

ELEKTRIZITÄT UND MAGNETISMUS

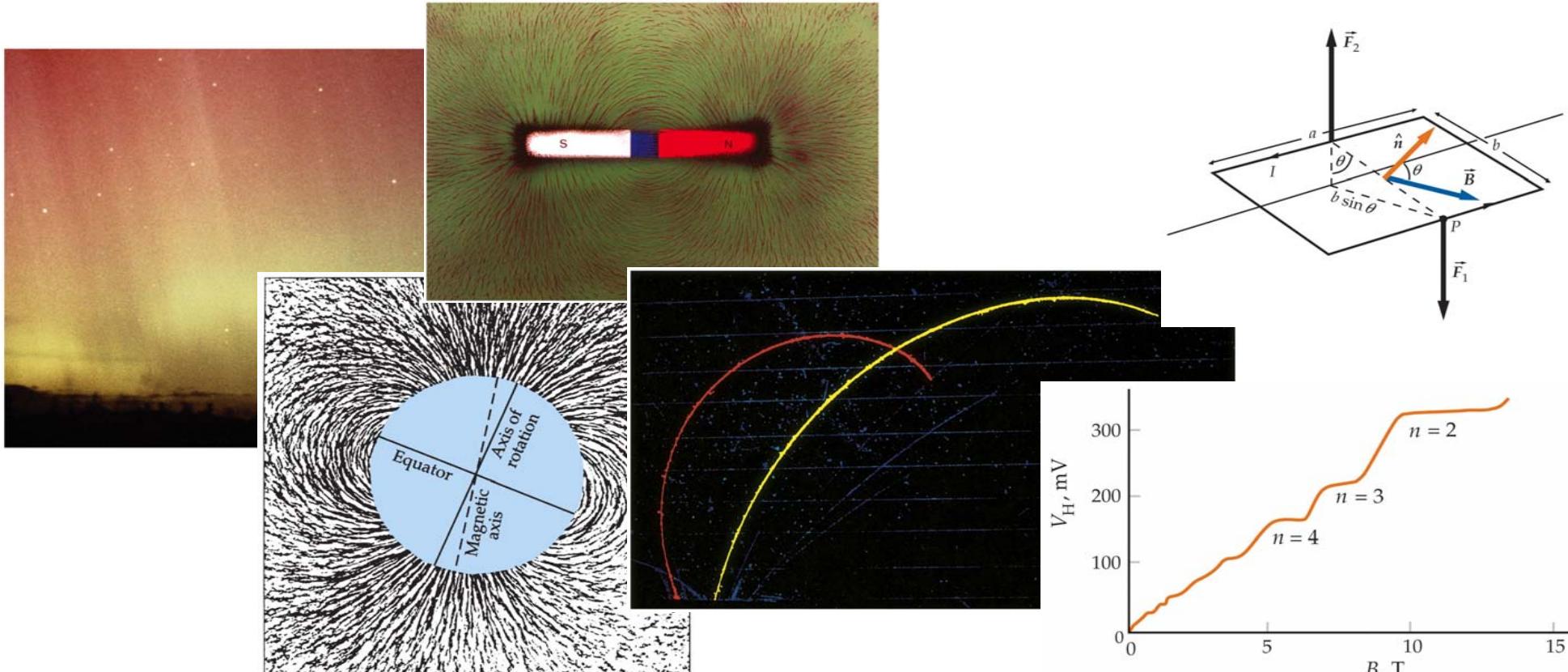
Tipler-Mosca 26. Das Magnetfeld (The magnetic field)

26.1 Die magnetische Kraft (The force exerted by a magnetic field)

26.2 Die Bewegung einer Punktladung in einem Magnetfeld (Motion of a point charge in a magnetic field)

26.3 Das auf Leiterschleifen und Magnete ausgeübte Drehmoment (Torques on current loops and magnets)

26.4 Der Hall-Effect (The Hall effect)



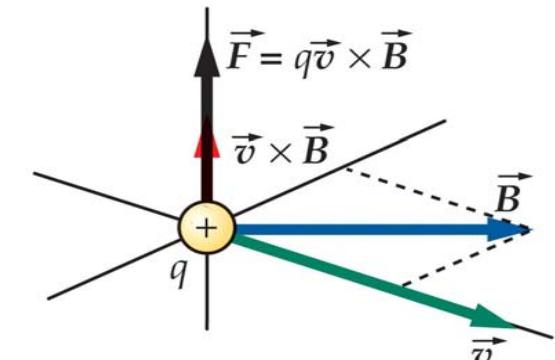
26.1 Die magnetische Kraft (The force exerted by a magnetic field)

Die Existenz eines Magnetfelds \vec{B} in einem bestimmten Punkt des Raums kann man durch eine Kompassnadel nachweisen: Ist ein Magnetfeld vorhanden, so richtet sich die Nadel entlang der magnetischen Feldlinien aus.

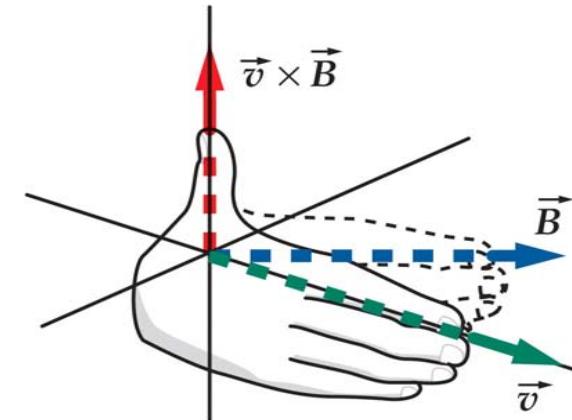
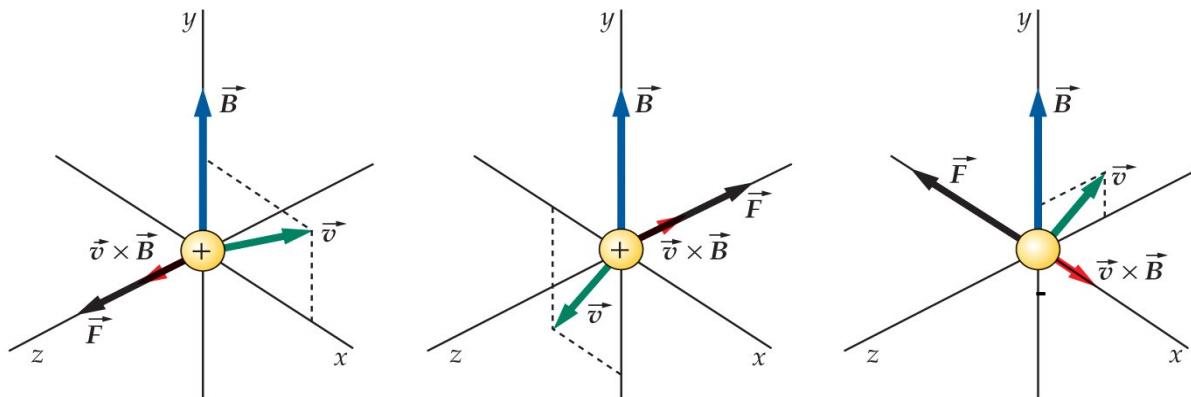
Auf eine Ladung q , die sich mit Geschwindigkeit \vec{v} in einem Magnetfeld \vec{B} bewegt, wirkt die (magnetische) Kraft $\vec{F} = q\vec{v} \times \vec{B}$.
 $\vec{F} \perp \vec{v}, \vec{B}$, Rechte-Hand-Regel

$$\vec{F} = q\vec{v} \times \vec{B}$$

26-1



MAGNETIC FORCE ON A MOVING CHARGE



Richtung der Kraft \vec{F} , die im Magnetfeld \vec{B} auf eine mit der Geschwindigkeit \vec{v} bewegte Ladung q wirkt

$$1 \text{ G} = 10^{-4} \text{ T}$$

26-3

$$\text{SI-Einheit: Tesla (T)} \quad 1 \text{ T} = \frac{1 \text{ N}}{1 \text{ C} \cdot 1 \text{ m s}^{-1}} = \frac{1 \text{ N}}{1 \text{ A} \cdot 1 \text{ m}} = 1 \frac{\text{N}}{\text{A m}}$$

DEFINITION—GAUSS

Beispiel 26.1: Die Kraft auf ein sich nordwärts bewegendes Protons

Auf der Erdoberfläche Erdmagnetfeld $B = 0.6 \times 10^{-4}$ T = 0.4 G, zeigt nach Norden und nach unten (Winkel mit der Horizontale $\theta = 70^\circ$);

Proton mit $q = +e$ bewegt sich horizontal mit $v = 10^7$ m s⁻¹ nach Norden.

Gesucht a) Magnetische Kraft aus $|\vec{F}| = q|\vec{v}||\vec{B}|\sin\theta$ und b) vektoriell aus $\vec{F} = q\vec{v} \times \vec{B}$

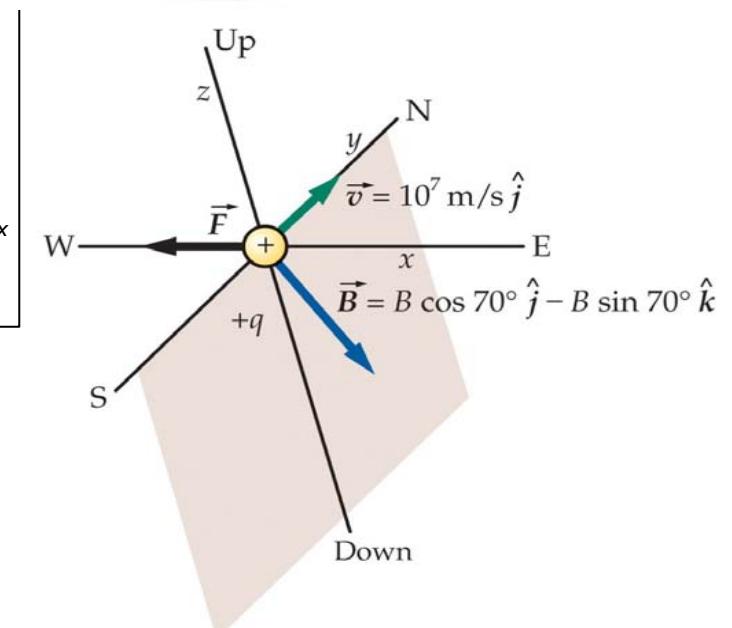
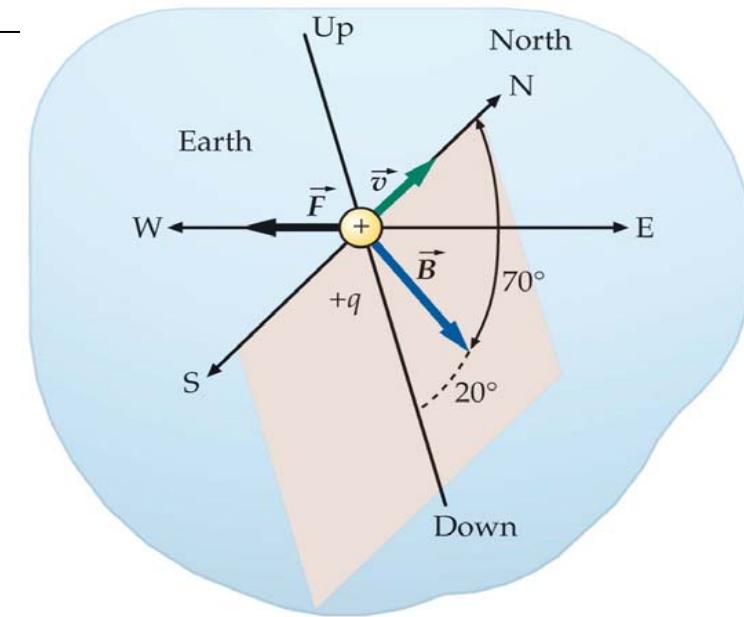
Teil a) aus $|\vec{F}| = q|\vec{v}||\vec{B}|\sin\theta \Rightarrow$

$$|\vec{F}| = (1.6 \times 10^{-19} \text{ C})(10^7 \text{ m s}^{-1})(0.6 \times 10^{-4} \text{ T})\sin 70^\circ = 9.02 \times 10^{-17} \text{ N}$$

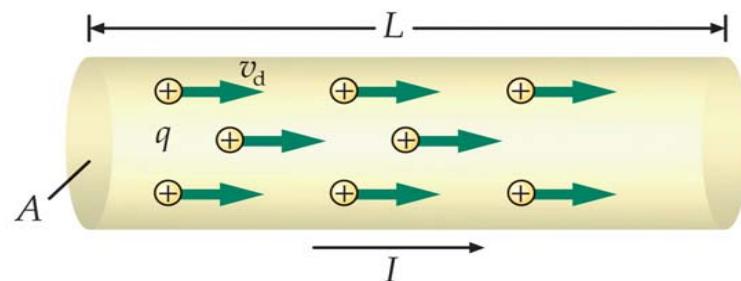
Teil b) aus $\vec{F} = q\vec{v} \times \vec{B}$ mit $\vec{v} = v_y \vec{e}_y$ und $\vec{B} = B_y \vec{e}_y + B_z \vec{e}_z \Rightarrow$

$$\begin{aligned} \vec{F} &= q\vec{v} \times \vec{B} = q(v_y \vec{e}_y) \times (B_y \vec{e}_y + B_z \vec{e}_z) = qv_y B_y (\vec{e}_y \times \vec{e}_y) + qv_y B_z (\vec{e}_y \times \vec{e}_z) = \\ &= 0 + qv_y B_z \vec{e}_x \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{mit } B_z &= -|\vec{B}|\sin\theta \Rightarrow \vec{F} = -(1.6 \times 10^{-19} \text{ C})(10^7 \text{ m s}^{-1})(0.6 \times 10^{-4} \text{ T})\sin 70^\circ \vec{e}_x \\ &= -(9.02 \times 10^{-17} \text{ N})\vec{e}_x \end{aligned}$$



Die auf einen stromdurchflossenen Leiter in einem Magnetfeld wirkende Kräfte ist gleich der Summe der Kräfte auf alle geladenen Teilchen, deren Bewegung den Strom hervorruft.



Auf jede Ladung wirkt $q\vec{v}_d \times \vec{B}$,
Anzahl der Ladungsträger im Leiterabschnitt der Länge L:

$$\frac{N}{V} AL \Rightarrow$$

$$\text{ingesamt wirkende Kraft } \vec{F} = (q\vec{v}_d \times \vec{B}) \frac{N}{V} AL \Rightarrow$$

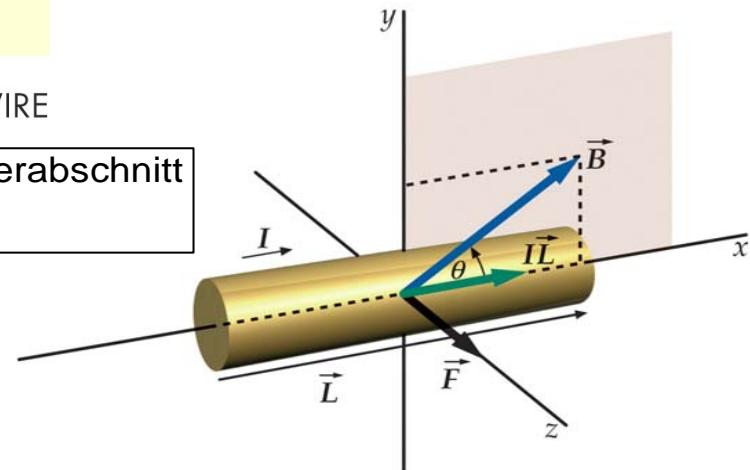
$$\text{mit Gl. (25.3)} I = q \frac{N}{V} Av_d \Rightarrow \vec{F} = I\vec{L} \times \vec{B}$$

$$\vec{F} = I\vec{L} \times \vec{B}$$

26-4

MAGNETIC FORCE ON A SEGMENT OF CURRENT-CARRYING WIRE

Magnetische Kraft auf einem stromdurchflossenen Leiterabschnitt
in einem Magnetfeld



Für einen Leiter mit beliebiger Gestalt und beliebige Magnetfelder

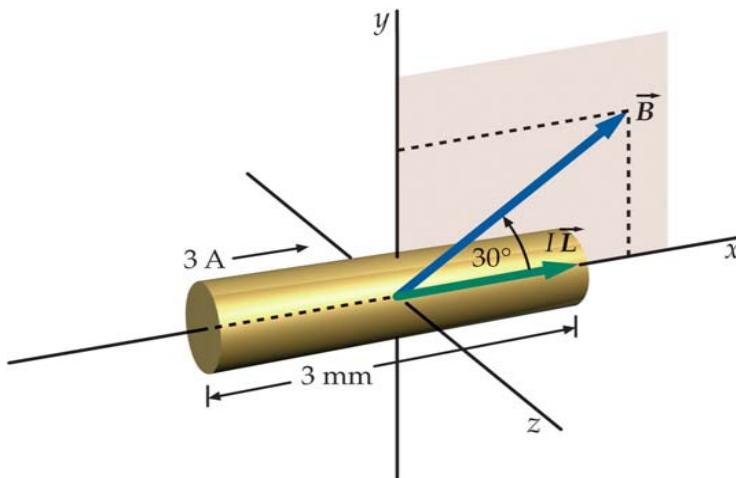
$$d\vec{F} = Id\vec{\ell} \times \vec{B}$$

26-5

MAGNETIC FORCE ON A CURRENT ELEMENT

$Id\vec{\ell}$ Stromelement;
die insgesamt wirkende Kraft auf einen
stromdurchflossenen Leiter erhält man
durch Summation (Integration) der Kräfte
auf die Stromelemente

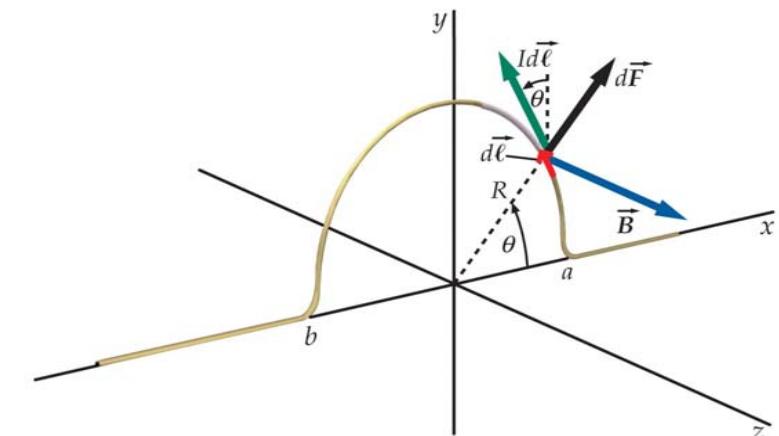
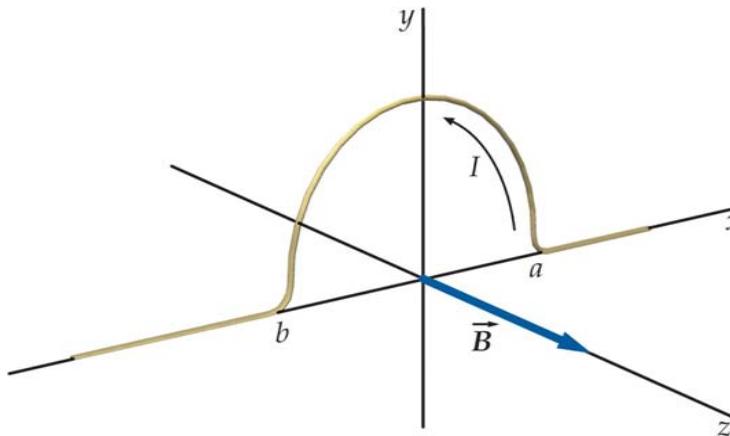
Beispiel 26.2: Magnetische Kraft auf einen geraden Leiter



Drahtabschnitt $L = 3 \text{ mm}$, in positiver Richtung Strom $I = 3 \text{ A}$. Leiter in einem Magnetfeld $B = 0.02 \text{ T}$, Vektor in der x-y-Ebene, Winkel $\theta=30^\circ$ mit der x-Achse. Gesucht: magnetische Kraft \Rightarrow aus Gl. (26.4) $\vec{F} = I\vec{L} \times \vec{B} = I|\vec{L}||\vec{B}|\sin\theta \vec{e}_z \Rightarrow$
 $\vec{F} = (3 \text{ A})(3 \text{ mm})(0.02 \text{ T})\sin30^\circ \vec{e}_z = (9 \times 10^{-5} \text{ N})\vec{e}_z$

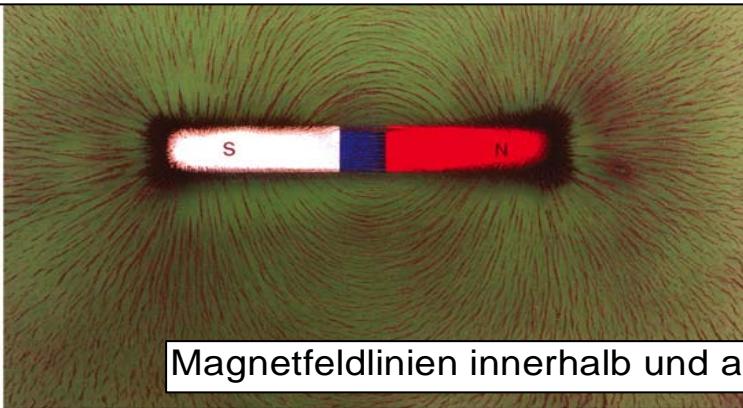
Beispiel 26.3: Magnetische Kraft auf einen gebogenen Leiter

mögliche Prüfungsbeispiel

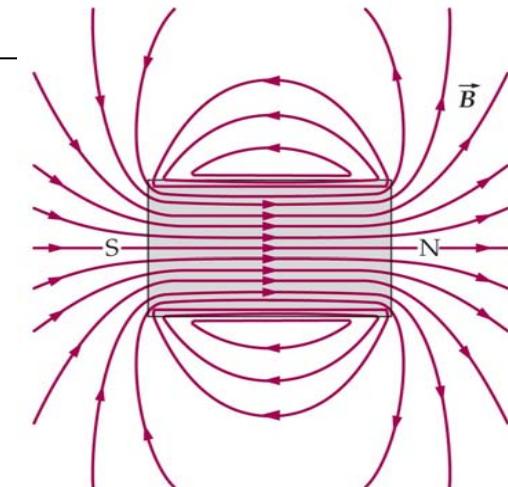


Ein Magnetfeld \vec{B} kann durch Magnetfeldlinien dargestellt werden:

1. Elektrische Feldlinien zeigen in die Richtung der auf eine positive Ladung wirkende elektrostatische Kraft.
Magnetfeldlinien stehen senkrecht zu der Kraft, die auf eine bewegte Ladung ausgeübt wird.
2. Elektrische Feldlinien gehen von positiven Ladungen aus und enden an negativen Ladungen.
Magnetfeldlinien haben weder Anfang noch Ende, sie sind in sich geschlossen.



Magnetfeldlinien innerhalb und außerhalb eines Stabmagneten

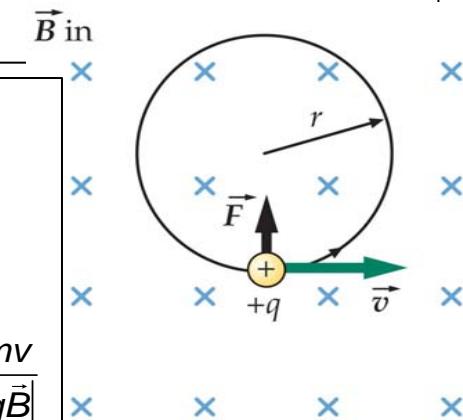


26.2 Die Bewegung einer Punktladung in einem Magnetfeld (Motion of a point charge in a magnetic field)

Bewegtes geladenes Teilchen in einem Magnetfeld \Rightarrow ausgeübte Kraft $\perp \vec{v}$ \Rightarrow Richtung von \vec{v} geändert, aber $|\vec{v}| = \text{konstant}$ \Rightarrow Magnetfelder verrichten an Teilchen keine Arbeit und haben keinen Einfluß auf deren kinetische Energie

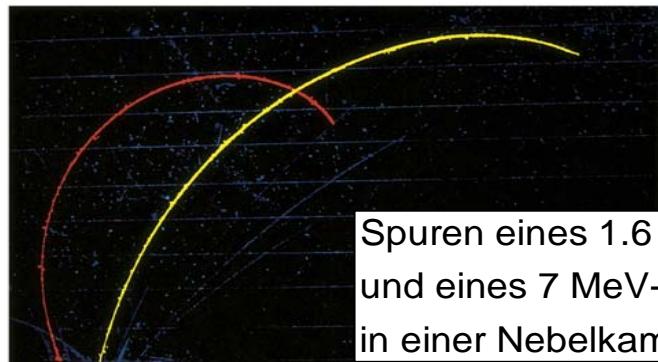
Spezialfall: \vec{B} homogen, $\vec{v} \perp \vec{B}$ \Rightarrow Kreisbahn \Rightarrow Winkelgeschwindigkeit ω \Rightarrow die für die Zentripetalbeschleunigung $\vec{a}_{ZP} = -\left(v^2 / r\right)\vec{e}_r$ (siehe Gl. 3.24) bei der Kreisbewegung notwendige Kraft wird vom Magnetfeld ausgeübt \Rightarrow die nach innen zum Krümmungsmittelpunkt gerichtete Normalbeschleunigung $\vec{a}_n = \left(v^2 / r\right)\vec{n}$

$$\text{(siehe Gl. 3.26)} \Rightarrow a_n = \frac{F}{m} = \frac{q}{m} v B = \frac{v^2}{r} \Rightarrow \text{Radius der Kreisbahn } r = \frac{mv}{qB} \sim v \text{ bzw. } r = \frac{mv}{|q\vec{B}|}$$





Kreisbahn von Elektronen in einem homogenen Magnetfeld



Spuren eines 1.6 MeV-Protons (rot)
und eines 7 MeV-Alphateilchens (gelb)
in einer Nebelkammer

$$\text{Periode der Kreisbewegung } T = \frac{2\pi r}{v} \Rightarrow \text{mit } r = \frac{mv}{qB} \Rightarrow T = \frac{2\pi m}{qB}$$

$$T = \frac{2\pi(mv/qB)}{v} = \frac{2\pi m}{qB}$$

26-7

CYCLOTRON PERIOD

$$f = \frac{1}{T} = \frac{qB}{2\pi m}, \quad \text{so} \quad \omega = 2\pi f = \frac{q}{m}B$$

CYCLOTRON FREQUENCY

wichtig: $\omega \neq f(v, r)$ \Rightarrow

Anwendungen: Massenspektrometer, Zyklotron

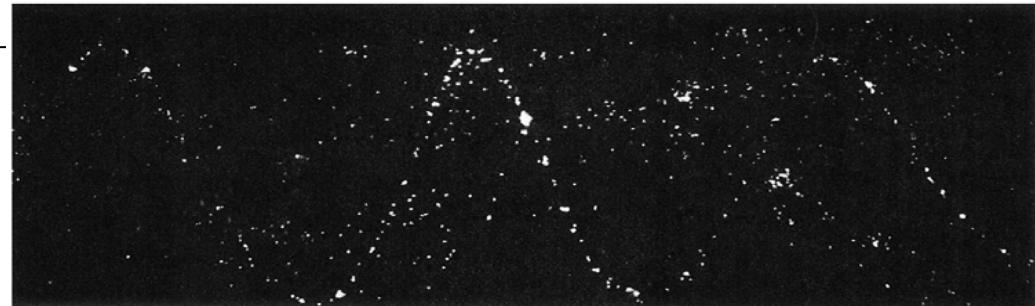
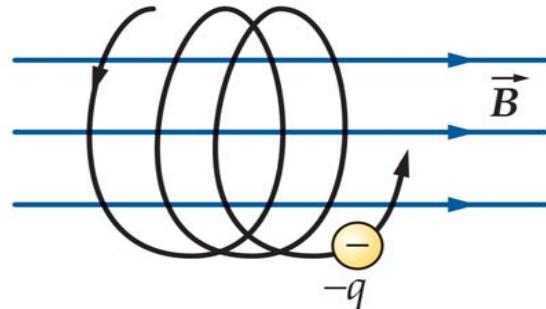
Beispiel 26.4: Die Zyklotronfrequenz

Proton, $m = 1.67 \times 10^{-27}$ kg, $q = +e = 1.6 \times 10^{-19}$ C, auf Kreisbahn $r = 21$ cm senkrecht zum Magnetfeld $B = 0.4$ T;
gesucht: a) Periode T der Kreisbewegung, b) Geschwindigkeit v des Protons \Rightarrow

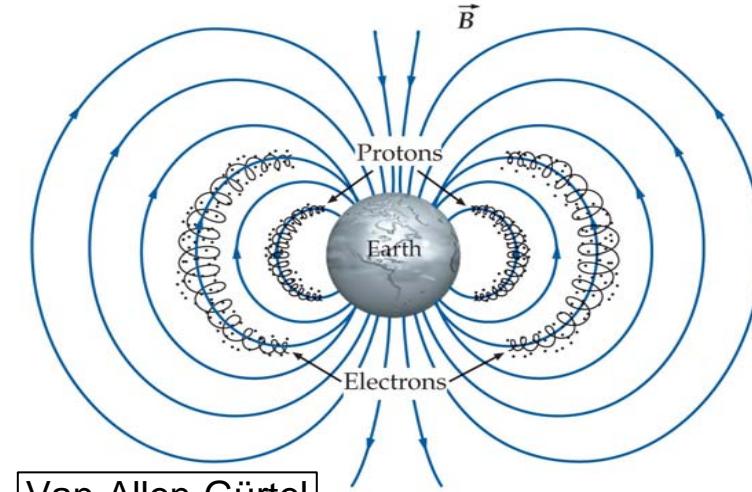
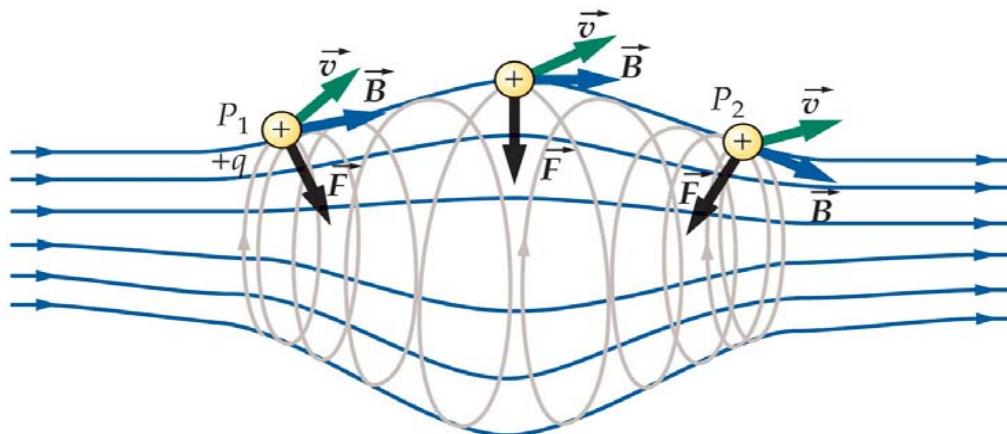
$$\text{Teil a) aus Gl. (26.7)} \quad T = \frac{2\pi m}{qB} = \frac{2\pi(1.67 \times 10^{-27} \text{ kg})}{(1.6 \times 10^{-19} \text{ C})(0.4 \text{ T})} = 1.64 \times 10^{-7} \text{ s} = 164 \text{ ns}$$

$$\text{Teil b) aus Gl. (26.6)} \quad r = \frac{mv}{qB} \Rightarrow v = \frac{rqB}{m} = \frac{(0.21 \text{ m})(1.6 \times 10^{-19} \text{ C})(0.4 \text{ T})}{(1.67 \times 10^{-27} \text{ kg})} = 8.05 \times 10^6 \text{ m s}^{-1} = 8.05 \text{ m } \mu\text{s}^{-1}$$

Geladenes Teilchen mit Geschwindigkeitskomponente sowohl parallel wie senkrecht zum homogenen Magnetfeld:
 für v_{\parallel} ist keine Einwirkung der magnetischen Kraft vorhanden \Rightarrow keine Beschleunigung $\Rightarrow v_{\parallel} = \text{konstant}$;
 für v_{\perp} ist eine Einwirkung der magnetischen Kraft vorhanden \Rightarrow Beschleunigung $\perp v_{\perp} \Rightarrow$ Kreisbewegung \Rightarrow
 insgesamt Schraubenbewegung

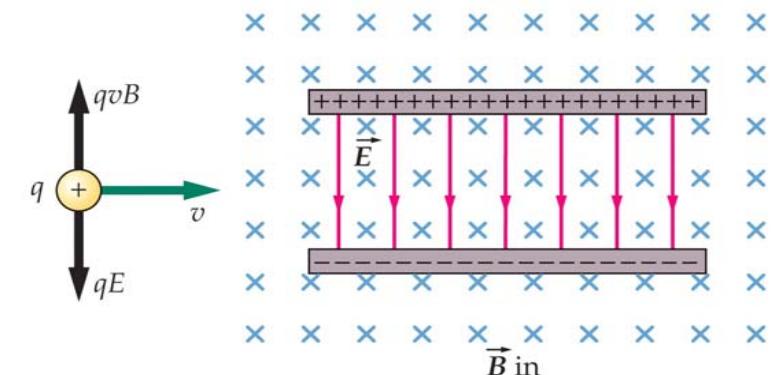


Magnetische Flasche: Das magnetische Feld auf beiden Seiten ist wesentlich stärker als in der Mitte \Rightarrow das geladene Teilchen bewegt sich darin auf Spiralbahnen um die Feldlinien hin und her, ohne die Flasche verlassen zu können.



Der Geschwindigkeitsfilter

Kraft auf eine geladenes Teilchen in Anwesenheit eines elektrischen und eines magnetischen Feldes: $\vec{F} = q\vec{E} + q\vec{v} \times \vec{B}$ \Rightarrow
 damit $\vec{F} = 0 \Rightarrow q\vec{E} = -q\vec{v} \times \vec{B} \Rightarrow$
 in gekreuzten Feldern mit $\vec{v} \perp \vec{E}, \vec{B} \Rightarrow |\vec{E}| = |\vec{v}| |\vec{B}|$ bzw. $E = vB \Rightarrow$
 (Wien'sches) Geschwindigkeitsfilter



Positiv geladenes Teilchen, das sich nach rechts in gekreuzten elektrischen und magnetischen Felder bewegt \Rightarrow elektrische Kraft nach unten, und magnetische Kraft nach oben \Leftrightarrow die Kräfte heben sich auf wenn $vB = E$

Thomsons Experiment zur Messung von q/m

Die Anfangsgeschwindigkeit v_0 der geladenen Teilchen festgelegt durch Gl. (26.9) $v_0 = E/B$ in gekreuzten \vec{E} und \vec{B} ;

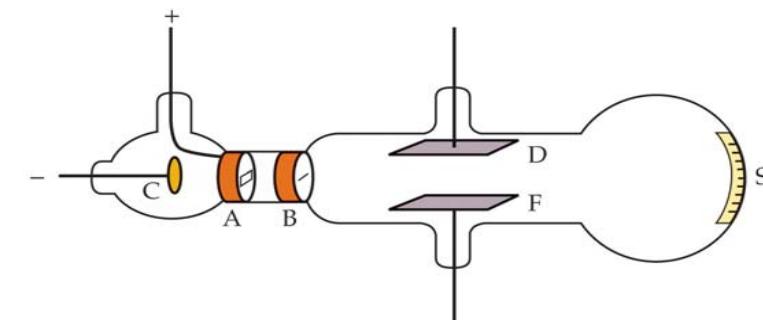
Ablenkung Δy der Elektronen abhängig von q/m :

$\Delta y = \Delta y_1 + \Delta y_2$ wobei Δy_1 Ablenkung durch \vec{E} , und Δy_2 Ablenkung während des Fluges durch das feldfreie Gebiet;

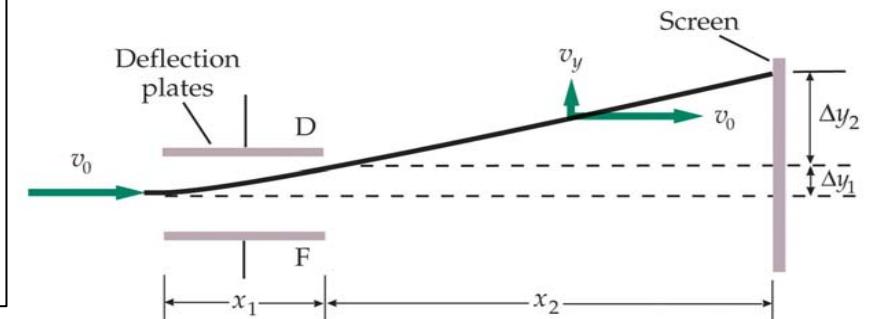
Länge der Ablenkplatten $x_1 \Rightarrow$ Flugzeit $t_1 = x_1/v_0$,

Vertikalgeschwindigkeit der Elektronen $v_y = a_y t_1 = \frac{qE_y}{m} t_1 = \frac{qE_y}{m} \frac{x_1}{v_0}$

$$\Rightarrow \Delta y_1 = \frac{1}{2} a_y t_1^2 = \frac{1}{2} \frac{qE_y}{m} \left(\frac{x_1}{v_0} \right)^2$$



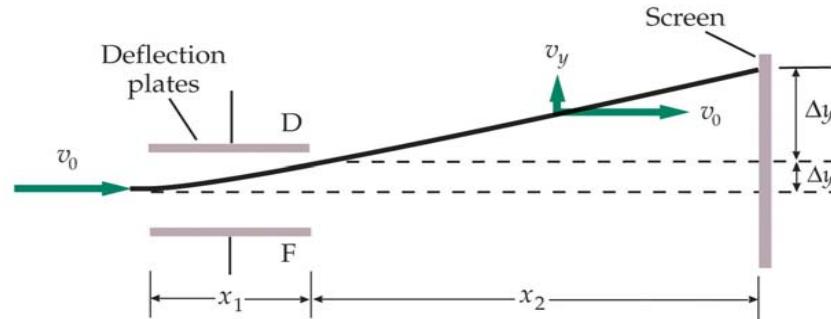
Kathodenstrahlröhre zur Messung von q/m



Länge des feldfreien Gebietes $x_2 \Rightarrow$ mit $v_0 = \text{konstant} \Rightarrow$ Flugzeit bis zum Schirm $t_2 = x_2 / v_0 \Rightarrow$

$$\text{zusätzliche Ablenkung } \Delta y_2 = v_y t_2 = \frac{qE_y}{m} \frac{x_1}{v_0} \frac{x_2}{v_0} \Rightarrow$$

$$\text{Gesamtablenkung in vertikaler Richtung } \Delta y = \Delta y_1 + \Delta y_2 = \frac{1}{2} \frac{qE_y}{m} \left(\frac{x_1}{v_0} \right)^2 + \frac{qE_y}{m} \frac{x_1}{v_0} \frac{x_2}{v_0} = \frac{qE_y}{mv_0^2} \left(\frac{x_1^2}{2} + x_1 x_2 \right) \sim \frac{q}{m}$$



Beispiel 26.5: Ablenkung eines Elektronenstrahls

Thomson'sche Versuchsanordnung, $E = -3000 \text{ V m}^{-1}$, gekreuzt anliegendes Magnetfeld $B = 1.4 \text{ G} = 1.4 \times 10^{-4} \text{ T}$.

Länge der Kondensatorplatten $x_1 = 4 \text{ cm}$, Länge des feldfreien Raums $x_2 = 30 \text{ cm} \Rightarrow$

Gesucht: Ablenkung des Elektronenstrahls

$$\text{Aus Gl. (26.10)} \Delta y = \Delta y_1 + \Delta y_2 = \frac{qE_y}{mv_0^2} \left(\frac{x_1^2}{2} + x_1 x_2 \right) \Rightarrow \text{mit } v_0 = \frac{E}{B} = \frac{3000 \text{ V m}^{-1}}{B = 1.4 \times 10^{-4} \text{ T}} = 2.14 \times 10^7 \text{ m s}^{-1} \Rightarrow$$

$$\Delta y_1 = \frac{qE_y}{mv_0^2} \left(\frac{x_1^2}{2} \right) = \frac{(-1.6 \times 10^{-19} \text{ C})(-3000 \text{ V m}^{-1})}{(9.11 \times 10^{-31} \text{ kg})(2.14 \times 10^7 \text{ m s}^{-1})^2} \frac{(0.04 \text{ m})^2}{2} = 9.20 \times 10^{-4} \text{ m}$$

$$\Delta y_2 = \frac{qE_y}{mv_0^2} x_1 x_2 = \frac{(-1.6 \times 10^{-19} \text{ C})(-3000 \text{ V m}^{-1})}{(9.11 \times 10^{-31} \text{ kg})(2.14 \times 10^7 \text{ m s}^{-1})^2} (0.04 \text{ m})(0.30 \text{ m}) = 1.38 \times 10^{-2} \text{ m} \Rightarrow$$

$$\Delta y = \Delta y_1 + \Delta y_2 = 9.20 \times 10^{-4} \text{ m} + 1.38 \times 10^{-2} \text{ m} = 14.7 \text{ mm}$$

Das Massenspektrometer

Das Massenspektrometer dient u.a. zur Messung der Isotopenmassen und zur Ermittlung der Isotopenverhältnisse:

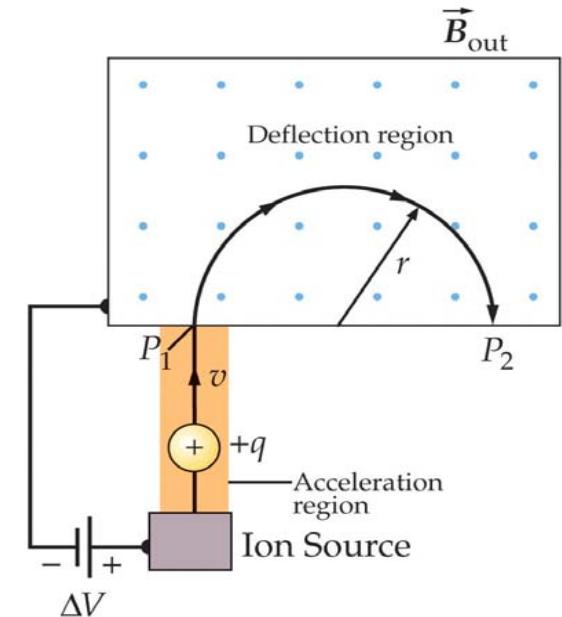
Ionen aus einer Ionenquelle werden durch ein elektrisches Feld beschleunigt

$$\Rightarrow \frac{1}{2}mv^2 = qU,$$

im homogenen Magnetfeld bewegen sich die Ionen auf einer halbkreisförmigen

$$\text{Bahn mit Radius } r = \frac{mv}{qB} \text{ (siehe Gl. 26.6)} \Rightarrow v = \frac{qBr}{m} \Rightarrow v^2 = \frac{q^2B^2r^2}{m^2} \Rightarrow$$

$$\text{eingesetzt } \Rightarrow \frac{1}{2}m\frac{q^2B^2r^2}{m^2} = qU \Rightarrow \frac{m}{q} = \frac{B^2r^2}{2U}$$



Beispiel 26.6: Trennung von Nickelisotopen

Funktionsschema eines Massenspektrometers

Ein ⁵⁸Ni-Ion mit Ladung $q = +e$ und Masse $m = 9.62 \times 10^{-26}$ kg wird durch eine Potentialdifferenz $U = 3$ kV beschleunigt und anschließend in einem Magnetfeld $B = 0.12$ T abgelenkt.

Gesucht: a) Krümmungsradius r der Flugbahn des ⁵⁸Ni-Ions im Magnetfeld, b) Differenz zum Krümmungsradius r der Flugbahn eines ⁵⁸Ni-Ion im Magnetfeld \Rightarrow

$$\text{Teil a) aus Gl. (26.12) } \frac{m}{q} = \frac{B^2r^2}{2U} \Rightarrow r = \sqrt{\frac{m}{q} \frac{2U}{B^2}} = \sqrt{\frac{(9.62 \times 10^{-26} \text{ kg})}{(1.6 \times 10^{-19} \text{ C})} \frac{2(3 \text{ kV})}{(0.12 \text{ T})^2}} = 0.501 \text{ m}$$

$$\text{Teil b) aus Gl. (26.12) } \frac{m}{q} = \frac{B^2r^2}{2U} \Rightarrow \frac{m_1}{r_1^2} = \frac{m_2}{r_2^2} \Rightarrow \frac{r_2}{r_1} = \sqrt{\frac{m_2}{m_1}} = \sqrt{\frac{60}{58}} = 1.017 \Rightarrow$$

$$r_2 = 1.017 r_1 = 1.017 (0.501 \text{ m}) = 0.510 \text{ m} \Rightarrow r_2 - r_1 = 0.510 \text{ m} - 0.501 \text{ m} = 9 \text{ mm}$$

Das Zyklotron

Das Zyklotron dient zur Beschleunigung von geladenen Teilchen (Ionen) \Rightarrow die energiereichen Ionen werden auf Atomkerne geschossen \Rightarrow Auslösung von Kernreaktionen \Rightarrow Erzeugung radioaktiver Substanzen (z.B. heutzutage in der Medizin).

Positiv geladene Teilchen treten bei S mit niedriger Geschwindigkeit aus der Ionenquelle S und in D₁ ein \Rightarrow halbkreisförmige Bahn \Rightarrow zwischen D₁ und D₂ wird eine Potentialdifferenz U erzeugt, die sich

mit der Zyklotronperiode Gl. (26.7) $T = \frac{2\pi m}{B q}$ zeitlich ändert \Rightarrow

nach der Zeit $T/2$ haben die Ionen die Lücke zwischen D₁ und D₂ erreicht \Rightarrow Potentialdifferenz so eingestellt, daß in diesem Augenblick D₂ auf höherem Potential \Rightarrow Ionen beschleunigt \Rightarrow

kinetische Energie nimmt zu \Rightarrow größerer Bahnradius in D₂ \Rightarrow nach $T/2$ wieder Lücke erreicht \Rightarrow D₁ auf höherem Potential \Rightarrow Ionen beschleunigt \Rightarrow kinetische Energie nimmt zu \Rightarrow usw. bis die Teilchen aus dem Magnetfeld austreten:

$$\text{aus Gl. (26.6)} \quad r = \frac{mv}{qB} \quad \Rightarrow \quad v = \frac{qBr}{m} \quad \Rightarrow \quad E_{\text{kin}} = \frac{1}{2}mv^2 = \frac{1}{2}m\left(\frac{qBr}{m}\right)^2 = \frac{q^2B^2}{2m}r^2 \sim r^2$$

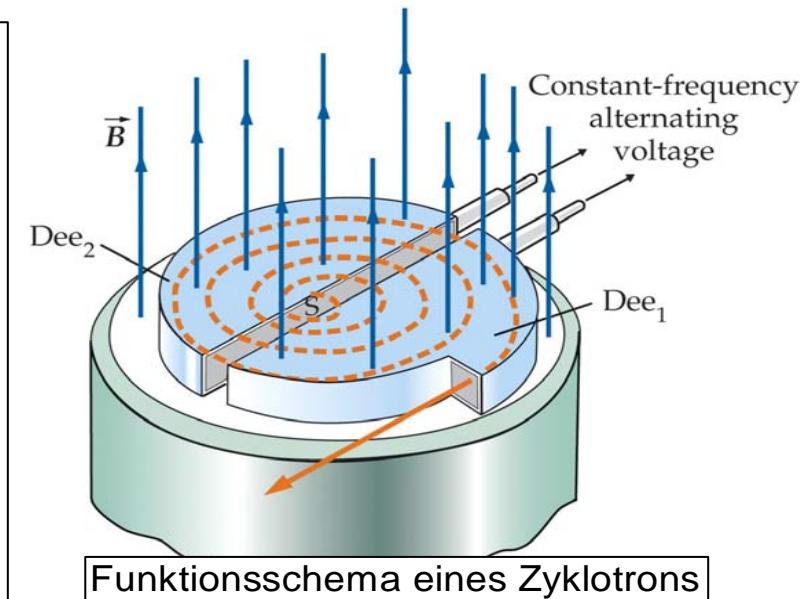
Beispiel 26.7: Energie eines beschleunigten Protons

Zyklotron mit Magnetfeld $B = 1.5 \text{ T}$, Radius $r = 0.5 \text{ m}$,

gesucht: a) Zyklotronfrequenz ν , b) kinetische Energie E_{kin} der Protonen nach Austritt aus dem Zyklotron \Rightarrow

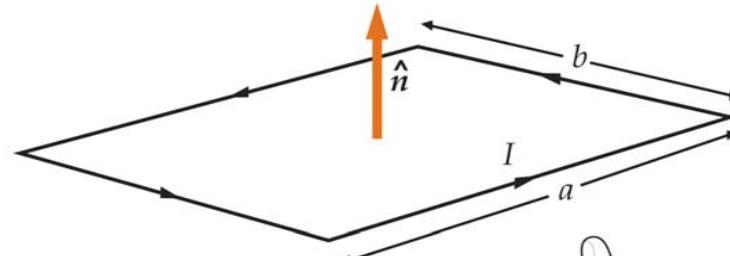
$$\text{Teil a) aus Gl. (26.8)} \quad \nu = \frac{B}{2\pi} \frac{q}{m} = \frac{(1.5 \text{ T})}{2\pi} \frac{(1.6 \times 10^{-19} \text{ C})}{(1.67 \times 10^{-27} \text{ kg})} = 2.29 \times 10^7 \text{ Hz} = 22.7 \text{ MHz}$$

$$\text{Teil b) aus Gl. (26.13)} \quad E_{\text{kin}} = \frac{q^2B^2}{2m}r^2 = \frac{(1.6 \times 10^{-19} \text{ C})^2 (1.5 \text{ T})^2}{2(1.67 \times 10^{-27} \text{ kg})} (0.5 \text{ m})^2 = 4.31 \times 10^{-12} \text{ J} = 26.9 \text{ MeV} \quad \text{da } 1 \text{ eV} = 1.6 \times 10^{-19} \text{ J}$$

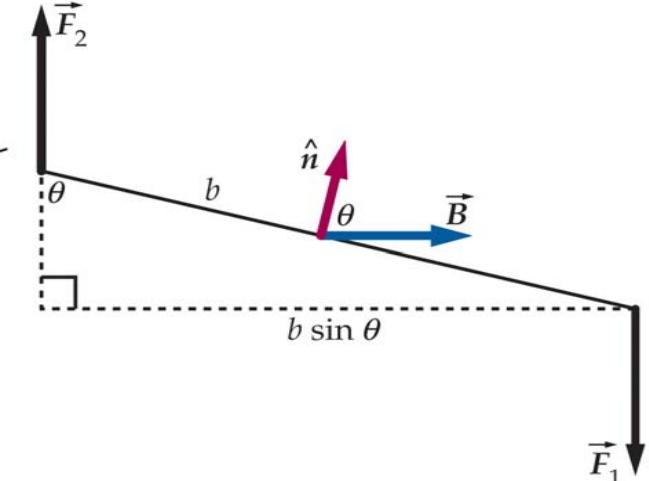
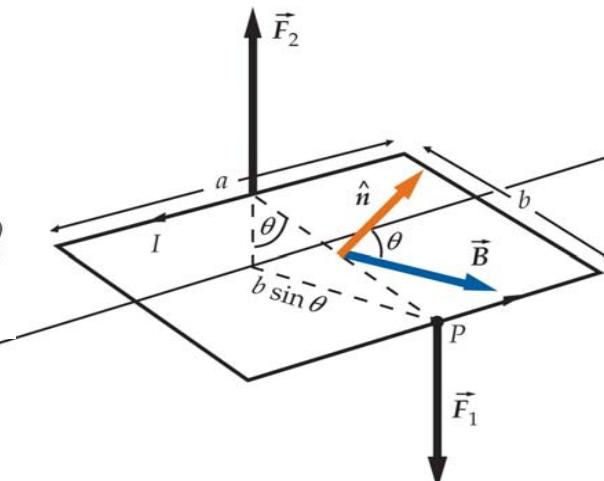


26.3 Das auf Leiterschleifen und Magnete ausgeübte Drehmoment (Torques on current loops and magnets)

In eine stromdurchflossene Leiterschleife wirkt in einem Magnetfeld keine resultierende Kraft, aber ein Drehmoment



Die Orientierung einer stromdurchflossenen Leiterschleife lässt sich durch den Normalvektor \vec{n} beschreiben



Kräfte auf eine rechteckige Leiterschleife in einem homogenen Magnetfeld, deren Normalvektor \vec{n} einen Winkel θ mit der Richtung des Magnetfelds \vec{B} einschließt: $|\vec{F}_1| = |\vec{F}_2| = IaB$ wobei \vec{F}_1 und \vec{F}_2 Kräftepaar \Rightarrow Drehmoment $|\vec{\tau}| = b|\vec{F}_2|\sin\theta = blaB = IAB\sin\theta \Rightarrow \vec{\tau} = I\vec{A} \times \vec{B}$ wobei $\vec{A} = A\vec{n}$ \Rightarrow Schleife mit N Windungen \Rightarrow $|\vec{\tau}| = NIAB\sin\theta \Rightarrow \vec{\tau} = NI\vec{A} \times \vec{B} \Leftrightarrow$ das Drehmoment versucht die Schleife so zu drehen, daß $\vec{n} \parallel \vec{B}$, daß also die Schleifenebene senkrecht zu \vec{B} orientiert ist.

Definition des magnetischen Dipolmoments μ (oder kürzer des magnetischen Moments)

$$\vec{\mu} = NI\vec{A}\hat{n}$$

26-14

SI-Einheit des magnetischen Moments: A m²

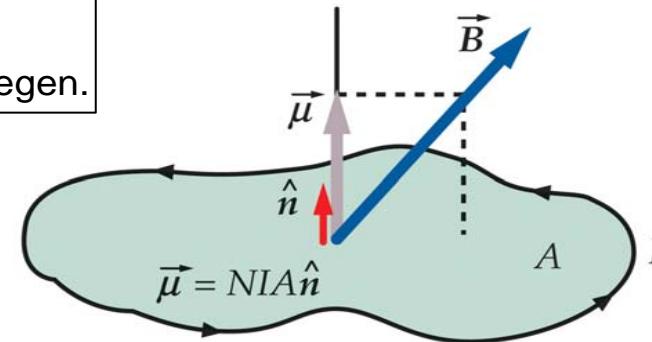
MAGNETIC DIPOLE MOMENT OF A CURRENT LOOP

Auf die Leiterschleife wirkt somit das Drehmoment $\vec{\tau} = \vec{\mu} \times \vec{B}$, gilt für Leiterschleifen in beliebiger Form, die in einer Ebene liegen.

$$\vec{\tau} = \vec{\mu} \times \vec{B}$$

26-15

TORQUE ON A CURRENT LOOP



Vergleiche Gl. (26.15) $\vec{\tau} = \vec{\mu} \times \vec{B}$ mit Gl. (21.11) $\vec{\tau} = \vec{p} \times \vec{E}$ \Leftrightarrow
eine Leiterschleife im Magnetfeld verhält sich genauso wie ein elektrischer Dipol im elektrischen Feld

Beispiel 26.8: Auf eine Leiterschleife wirkendes Drehmoment

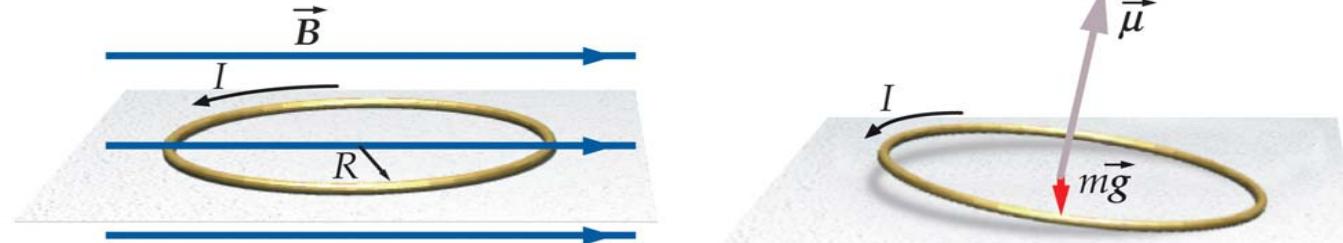
Eins Strom $I = 3 \text{ A}$ fließt durch eine Leiterschleife mit $N = 10$ kreisrunden Windungen mit Radius $r = 2 \text{ cm}$.Die Achse der Leiterschleife schließt einen Winkel $\theta = 30^\circ$ mit der Richtung des Magnetfelds $B = 0.8 \text{ T}$.Gesucht: Drehmoment τ

$$\Rightarrow \text{aus Gl. (26.15)} \quad \vec{\tau} = \vec{\mu} \times \vec{B} \quad \Rightarrow \quad |\vec{\tau}| = |\vec{\mu} \times \vec{B}| = |\vec{\mu}| |\vec{B}| \sin \theta = NIAB \sin \theta \quad \Rightarrow$$

$$|\vec{\tau}| = (10)(3 \text{ A})(0.02 \text{ m})^2 \pi (0.8 \text{ T}) \sin 30^\circ = 1.51 \times 10^{-2} \text{ N m}$$

Beispiel 26.9: Kippen einer Leiterschleife

mögliches Prüfungsbeispiel



Die potentielle Energie eines magnetischen Dipols in einem Magnetfeld

Bei der Drehung eines Dipols um einen Winkel $d\theta$ verrichtete Arbeit

$$dW = -|\vec{\tau}| d\theta = -|\vec{\mu}| |\vec{B}| \sin \theta d\theta = -dE_{\text{pot}} \Rightarrow \text{Integration } E_{\text{pot}} = -|\vec{\mu}| |\vec{B}| \cos \theta + E_{\text{pot},0} \Rightarrow$$

Nullpunkt der potentiellen Energie gewählt bei $\theta = 90^\circ \Rightarrow E_{\text{pot},0} = 0 \Rightarrow$

$$E_{\text{pot}} = -|\vec{\mu}| |\vec{B}| \cos \theta = -\vec{\mu} \cdot \vec{B}$$

Beispiel 26.10: Auf eine quadratische Leiterschleife wirkendes Drehmoment

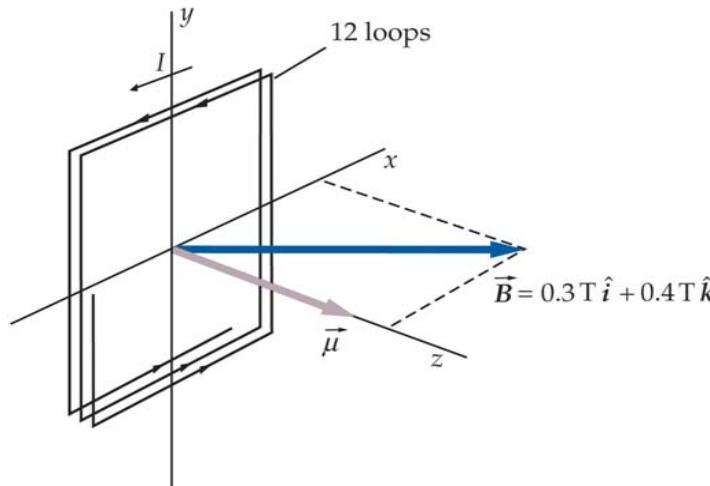
Ein Strom $I=3 \text{ A}$ fließt durch eine quadratische Leiterschleife mit $N=12$ Windungen, Kantenlänge $a=40 \text{ cm}$, die in der x-y-Ebene ($\vec{n} = \vec{e}_z$) liegt, und von einem Magnetfeld $\vec{B} = (0.3 \text{ T}) \vec{e}_x + (0.4 \text{ T}) \vec{e}_z$ umgeben ist.

Gesucht: a) magnetisches Moment $\vec{\mu}$, b) Drehmoment $\vec{\tau}$, c) potentielle Energie E_{pot}

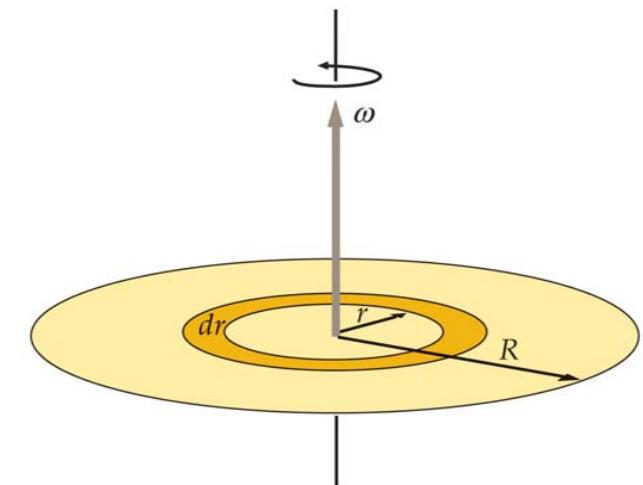
$$\text{Teil a) aus Gl. (26.14)} \quad \vec{\mu} = NIA\vec{n} = (12)(3 \text{ A})(0.4 \text{ m})^2 \vec{e}_z = (5.76 \text{ A m}^2) \vec{e}_z$$

$$\text{Teil b) aus Gl. (26.15)} \quad \vec{\tau} = \vec{\mu} \times \vec{B} = (5.76 \text{ A m}^2) \vec{e}_z \times [(0.3 \text{ T}) \vec{e}_x + (0.4 \text{ T}) \vec{e}_z] = (1.73 \text{ A m}^2 \text{ T}) (\vec{e}_z \times \vec{e}_x) = (1.73 \text{ N m}) \vec{e}_y$$

$$\text{Teil c) aus Gl. (26.16)} \quad E_{\text{pot}} = -\vec{\mu} \cdot \vec{B} = -(5.76 \text{ A m}^2) \vec{e}_z \cdot [(0.3 \text{ T}) \vec{e}_x + (0.4 \text{ T}) \vec{e}_z] = -2.30 \text{ J}$$



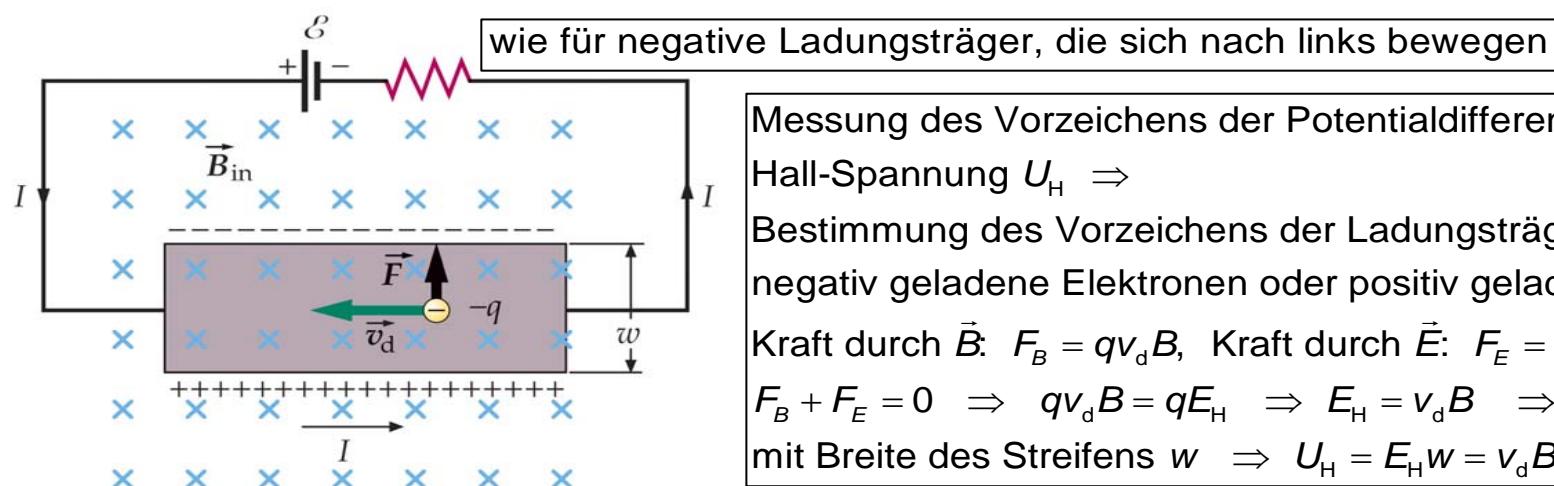
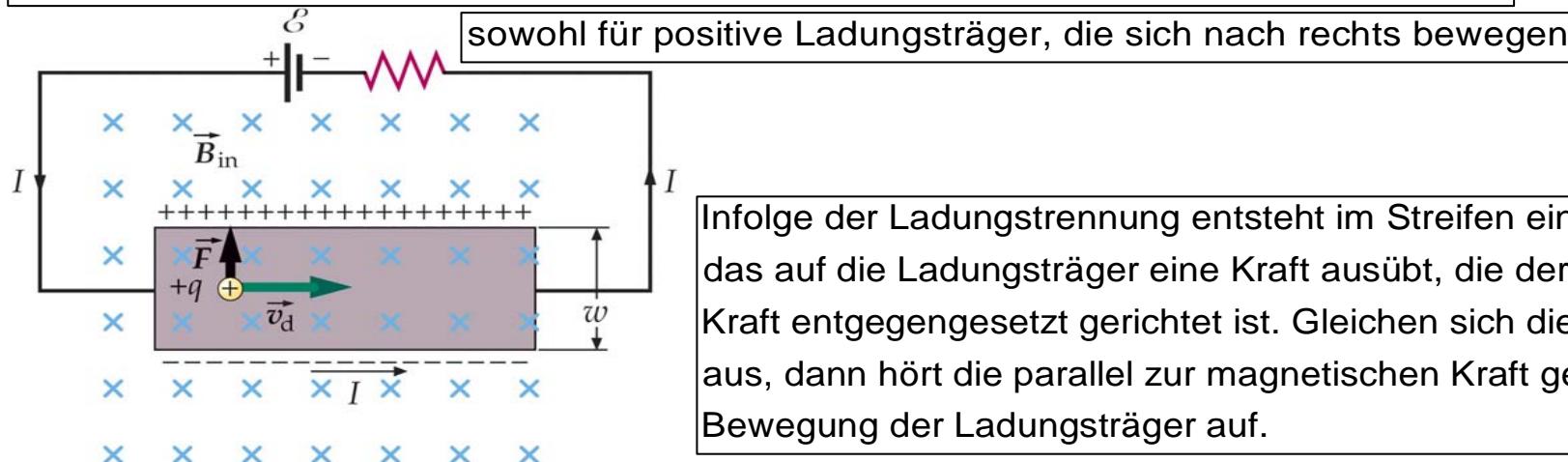
Beispiel 26.11:
Magnetisches Moment
einer rotierenden Scheibe
mögliches Prüfungsbeispiel



26.4 Der Hall-Effekt (The Hall effect)

In Magnetfeldern wirkt auf bewegte Ladungen eine Kraft senkrecht zu ihrer Bewegungsrichtung \Rightarrow in einem stromdurchflossenen Leiter werden die Ladungsträger auf eine Seite des Leiters geschoben \Rightarrow Ladungstrennung \Leftrightarrow Hall-Effekt \Leftrightarrow Anwendung: Bestimmung des Vorzeichens und der Anzahldichte der Ladungsträger in einem Leiter, Messung von Magnetfeldstärken.

Strom fließt von links nach rechts \Rightarrow das Magnetfeld übt eine nach oben gerichtete Kraft



Aus Messungen der Hall-Spannung eines Streifens mit gegebenen Abmessungen \Rightarrow
Anzahldichte $n = N/V$ der Ladungsträger im Leiter bestimmbar:

aus Gl. (25.3) $I = \frac{N}{V} q v_d A$ mit Streifen der Breite w und Dicke d , also $A = wd$, und mit Elektronen als

Ladungsträger, also $q = -e$, $\Rightarrow n = \frac{N}{V} = \frac{I}{qv_d A} = -\frac{I}{ev_d wd} \Rightarrow$ mit Gl. (26.17) $U_H = v_d B w$ bzw. $\frac{U_H}{B} = v_d w$

$$n = \frac{N}{V} = -\frac{I}{e \frac{U_H}{B} d} = -\frac{IB}{e U_H d}$$

da $n = \frac{N}{V} > 0 \Rightarrow$ für negative Ladungsträger $U_H < 0$, für positive Ladungsträger $U_H > 0$

Beispiel 26.12: Dichte der Ladungsträger in Silber

Silberplatte, $d = 1 \text{ mm}$, $w = 1.5 \text{ cm}$, durchflossen vom Strom $I = 2.5 \text{ A}$, umgeben vom Magnetfeld $B = 1.25 \text{ T}$
 \Rightarrow gemessen Hall-Spannung $U_H = -0.334 \mu\text{V}$.

Gesucht: a) Anzahldichte n der Ladungsträger in der Platte, b) Anzahldichte der Silberatome in der Platte, wobei
 $\rho = 10.5 \text{ g cm}^{-3}$, $M = 107.9 \text{ g mol}^{-1}$.

$$\text{Teil a) aus Gl. (26.19)} \quad n = -\frac{IB}{e U_H d} = -\frac{(1.25 \text{ T})(1.25 \text{ T})}{(1.6 \times 10^{-19} \text{ C})(-0.334 \mu\text{V})(0.001 \text{ m})} = 5.85 \times 10^{28} \text{ Elektronen m}^{-3}$$

$$\text{Teil b) aus } \rho = \frac{m}{V} \text{ und } \frac{m}{N} = \frac{M}{N_A} \Rightarrow \rho = \frac{N}{V} \frac{M}{N_A} = n \frac{M}{N_A} \Rightarrow$$

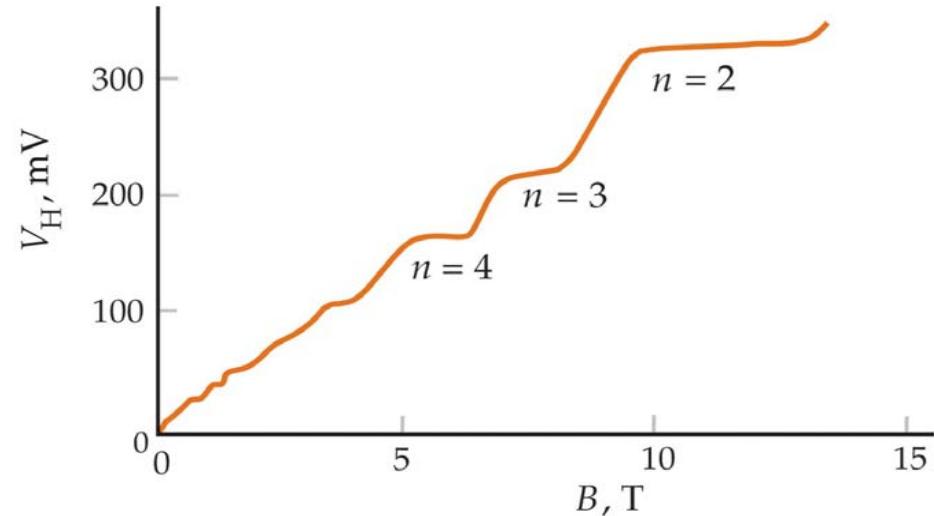
$$n = \rho \frac{N_A}{M} = (10.5 \text{ g cm}^{-3}) \frac{(6.02 \times 10^{23} \text{ Atome mol}^{-1})}{(107.9 \text{ g mol}^{-1})} = 5.86 \times 10^{22} \text{ Atome cm}^{-3} = 5.86 \times 10^{28} \text{ Atome m}^{-3}$$

Die Hall-Spannung bietet einen bequemen Weg zur Messung von Magnetfeldern:

$$\text{aus Gl. (26.19)} \quad n = -\frac{IB}{eU_H d} \quad \Rightarrow \quad U_H = -\frac{IB}{ned} \sim B \quad \text{bei vorgegebenem } I \quad (\text{Eichung notwendig})$$

Der Quanten-Hall-Effekt

Hall-Spannung U_H als Funktion des angelegten Magnetsfelds B , bei sehr kleinen Temperaturen und bei sehr starken Magnetfeldern $\Rightarrow U_H$ steigt nicht geradlinig, sondern in Stufen \Rightarrow
 U_H ist gequantelt (Von Klitzing, Nobelpreis 1985) \Rightarrow



\Rightarrow aus der Theorie des ganzzahligen Quanten-Hall-Effekts:

$$\text{Hall-Widerstand } R_H = \frac{U_H}{I} = \frac{R_K}{n} \quad \text{mit } n = 1, 2, 3, \dots \quad \text{wobei } R_K = \frac{h}{e^2} \quad \text{Klitzing-Konstante.}$$

Ausgehend vom Quanten-Hall-Effekt \Rightarrow Standard für den Widerstand festgelegt \Rightarrow
seit 1990 ist das Ohm so definiert, daß $R_{K(90)} = 25812.807 \Omega$ (exakt) hat.

26. Das magnetische Feld

- 26.1 Einführung
- 26.2 Das Ampère'sche Gesetz für das magnetische Feld
- 26.3 Der magnetische Fluß
- 26.4 Magnetisierung der Materie
- 26.5 Der Magnetisierungsvektor
- 26.6 Das magnetisierende Feld
- 26.7 Magnetische Suszeptibilität und Permeabilität
- 26.8 Energie eines magnetischen Feldes
- 26.9 Zusammenfassung der Gesetze für statische Felder

22. Magnetische Wechselwirkung

- 22.1 Einführung
- 22.2 Magnetische Kraft auf eine bewegten Ladung
- 22.3 Bewegung eines geladenen Teilchens in einem gleichförmigen Magnetfeld
- 22.4 Bewegung eines geladenen Teilchens in einem ungleichförmigen Magnetfeld
- 22.5 Beispiele der Bewegung von geladenen Teilchen in einem Magnetfeld
- 22.5 Magnetisches Feld einer bewegten Ladung
- 22.7 Magnetische Dipole