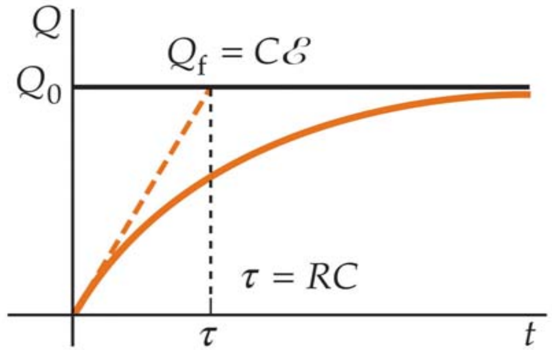
c) aus Gl. (25.32) $\tau = RC = (200\ \Omega)(4\ \mu\text{F}) = 800\ \mu\text{s} = 0.8$ ms

d) aus Gl. (25.31) $q(t) = q_0 e^{-t/RC} \Rightarrow q(t = 4\ \text{ms}) = (96\ \mu\text{C}) e^{-(4\ \text{ms})/(0.8\ \text{ms})} = (96\ \mu\text{C}) e^{-5} = 0.647\ \mu\text{C}$

Aufladen eeines Kondensators







Reihenschaltung einer Spannungsquelle U, eines Kondensators C, eines Schalters S und eines Widerstands R :

Zum Zeitpunkt $t \leq 0 \Rightarrow$ Kondensator entladen $\Rightarrow$ Potentialdifferenz zwischen den Platten $U_{C,0} = 0$.

Zum Zeitpunkt $t = 0$ Schalter geschlossen $\Rightarrow$ Anfangsstrom $I_0 = \dfrac{U}{R} \Rightarrow$

Kirchhoff'sche Maschenregel $U - IR - U_C = 0 \Rightarrow U - IR - \dfrac{Q}{C} = 0 \Rightarrow$ mit $I = \dfrac{\mathrm{d}Q}{\mathrm{d}t}$ $U - \dfrac{\mathrm{d}Q}{\mathrm{d}t}R - \dfrac{Q}{C} = 0 \Rightarrow$

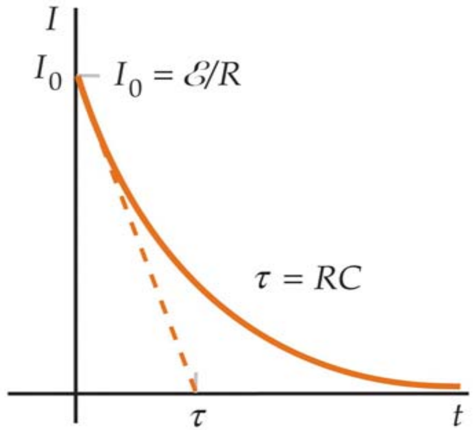
$$CU - RC\frac{\mathrm{d}Q}{\mathrm{d}t} - Q = 0 \Rightarrow RC\frac{\mathrm{d}Q}{\mathrm{d}t} = CU - Q \Rightarrow \frac{\mathrm{d}Q}{CU - Q} = \frac{\mathrm{d}t}{RC} \Rightarrow \int_0^{Q'} \frac{\mathrm{d}Q}{CU - Q} = \frac{1}{RC}\int_0^{t'} \mathrm{d}t \Rightarrow$$

Substitution $CU - Q = q$ und $\mathrm{d}q = -\mathrm{d}Q \Rightarrow \displaystyle\int_0^{Q'} \frac{\mathrm{d}Q}{CU - Q} = -\int_{CU}^{CU-Q'} \frac{\mathrm{d}q}{q} = \ln\frac{CU - Q'}{CU} = -\frac{t'}{RC}$

$\Rightarrow$ da t' beliebig gewählt $\Rightarrow t' = t$ und $Q' = Q(t) \Rightarrow \dfrac{CU - Q(t)}{CU} = \mathrm{e}^{-t/RC}$

$\Rightarrow CU - Q(t) = CU\mathrm{e}^{-t/RC} \Rightarrow Q(t) = CU\left(1 - \mathrm{e}^{-t/RC}\right)$

Strom aus $I = \dfrac{\mathrm{d}Q}{\mathrm{d}t} \Rightarrow I = CU\left(-\dfrac{-1}{RC}\mathrm{e}^{-t/RC}\right) = \dfrac{U}{R}\mathrm{e}^{-t/RC} = I_0\mathrm{e}^{-t/RC}$



Beispiel 25.19: Aufladung eines Kondensators

Mit einer Batterie $U = 6$ V wird ein Kondensator $C = 2\ \mu$F über einen Ohm'schen Widerstand $R = 100\ \Omega$ augeladen. Gesucht: a) Strom I_0, b) Maximale Ladung des Kondensators $q_\mathrm{E} = CU$, c) die Zeit t zur Aufladung auf 0.9 q_E, d) die Ladung q für $I = I_0/2 \quad \Rightarrow$

Teil a) aus Gl. (25.37) $I_0 = U/R = (6\ \mathrm{V})/(100\ \Omega) = 0.06\ \mathrm{A}$

Teil b) aus Gl. (25.36) $q_\mathrm{E} = CU = (2\ \mu\mathrm{F})(6\ \mathrm{V}) = 12\ \mu\mathrm{C}$

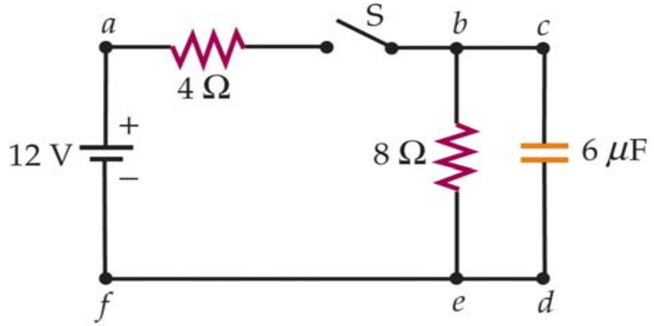
Teil c) aus Gl. (25.36) $q = CU\left(1-\mathrm{e}^{-t/RC}\right) \quad \Rightarrow \quad 0.9CU = CU\left(1-\mathrm{e}^{-t/RC}\right) \quad \Rightarrow \quad 0.9 = 1-\mathrm{e}^{-t/RC} \quad \Rightarrow \quad \mathrm{e}^{-t/RC} = 0.1$

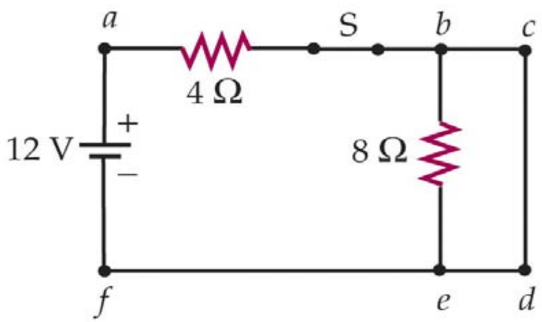
$\Rightarrow \quad -t/RC = \ln(0.1) = -2.30 \quad \Rightarrow \quad t = 2.30RC = 2.30(100\ \Omega)(2\ \mu\mathrm{F}) = 460\ \mu\mathrm{s}$

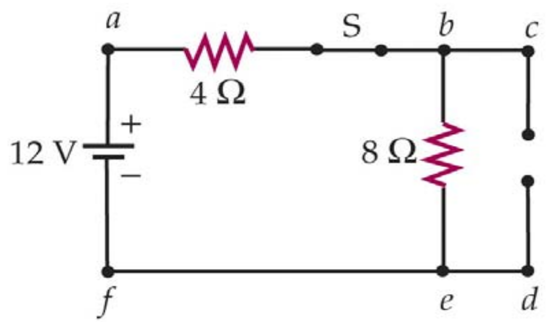
Teil d) aus Maschenregel $U - RI - q/C = 0 \quad \Rightarrow \quad$ mit $I = I_0/2 = U/(2R) \quad \Rightarrow \quad U - RU/(2R) - q/C = 0 \quad \Rightarrow$

$U/2 - q/C = 0 \quad \Rightarrow \quad q = (CU)/2 = q_\mathrm{E}/2$

Beispiel 25.20: Ströme und Ladungen nach verschiedenen Zeiten mögliches Prüfungsbeispiel







Die Energiebilanz beim Aufladen eines Kondensators

Während des Aufladens fließt durch die Batterie insgesamt $q_\mathrm{E} = CU \quad \Rightarrow \quad$ die Batterie verrichtet die Arbeit $W = q_\mathrm{E}U = CU^2$

Die Hälfte ist in Form von elektrischer Energie im Kondensator gespeichert (siehe Gl. 24.12)

$$E_\mathrm{el} = \frac{1}{2} q_\mathrm{E} U$$

Die andere Hälfte wird durch den Ohm'schen Widerstand in Wärme umgewandelt:

Rate, mit der Arbeit am Ohm'schen Widerstand R in Wärme umgewandelt wird $\dfrac{\mathrm{d}W_R}{\mathrm{d}t} = RI^2 \quad \Rightarrow$

mit Gl. (25.37) $I = \dfrac{U}{R}\mathrm{e}^{-t/RC} \quad \Rightarrow \quad \dfrac{\mathrm{d}W_R}{\mathrm{d}t} = R\left(\dfrac{U}{R}\mathrm{e}^{-t/RC}\right)^2 = \dfrac{U^2}{R}\mathrm{e}^{-2t/RC} \quad \Rightarrow$

Integration von $t = 0$ bis $t = \infty \quad \Rightarrow \quad W_R = \displaystyle\int_0^\infty \frac{U^2}{R}\mathrm{e}^{-2t/RC}\mathrm{d}t = \frac{U^2}{R}\int_0^\infty \mathrm{e}^{-2t/RC}\mathrm{d}t$

Substitution $a = 2/RC \quad \Rightarrow \quad W_R = \displaystyle\frac{U^2}{R}\int_0^\infty \mathrm{e}^{-at}\mathrm{d}t = \frac{U^2}{R}\left.\frac{\mathrm{e}^{-at}}{-a}\right|_0^\infty = \frac{U^2}{R}\frac{(0-1)}{-a} = \frac{U^2}{Ra} = \frac{U^2RC}{2R} = \frac{1}{2}U^2C = \frac{1}{2}q_\mathrm{E}U$

24. Elektrische Ströme