

# LICHT

## Tipler-Mosca 33. Interferenz und Beugung (Interference and diffraction)

Physik

33.1 Phasendifferenz und Kohärenz (Phase difference and coherence)

33.2 Interferenz an dünnen Schichten (Interference in thin films)

33.3 Interferenzmuster beim Doppelspalt (Two-slit interference pattern)

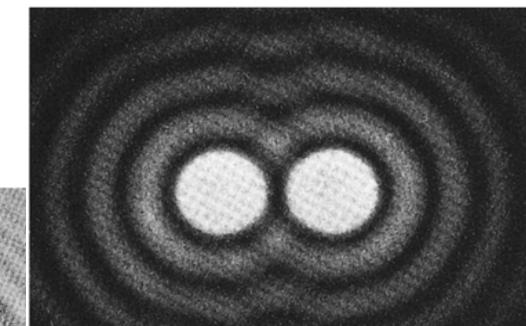
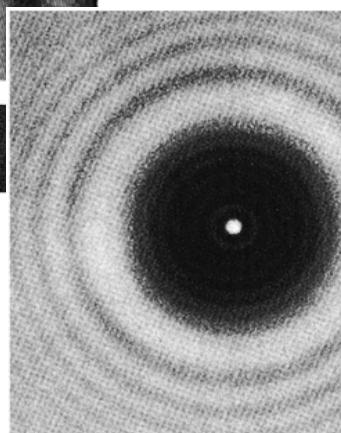
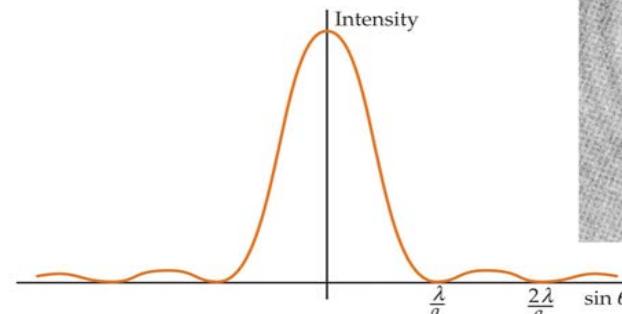
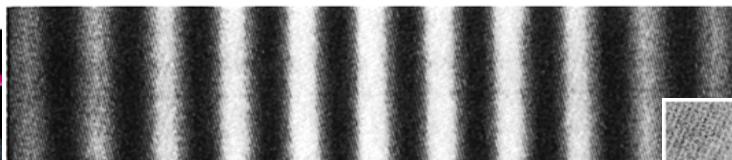
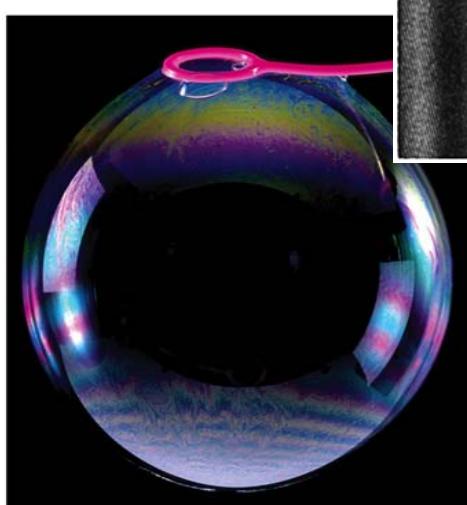
33.4 Beugungsmuster beim Einzelspalt (Diffraction pattern of a single slit)

33.5 Vektoraddition harmonischer Wellen (Using phasors to add harmonic waves)

33.6 Fraunhofer'sche und Fresnel'sche Beugung (Fraunhofer and Fresnel diffraction)

33.7 Beugung und Auflösung (Diffraction and resolution)

33.8 Beugungsgitter (Diffraction gratings)



Interferenz: Überlagerung von zwei oder mehr kohärenten Wellen, die an einem Raumpunkt zusammentreffen.

Beugung: Abweichung der Wellenausbreitung von der geometrischen Strahlrichtung an einer Öffnung oder einem Hindernis im Lichtweg



### 33.1 Phasendifferenz und Kohärenz (Phase difference and coherence)

Überlagerung von zwei harmonischen Wellen mit gleicher Frequenz, Wellenlänge und Polarisation, aber unterschiedlichen Phasen  $\Rightarrow$

bei Phasendifferenz  $\delta = N 2\pi$  wobei  $N = 0, 1, 2, \dots$  d.h. ganzzahliges Vielfaches von  $2\pi$   $\Rightarrow$  Wellen sind in Phase  $\Rightarrow$  konstruktive Interferenz;

bei Phasendifferenz  $\delta = U \pi$  wobei  $U = 1, 3, 5, \dots$  d.h. ungeradzahliges Vielfaches von  $\pi$   $\Rightarrow$  Wellen sind in Gegenphase  $\Rightarrow$  destruktive Interferenz,

siehe auch Teil 16.1

Wegunterschied oder Gangunterschied  $\Delta r \Leftrightarrow$  aus Länge der Wege, die die Einzelwellen zurücklegen, ergibt sich eine Phasendifferenz  $\delta$

$$\delta = \frac{\Delta r}{\lambda} 2\pi = \frac{\Delta r}{\lambda} 360^\circ \quad 33-1$$

### PHASE DIFFERENCE DUE TO A PATH DIFFERENCE

Beispiel 33.1: Phasendifferenz

Licht der Wellenlänge  $\lambda = 800 \text{ nm}$ , Phasenunterschied  $\delta = \pi = 180^\circ$ , gesucht: Gangunterschied  $\Rightarrow$

$$\text{aus Gl. (33.1)} \quad \delta = \frac{\Delta r}{\lambda} 2\pi \Rightarrow \Delta r = \lambda \frac{\delta}{2\pi} = (800 \text{ nm}) \frac{\pi}{2\pi} = 400 \text{ nm},$$

$$\text{bei } \lambda = 700 \text{ nm} \text{ ergibt sich } \delta = \frac{\Delta r}{\lambda} 2\pi = \frac{400 \text{ nm}}{700 \text{ nm}} 2\pi = 1.14\pi = 3.58 \text{ rad} = 206^\circ$$

Ein Phasenunterschied von  $\pi=180^\circ$  kann auch durch Reflexion an einer Grenzfläche auftreten (äquivalent zu Phasenprung am festen Ende)

If light traveling in one medium strikes the surface of a medium in which light travels more slowly, there is a  $180^\circ$  phase change in the reflected light.

#### PHASE DIFFERENCE DUE TO REFLECTION

Interferenz zweier oder mehrerer Wellen lässt sich nur beobachten, wenn diese kohärent sind  $\Leftrightarrow$  ihre Phasendifferenz ist zeitlich konstant.

Stammen die Wellen aus verschiedenen Quellen  $\Rightarrow$  Interferenz nur dann beobachtbar, wenn Quellen kohärent.

Kohärenz wird oft dadurch erzielt, daß man ein Lichtstrahl einer einzigen Quelle in zwei oder mehreren Strahlen aufteilt, die man wieder zusammenführt und dabei interferieren lässt.

Aufteilung durch: Reflexion an Grenzflächen, Beugung an engen Öffnungen bzw. Spalten.

Heutzutage sind Laser die wichtigsten Quellen kohärenter Lichtwellen.

Licht einer völlig monochromatischen Quelle  $\Leftrightarrow$  unendlich lange Sinuswelle;

Licht aus herkömmlicher monochromatischer Quelle  $\Leftrightarrow$  Wellenpakete, in etwa gleicher Länge = Kohärenzlänge; die Zeitspanne, in der das Wellenpaket einen bestimmten Raumzeitpunkt passiert, heißt Kohärenzzeit.

#### 33.2 Interferenz an dünnen Schichten (Interference in thin films)

Lichtstrahl, der auf eine dünne Wasserschicht mit Dicke  $t$  trifft.

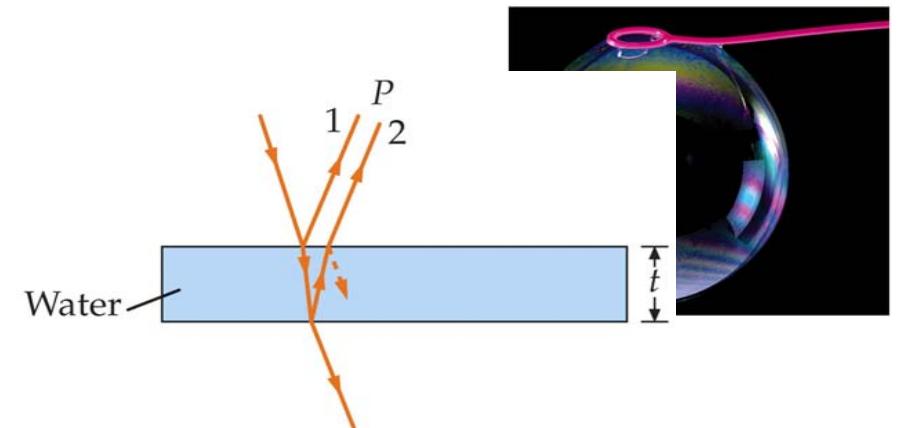
Lichtstrahl 1 und 2 sind kohärent, Lichtstrahl 1 erfährt

Phasensprung von  $\pi$ , Lichtstrahl 2 erfährt keinen Phasensprung

$\Rightarrow$  Phasendifferenz zwischen 1 und 2 bei senkrechttem Einfall

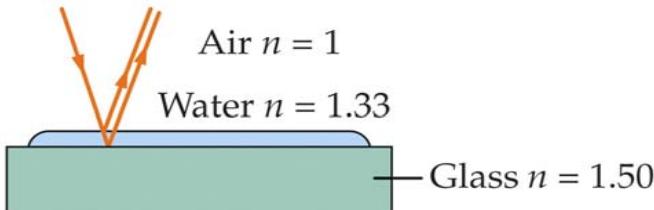
$$\delta = \frac{2t}{\lambda/n} 2\pi + \pi = \text{Phasenunterschied durch geometrischen}$$

Gangunterschied + Phasensprung.



destruktive Interferenz wenn  $\frac{2t}{\lambda/n} = N \Leftrightarrow$  Gangunterschied = ganzzahliges Vielfaches von  $\lambda/n$ ;

konstruktive Interferenz wenn  $\frac{2t}{\lambda/n} = \frac{U}{2} \Leftrightarrow$  Gangunterschied = ungeradzahlig Vielfaches von  $\frac{\lambda/n}{2}$

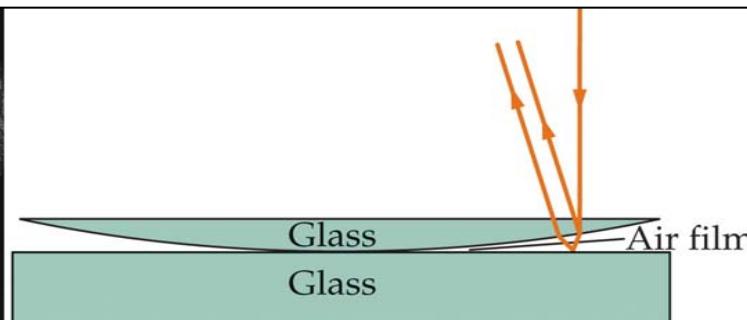
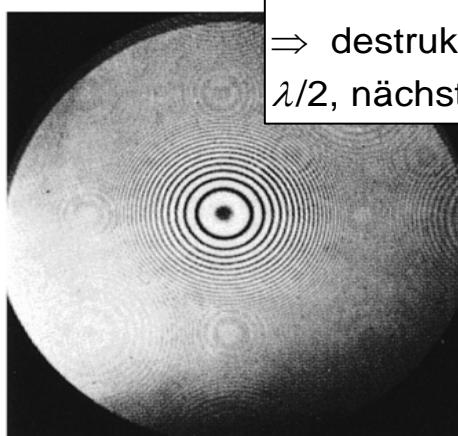


Lichtstrahl, der auf eine dünne Wasserschicht trifft, die sich auf einer Glasfläche befindet  $\Rightarrow$  bei beiden Reflexionen erfolgt ein Phasensprung von  $\pi=180^\circ \Rightarrow$   
 $\delta = \frac{2t}{\lambda/n} 2\pi =$  Phasenunterschied durch geometrischen Gangunterschied

Hat eine dünne Schicht eine veränderliche Dicke und wird sie unter monochromatischem Licht betrachtet  $\Rightarrow$  dann erscheinen Interferenzstreifen, Abstand zwischen benachbarten hellen und dunklen Streifen  $\triangleq$

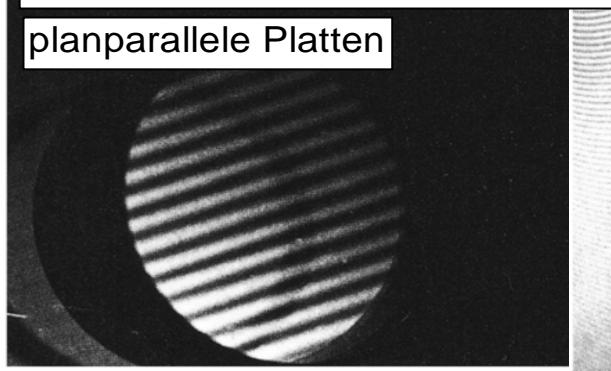
$$\text{Gangunterschied} = \frac{\lambda/n}{2}$$

Newton'sche Ringe: Interferenzmuster bei einer Luftsicht unter einer plankonvexen Glaslinse, die auf einer ebenen Glasplatte liegt. Ganz nahe beim Auflagepunkt ist Gangunterschied null, Phasenunterschied  $\delta$  gegeben durch Phasensprung des an der Glasplatte reflektierten Strahls  $\Rightarrow$  destruktive Interferenz  $\Rightarrow$  mittlere Zone dunkel; erster heller Ring bei Gangunterschied von  $\lambda/2$ , nächster dunkler Ring bei Gangunterschied von  $\lambda$ , usw.

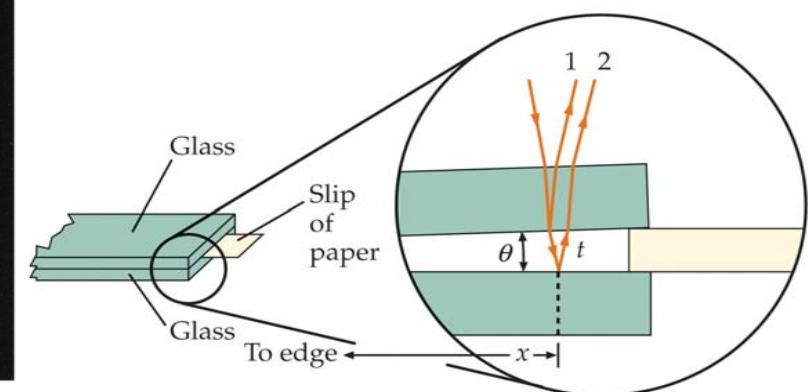
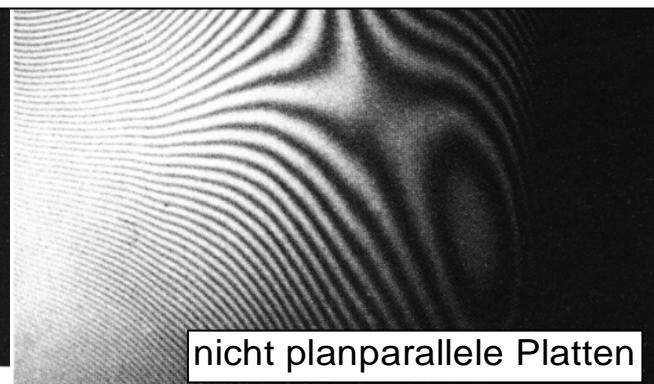


### Interferenzstreifen bei einem keilförmigen Luftspalt zwischen zwei Glasplatten

planparallele Platten



nicht planparallele Platten



Beispiel 33.2: Eine keilförmige Luftsicht

Licht mit  $\lambda=500 \text{ nm}$  auf dünne keilförmige Luftsicht zwischen zwei Glasplatten eingestrahlt, Winkel  $\theta$  zwischen den Platten:  $\theta = 0.02^\circ = 3 \times 10^{-4} \text{ rad}$ ; gesucht: Anzahl der Interferenzstreifen pro cm  $\Rightarrow$

durch Phasensprung erscheint die Auflagekante dunkel  $\Rightarrow N$ -ter dunkler Streifen wenn  $\frac{2t}{\lambda} = N \Rightarrow$

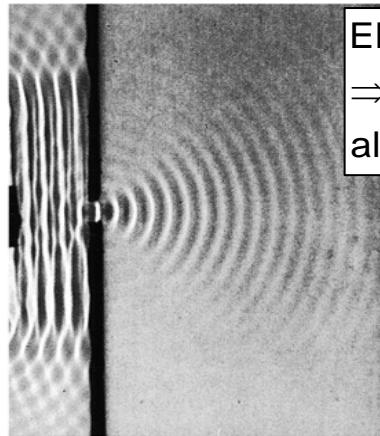
$$\text{für kleine Winkel } \theta = \frac{t}{x} \Rightarrow t = x\theta \Rightarrow N = \frac{2x\theta}{\lambda} \Rightarrow \frac{N}{x} = \frac{2\theta}{\lambda} = \frac{2(3 \times 10^{-4} \text{ rad})}{500 \times 10^{-9} \text{ m}} = 1200 \text{ m}^{-1} = 12 \text{ cm}^{-1}$$

Interferenz von Lichtwellen an dünnen Schichten ausgenutzt zur Entspiegelung von Linsen von optischen Instrumenten. Auf die Linse wird eine dünne Schicht eines Materials mit Brechzahl ( $n \approx 1.38$ ) zwischen Glas ( $n \approx 1.5$ ) und Luft ( $n \approx 1.0$ ) aufgebracht  $\Rightarrow$  beide an den Grenzflächen reflektierte Strahlen erfahren

Phasensprung  $\Leftrightarrow$  keine Phasendifferenz durch Reflexion  $\Rightarrow$  Schichtdicke  $t$  so gewählt, daß  $\delta = \frac{2t}{\lambda/n} 2\pi = \pi$

$\Rightarrow t = \frac{1}{4}(\lambda/n)$   $\Rightarrow$  Reflexion an der beschichteten Oberfläche minimiert durch destruktive Interferenz  $\Leftrightarrow$  Transmission maximiert.

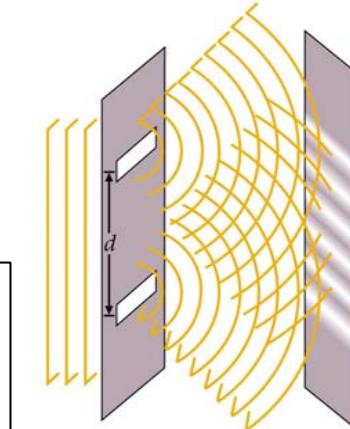
## 33.3 Interferenzmuster beim Doppelspalt (Two-slit interference pattern)



Ebene Wasserwelle tritt auf Hindernis mit einer kleinen Öffnung  
 ⇒ dahinter entstehen konzentrische Wellenfronten,  
 als befände sich in der Öffnung eine Punktquelle.

Bei Licht aus zwei oder mehr Quellen kann ein Interferenzmuster nur dann beobachtet werden, wenn die Quellen kohärent sind.

Zwei kohärente Lichtquellen können realisiert werden, wenn mit einer einzigen Lichtquelle zwei sehr enge parallele Spalte beleuchtet werden.



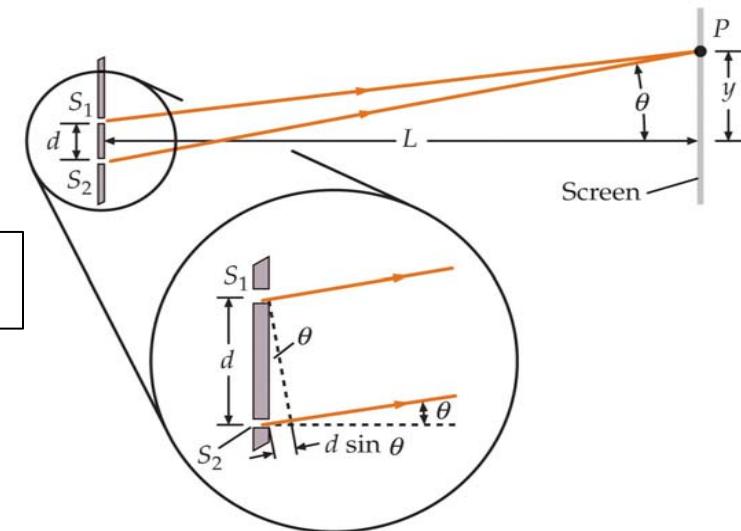
Wenn Abstand  $L$  zwischen Schirm und Spalt groß gegen Spaltabstand  $d$  ⇒ dann treffen die Strahlen nahezu parallel auf den Schirm.

Beim Winkel  $\theta$  beträgt der Gangunterschied zwischen ihnen  $\Delta r = d \sin \theta$  ⇒ mit  $m$  Ordnung der Interferenzmaxima ⇒

$$\text{Phasendifferenz } \delta \text{ an einem Punkt } P \text{ auf dem Schirm: } \delta = \frac{d \sin \theta}{\lambda} 2\pi$$

$$d \sin \theta_m = m\lambda, \quad m = 0, 1, 2, \dots \quad 33-2$$

## TWO-SLIT INTERFERENCE MAXIMA



$$d \sin \theta_m = (m - \frac{1}{2})\lambda, \quad m = 1, 2, 3, \dots \quad 33-3$$

### TWO-SLIT INTERFERENCE MINIMA

Abstand  $y_m$  des m-ten hellen Streifens von der Achse:  $\tan \theta_m = \frac{y_m}{L}$  wobei  $L$  Abstand zwischen Spalten und Schirm  $\Rightarrow$  für kleine Winkel ist  $\tan \theta_m \approx \sin \theta_m \Rightarrow$  mit Gl. (33.2)  $d \sin \theta_m = m\lambda$   
 $\Rightarrow d \frac{y_m}{L} = m\lambda \Rightarrow y_m = m\lambda \frac{L}{d} \Leftrightarrow$  äquidistanten Streifen bei kleinen Winkeln

$$y_m = m \frac{\lambda L}{d}$$

33-5

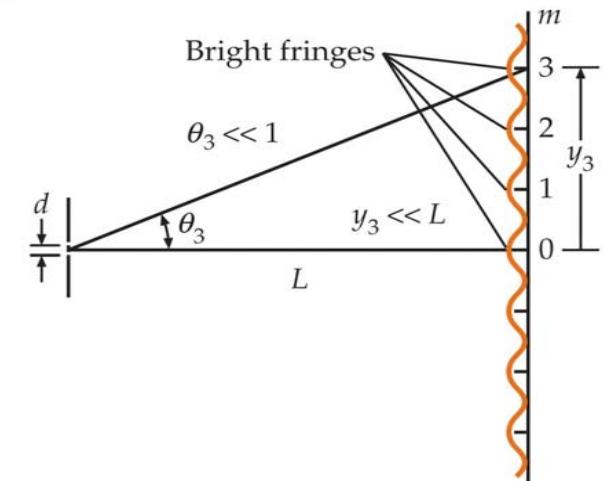
### DISTANCE ON SCREEN TO THE MTH BRIGHT FRINGE

Beispiel 33.3: Abstand der Interferenzstreifen und Spaltabstand beim Doppelslitz

Zwei enge Spalte mit Abstand  $d = 1.5 \text{ mm}$  beleuchtet mit Licht bei  $\lambda = 589 \text{ nm}$ .

Gesucht: Abstand der hellen Streifen auf einem Schirm in Entfernung  $L = 3 \text{ m} \Rightarrow$

$$\begin{aligned} \text{aus Gl. (33.5)} \quad y_m &= m\lambda \frac{L}{d} \sim m \Rightarrow \frac{y_m}{m} = \lambda \frac{L}{d} = (589 \text{ nm}) \frac{3 \text{ m}}{1.5 \text{ mm}} = \\ &= (589 \times 10^{-9} \text{ m}) 2000 = 1.18 \text{ mm} \end{aligned}$$

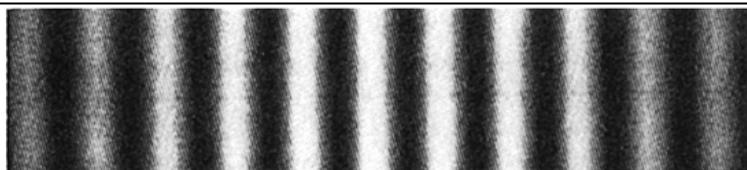


**Berechnung der Intensität**

Berechnung der Intensität im Punkt P  $\Rightarrow$  Annahme: Winkel  $\theta$  zwischen Ausbreitungsrichtung der Welle und Achse klein  $\Leftrightarrow$  Felder  $E_1$  aus Spalt 1 und  $E_2$  aus Spalt 2 parallel, schwingen mit gleicher Frequenz, haben gleiche Amplitude  $\Rightarrow$  mit  $E_1 = A_0 \sin \alpha$  und  $E_2 = A_0 \sin(\alpha + \delta)$  wobei  $\alpha = kx - \omega t$   $\Rightarrow$

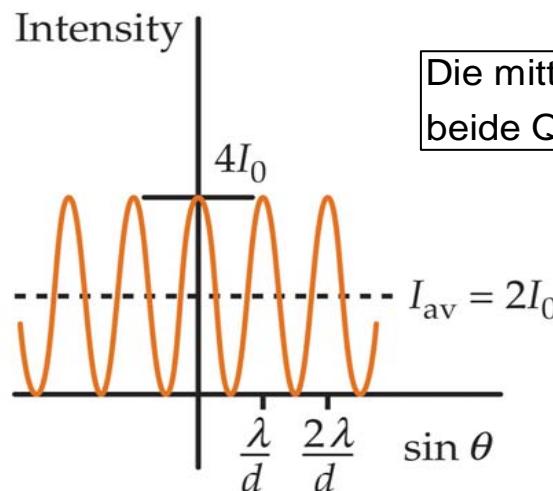
$$E = E_1 + E_2 = A_0 \sin \alpha + A_0 \sin(\alpha + \delta) = 2A_0 \cos \frac{1}{2} \delta \sin \left( \alpha + \frac{1}{2} \delta \right) \text{ wobei } \sin \phi_1 + \sin \phi_2 = 2 \cos \left[ \frac{1}{2} (\phi_1 - \phi_2) \right] \sin \left[ \frac{1}{2} (\phi_1 + \phi_2) \right]$$

$\Rightarrow$  Amplitude der resultierenden Welle:  $2A_0 \cos \frac{1}{2} \delta$   $\Rightarrow$  Intensität an einem Punkt P in Abhängigkeit von der Phasendifferenz  $\delta$ :  $I = 4I_0 \cos^2 \frac{1}{2} \delta$

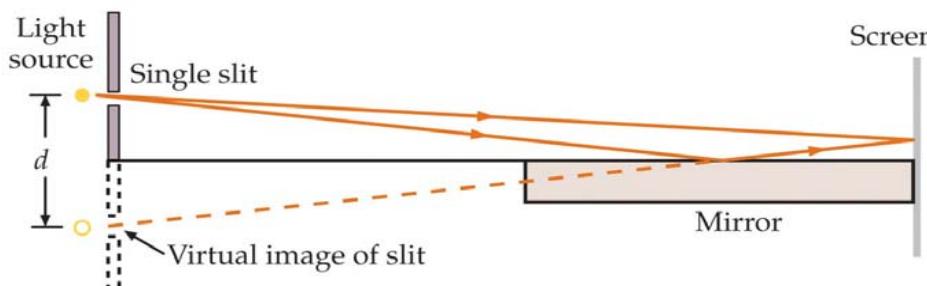


$$I = 4I_0 \cos^2 \frac{1}{2} \delta \quad 33-8$$

INTENSITY IN TERMS OF PHASE DIFFERENCE



Die mittlere Intensität entspricht der resultierenden Intensität, wenn beide Quellen inkohärent wären.

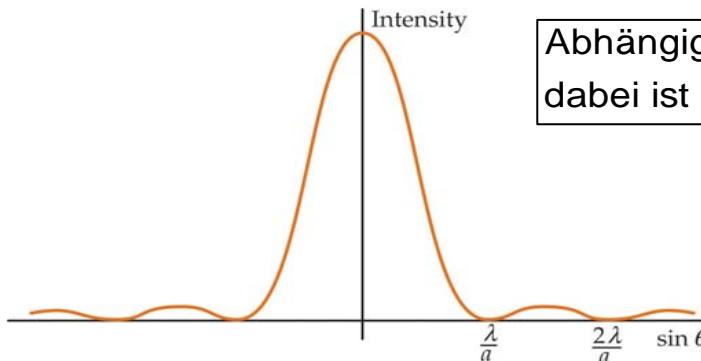


Lloyd'scher Spiegel zur Erzeugung eines Doppelspalt-Interferenzmusters.  
Beide Lichtquellen (der Spalt und sein virtuelles Bild) sind kohärent

## 33.4 Beugungsmuster beim Einzelspalt (Diffraction pattern of a single slit)



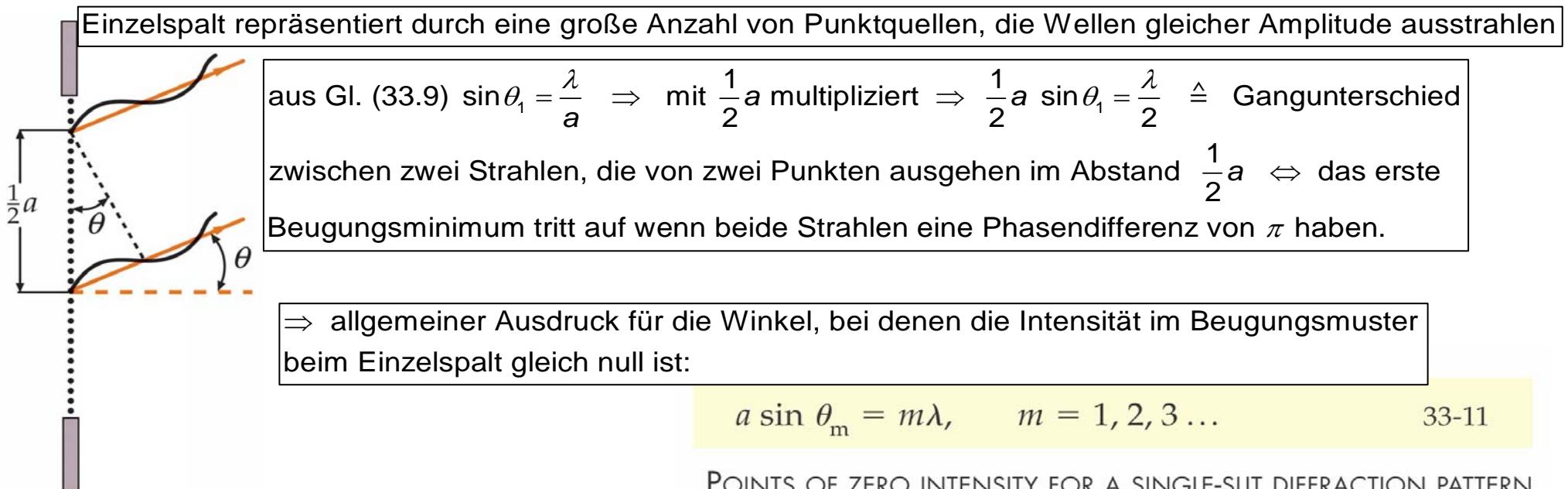
Beugungsmuster bei einem Einzelspalt auf einem weit entfernten Schirm



Abhängigkeit der Intensität  $I$  von  $\sin \theta$  für das Beugungsmuster des Einzelspaltes, dabei ist  $\theta$  der Winkel am Schirm zwischen der Strahlrichtung und dem Einfallslot.

Der größte Teil der Lichtintensität ist im (breiten) zentralen Beugungsmaximum konzentriert, beiderseits treten schwache Nebenmaxima. Erste Nullstelle der Intensität für ein Einzelspalt mit Spaltbreite  $a$  gegeben durch  $\sin \theta_1 = \frac{\lambda}{a} \sim \frac{1}{a}$   $\Leftrightarrow$

für  $a < \lambda$  hat die Intensitätsverteilung keine Nullstellen  $\Rightarrow$  für  $a < \lambda$  strahlt der Spalt in allen Richtungen gleich stark



POINTS OF ZERO INTENSITY FOR A SINGLE-SLIT DIFFRACTION PATTERN

Für den Abstand  $y_1$  des zentralen Beugungsmaximum vom ersten Beugungsmaximum gilt  $\tan \theta_1 = \frac{y_1}{L}$

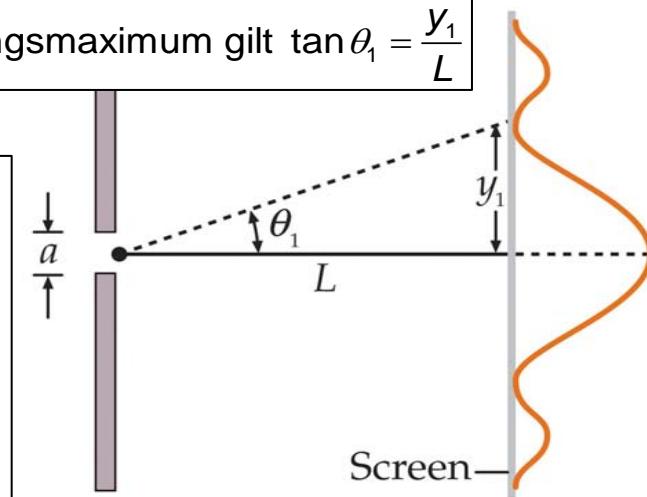
Beispiel 33.4: Die Breite des zentralen Beugungsmaximum beim Einzelspalt

Laserstrahl mit Wellenlänge  $\lambda = 700 \text{ nm}$  gerichtet auf Spalt mit Breite  $a = 0.2 \text{ mm}$ . Beugungsmuster auf Schirm in Entfernung  $L = 6 \text{ m}$  betrachtet.

Gesucht: Breite  $2y_1$  des zentralen Beugungsmaximum auf dem Schirm

$$\Rightarrow \text{aus } \tan \theta_1 = \frac{y_1}{L} \text{ mit Gl. (33.9) bzw. (33.11) } \sin \theta_1 = \frac{\lambda}{a} \Rightarrow$$

$$2y_1 = 2L \tan \theta_1 = 2L \tan \left( \arcsin \frac{\lambda}{a} \right) = 2(6 \text{ m}) \tan \left( \arcsin \frac{700 \text{ nm}}{0.2 \text{ mm}} \right) = 4.20 \text{ cm}$$



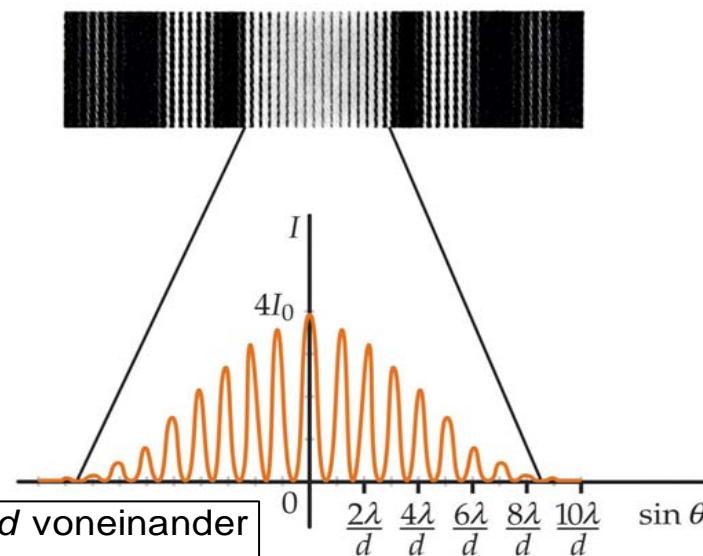
### Interferenz und Beugungsmuster bei zwei Spalten

Liegen zwei oder mehrere Spalten vor, dann ergibt sich als Beugungsmuster auf einem weit entfernten Schirm eine Kombination von Einzelspalt-Beugungsmuster und Mehrfachspalt-Interferenzmuster.

Das zentrale Beugungsmaximum enthält 19 Interferenzmaxima  $\Rightarrow$   
das 10. Interferenzmaximum auf jeder Seite fällt gerade mit dem  
ersten Beugungsminimum, da für den Winkel  $\theta_{10}$  gilt:

$$\sin \theta_{10} = \frac{10\lambda}{d} = \frac{\lambda}{a}, \text{ siehe Gl. (33.2) und Gl. (33.11) allgemein}$$

bei  $m = d/a$  fällt das  $m$ -te Interferenzmaximum auf das erste  
Beugungsminimum  $\Rightarrow$  im zentralen Maximum  $N$  Streifen  
beobachtbar, wobei  $N = 2(m-1) + 1 = 2m - 1$



Interferenz- und Beugungsmuster bei zwei Spalten, deren Abstand  $d$  voneinander  
zehnmal so groß ist wie die Breite  $a$  jedes einzelnen Spalts:  $d = 10a$ .

## Beispiel 33.5: Interferenz und Beugung

mögliches Prüfungsbeispiel

## 33.5 Vektoraddition harmonischer Wellen (Using phasors to add harmonic waves)

Betrachtung der Wellenfunktionen zweier Wellen an irgendeinem Punkt:

$E_1 = A_1 \sin \alpha$  und  $E_2 = A_2 \sin(\alpha + \delta)$  wobei  $\alpha = kx - \omega t \Rightarrow$  die Summe

$E_1 + E_2 = A_1 \sin \alpha + A_2 \sin(\alpha + \delta)$  kann in einem Zeigerdiagramm durch zweidimensionale Vektoren dargestellt werden  $\Rightarrow$  die Summe der y-Komponenten ist gleich der y-Komponente des resultierenden Zeigers  $A \sin(\alpha + \delta') = A_1 \sin \alpha + A_2 \sin(\alpha + \delta)$ .

## Beispiel 33.6: Wellenüberlagerung mit Hilfe von Zeigern

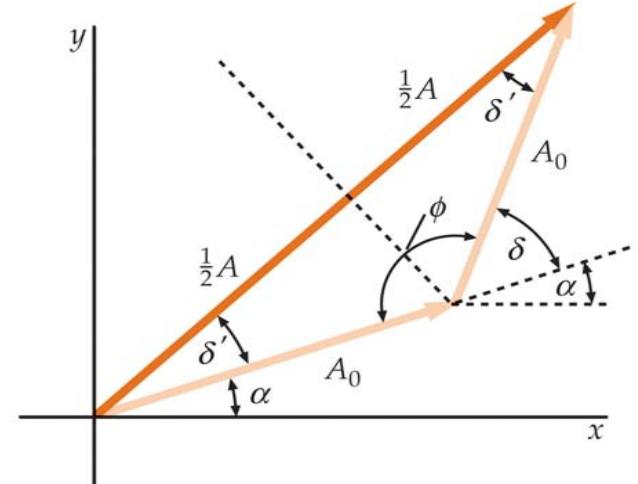
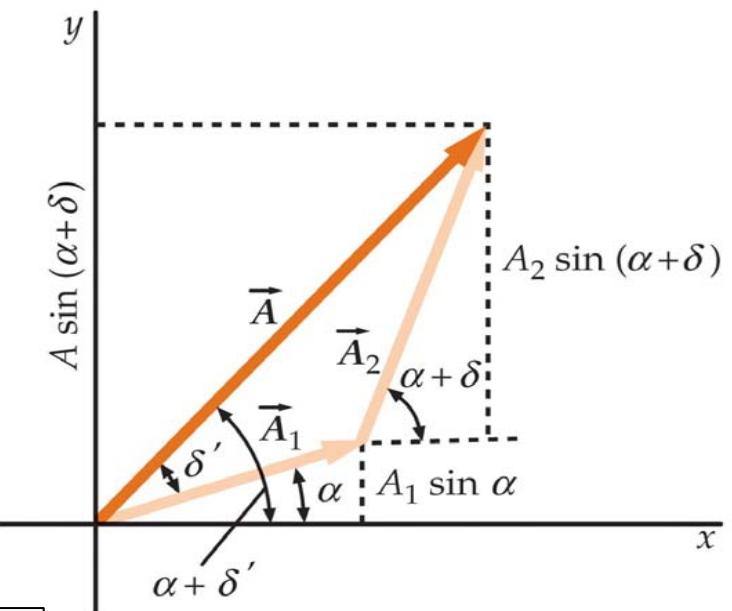
## Verwendung des Zeigersdiagramm zur Herleitung von Gl. (33.6)

$$E = E_1 + E_2 = A_0 \sin \alpha + A_0 \sin(\alpha + \delta) = 2A_0 \cos \frac{1}{2}\delta \sin\left(\alpha + \frac{1}{2}\delta\right) \Rightarrow$$

$$\text{aus } \delta' + \delta' + \phi = 180^\circ \text{ und } \delta + \phi = 180^\circ \Rightarrow 2\delta' + \phi = \delta + \phi \Rightarrow \delta' = \frac{1}{2}\delta$$

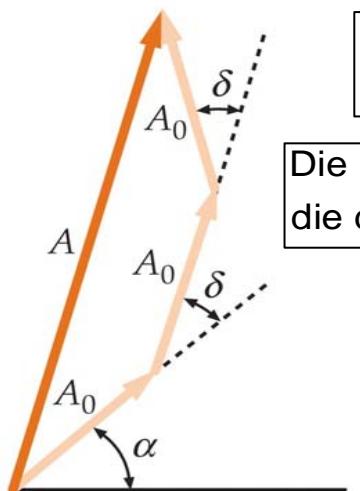
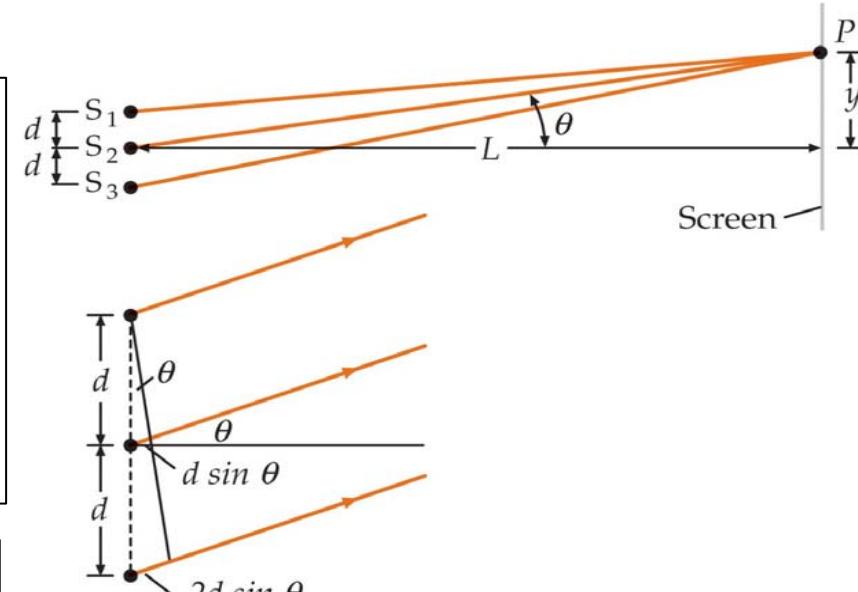
$$\Rightarrow \text{aus } \cos \delta' = \frac{A/2}{A_0} \Rightarrow A = 2A_0 \cos \delta' = 2A_0 \cos \frac{1}{2}\delta \Rightarrow$$

$$\text{resultierende Wellenfunktion } y_{\text{res}} = A \sin(\alpha + \delta') = 2A_0 \cos \frac{1}{2}\delta \sin\left(\alpha + \frac{1}{2}\delta\right)$$



## Interferenzmuster bei drei oder mehr äquidistanten Quellen

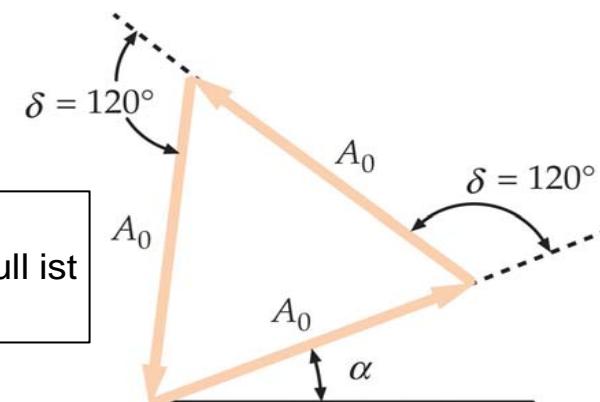
Zur Berechnung des Intensitätsmuster bei drei äquidistanten und kohärenten Quellen, die in Phase schwingen  $\Rightarrow$   
 Gangunterschied zwischen erster und zweiter Quelle:  $d \sin \theta$ ,  
 Gangunterschied zwischen erster und dritter Quelle:  $2d \sin \theta$ ,  
 die im Punkt P eintreffende Welle ist die Summe dreier Wellen  
 $E_1 = A_0 \sin \alpha, E_2 = A_0 \sin(\alpha + \delta), E_3 = A_0 \sin(\alpha + 2\delta)$  wobei  
 $\alpha = kx - \omega t$  und  $\delta = \frac{d \sin \theta}{\lambda} 2\pi \approx \frac{d y}{\lambda L} 2\pi$ .



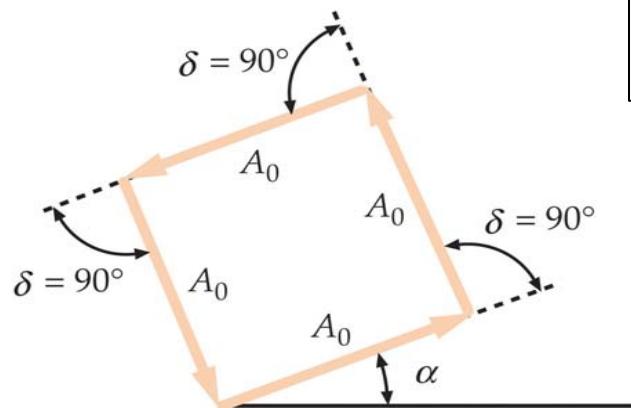
Zeigerdiagramm für die Bestimmung der resultierenden Amplitude A

Die resultierende Amplitude A ist deutlich kleiner als die dreifache Amplitude  $A_0$  jeder einzelnen Quelle.

Wenn der Phasenwinkel  $\delta$  zunimmt, sinkt die resultierende Amplitude, bis sie bei  $\delta = 120^\circ$  null ist  
 $\Rightarrow$  erstes Interferenzminimum.

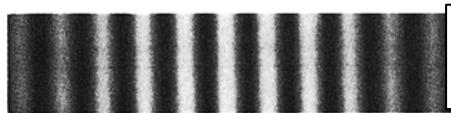


Steigt  $\delta$  auf  $180^\circ$   $\Rightarrow$  die resultierende Amplitude A steigt und erreicht bei  $\delta = 180^\circ$  ein Nebenmaximum  $\Leftrightarrow$  Amplitude so groß wie die einer einzelnen Quelle, weil die Wellen aus Quelle 1 und 2 sich auslöschen  $\Rightarrow$   
 Intensität ist  $\frac{1}{9}$  der Intensität bei  $\theta=0^\circ$   $\Rightarrow$  nächstes Minimum bei  $\delta = 240^\circ$   $\Rightarrow$  nächstes Maximum bei  $360^\circ$   
 $\Rightarrow$  Hauptmaxima bei  $d \sin \theta_m = m\lambda$  wobei  $m = 0, 1, 2, \dots$



Zeigerdiagramm für das erste Minimum bei vier äquidistanten Quellen, die in Phase schwingen: Amplitude ist null bei  $\delta = 90^\circ$ .

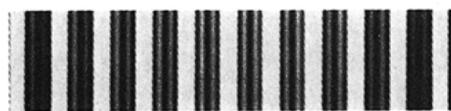
Die Maxima sind intensiver und schärfer als bei zwei oder drei Quellen, bei  $\theta = \delta = 0^\circ$  ist die Intensität 16-mal so groß wie die aus einer einzelnen Quelle, erstes Nebenmaximum bei  $\delta \approx 120^\circ$  weil nur die Welle aus der vierten Quelle vorliegt (die Wellen der anderen Quellen löschen sich aus)  $\Rightarrow$  Minimum bei  $\delta = 180^\circ \Rightarrow$  nächsten Nebenmaximum bei  $\delta \approx 240^\circ \Rightarrow$  nächsten Minimum bei  $\delta = 270^\circ \Rightarrow$  nächstes Hauptmaximum bei  $\delta = 360^\circ$



Two sources



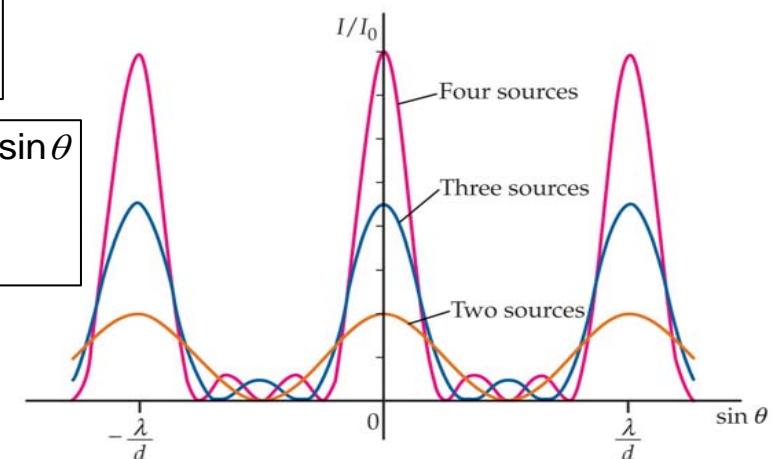
Three sources



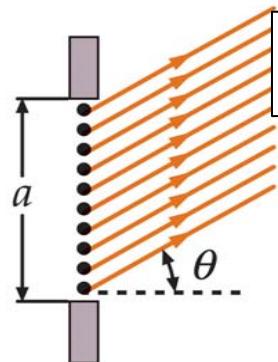
Four sources

Intensitätsmuster bei zwei, drei, und vier Wellen aus äquidistanten kohärenten Quellen

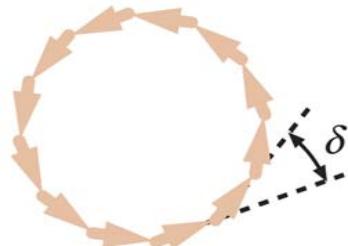
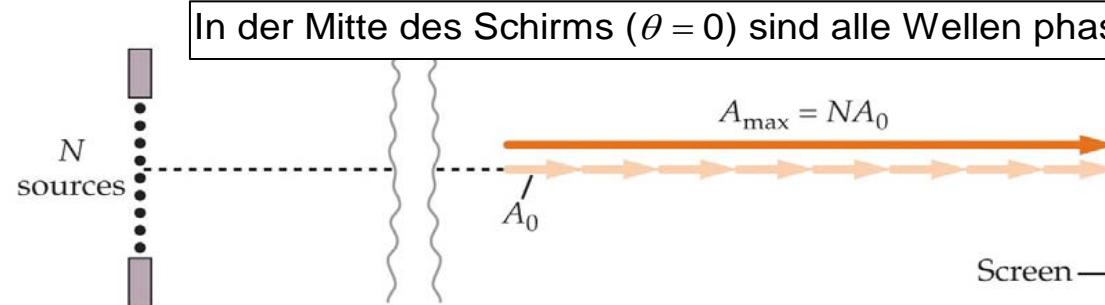
Relative Intensität  $I/I_0$  in Abhängigkeit von  $\sin \theta$  bei der Interferenz von zwei, drei, und vier äquidistanten kohärenten Wellen



Bei  $N$  äquidistanten kohärenten Quellen  $\Rightarrow$  Intensität der Hauptmaxima  $N^2$ -mal so groß wie Einzelquelle, erstes Minimum bei  $\delta = 360^\circ/N$ , zwischen jedem Paar von Hauptmaxima erscheinen  $N-2$  Nebenmaxima

**Berechnung des Beugungsmuster beim Einzelspalt**

Spalt mit Breite  $a$  wird als Reihe von  $N$  Punktquellen angesehen, die in Phase schwingen und den Abstand  $d = a/N$  haben. Gangunterschied der Wellen aus benachbarten Quellen:  $d \sin \theta$



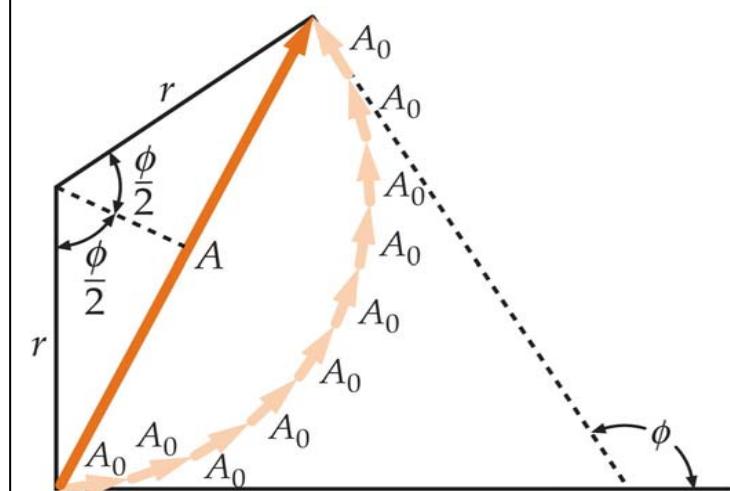
In der Mitte des Schirms ( $\theta = 0$ ) sind alle Wellen phasengleich  $\Rightarrow A_{\max} = N A_0$

$\delta = \frac{360^\circ}{N}$  Zeigerdiagramm zur Berechnung des ersten Minimums  $\Leftrightarrow a \sin \theta_1 = \lambda$

Zeigerdiagramm zur Berechnung der resultierenden Amplitude in Abhängigkeit von der Phasendifferenz  $\phi$  zwischen der ersten Welle aus der obersten Quelle und der letzten Welle aus der untersten Quelle im Spalt  $\Rightarrow$  resultierende Amplitude entspricht der Länge der Sehne über den Kreisbogen mit der Länge  $NA_0 = A_{\max}$ .

$$\text{Mit } \sin \frac{1}{2}\phi = \frac{A/2}{r} \Rightarrow A = 2r \sin \frac{1}{2}\phi \Rightarrow \text{mit } \phi = \frac{A_{\max}}{r} \text{ bzw. } r = \frac{A_{\max}}{\phi}$$

$$\Rightarrow \text{eingesetzt} \Rightarrow A = 2 \frac{A_{\max}}{\phi} \sin \frac{1}{2}\phi = \frac{A_{\max}}{\frac{1}{2}\phi} \sin \frac{1}{2}\phi$$

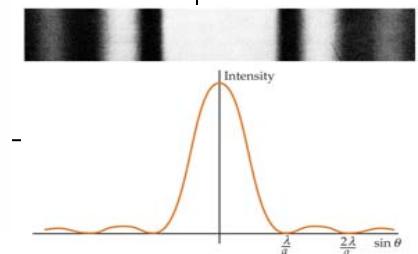


Verhältnis der Intensität an einem beliebigen Punkt zur Intensität in der Mitte des zentralen Maximums

$$\frac{I}{I_0} = \frac{A^2}{A_{\max}^2} = \left( \frac{\sin \frac{1}{2}\phi}{\frac{1}{2}\phi} \right)^2 \Rightarrow$$

$$I = I_0 \left( \frac{\sin \frac{1}{2}\phi}{\frac{1}{2}\phi} \right)^2$$

33-19



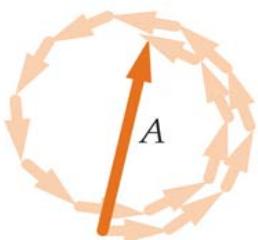
INTENSITY FOR A SINGLE-SLIT DIFFRACTION PATTERN

Phasendifferenz  $\phi$  zwischen der ersten und der letzten Welle gegeben durch den Gangunterschied  $a \sin \theta$ :

$$\phi = \frac{a \sin \theta}{\lambda} 2\pi \Leftrightarrow \text{ersten Minimum bei } a \sin \theta = \lambda \Rightarrow \phi = 2\pi$$

$$\text{Circumference } C = \frac{2}{3} N A_0$$

$$= \frac{2}{3} A_{\max} = \pi A$$



$$A = \frac{2}{3\pi} A_{\max}$$

$$A^2 = \frac{4}{9\pi^2} A_{\max}^2$$

Zeigerdiagramm zum Abschätzen der Amplitude des ersten Nebenmaximums im Beugungsmuster beim Einzelspalt.

**Berechnung der Interferenz- und Beugungsmaximum bei mehreren Spalten**

Berechnung der Intensitätsverteilung im Interferenz- und Beugungsmuster beim Doppelspalt:

Ausgangspunkt Gl. (33.8)  $I = 4I_0 \cos^2 \frac{1}{2}\delta$  mit  $I_0$  ersetzt durch Gl. (33.19)  $I = I_0 \left( \frac{\sin \frac{1}{2}\phi}{\frac{1}{2}\phi} \right)^2 \Rightarrow$

$$I = 4I_0 \left( \frac{\sin \frac{1}{2}\phi}{\frac{1}{2}\phi} \right)^2 \cos^2 \frac{1}{2}\delta \text{ wobei } \phi = \frac{a \sin \theta}{\lambda} 2\pi \Leftrightarrow \text{Phasendifferenz zwischen den Wellen vom}$$

oberen und vom unteren Ende des Spalts, und  $\delta = \frac{d \sin \theta}{\lambda} 2\pi \Leftrightarrow \text{Phasendifferenz zwischen}$

Wellen aus der Mitte zweier benachbarter Spalte,  $I_0$  die bei  $\theta=0$  von einem Spalt allein herrührende Intensität.

$$I = 4I_0 \left( \frac{\sin \frac{1}{2}\phi}{\frac{1}{2}\phi} \right)^2 \cos^2 \frac{1}{2}\delta \quad 33-22$$

INTERFERENCE–DIFFRACTION INTENSITY FOR TWO SLITS

Beispiel 33.7: Interferenz- und Beugungsmuster bei fünf Spalten

Berechnung der Intensitätsverteilung im Interferenz- und Beugungsmuster bei fünf äquidistanten Spalten mit Breite  $a$  und Abstand  $d$  voneinander  $\Rightarrow$

Intensitätsverteilung am Einzelspalt, Gl. (33.19),  $I' = I_0 \left( \frac{\sin \frac{1}{2} \phi}{\frac{1}{2} \phi} \right)^2$  mit Phasendifferenz, Gl (33.20),  $\phi = \frac{a \sin \theta}{\lambda} 2\pi$ ;

Intensität  $I \sim A^2$  wobei  $A \sin(\alpha + \delta') = A_0 \sin \alpha + A_0 \sin(\alpha + \delta) + A_0 \sin(\alpha + 2\delta) + A_0 \sin(\alpha + 3\delta) + A_0 \sin(\alpha + 4\delta)$

und  $\delta = \frac{d \sin \theta}{\lambda} 2\pi \Rightarrow$

mit  $\delta' = \beta + \delta$  und

Summe der Außenwinkel =  $2\pi \Leftrightarrow \pi - \delta' + 4\delta + \pi - \delta' = 2\pi \Rightarrow$

$\delta' = 2\delta \Rightarrow$  eingesetzt  $\Rightarrow \beta = \delta' - \delta = 2\delta - \delta = \delta \Rightarrow$

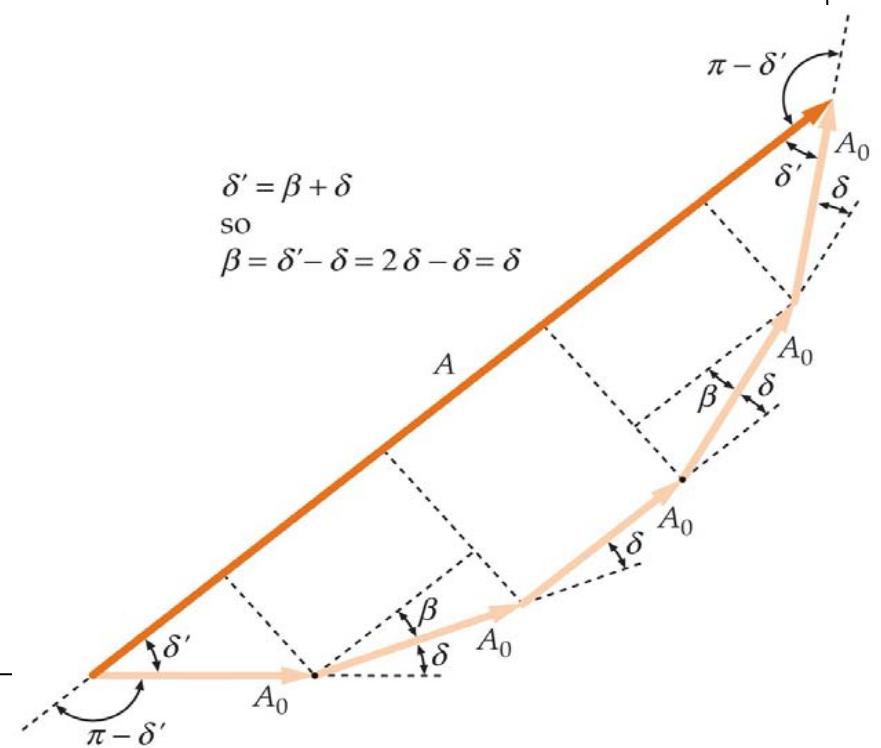
aus der Abbildung  $\Rightarrow$

$A = 2A_0 \cos \delta' + 2A_0 \cos \beta + A_0 = A_0 (2 \cos 2\delta + 2 \cos \delta + 1) \Rightarrow$

quadriert  $A^2 = A_0^2 (2 \cos 2\delta + 2 \cos \delta + 1)^2 \Rightarrow$

$I = I' (2 \cos 2\delta + 2 \cos \delta + 1)^2 \Rightarrow$

$$I = I_0 \left( \frac{\sin \frac{1}{2} \phi}{\frac{1}{2} \phi} \right)^2 (2 \cos 2\delta + 2 \cos \delta + 1)^2$$

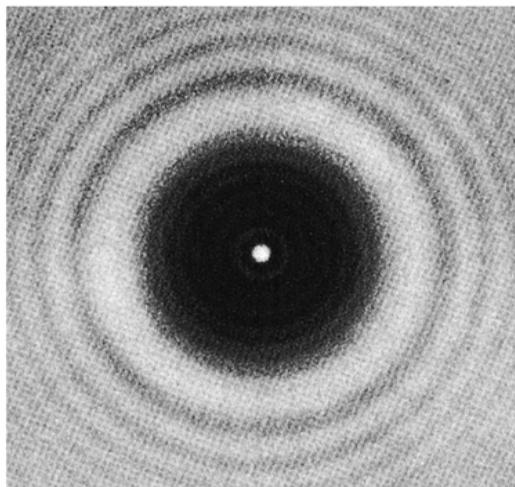


### 33.6 Fraunhofer'sche und Fresnel'sche Beugung (Fraunhofer and Fresnel diffraction)

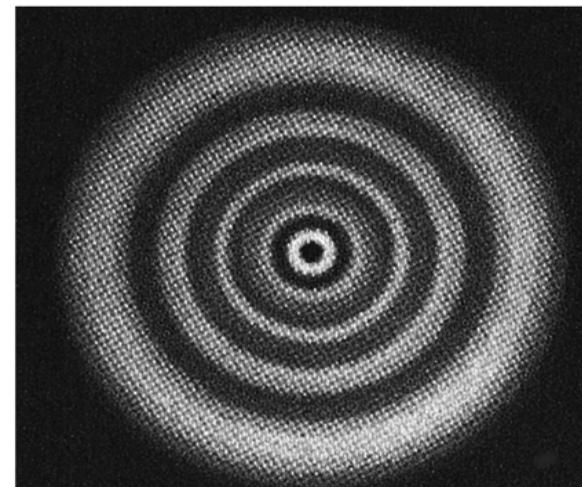
Das Beugungsmuster beim Einzelspalt in verschiedenen Abständen vom Schirm  $\Rightarrow$  wird der Schirm näher an den Spalt gerückt, so geht das Fraunhofer'sche Beugungsmuster in das Fresnel'sche über:

Fraunhofer'sches Beugungsmuster: wenn die gebeugten Strahlen nahezu parallel am Beobachtungsort eintreffen;

Fresnel'sches Beugungsmuster: wenn der Beobachtungsort in der Nähe der Öffnung bzw. des Hindernisses sich befindet



Fresnel'sches Beugungsmuster bei einer undurchsichtigen Scheibe



Fresnel'sches Beugungsmuster bei einer kreisförmigen Öffnung

As the screen is moved closer,



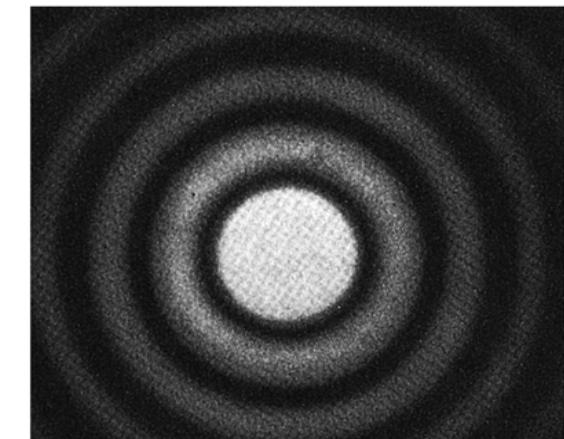
the Fraunhofer pattern observed far from the slit . . .



gradually changes into . . .

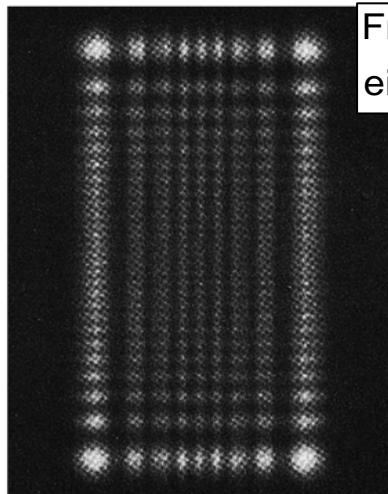


the Fresnel pattern observed near the slit.

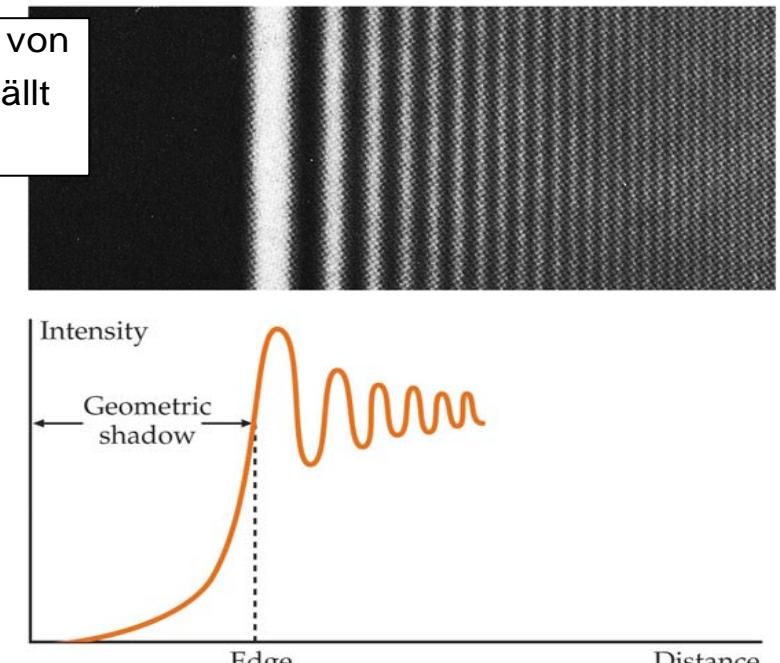


Fraunhofer'sches Beugungsmuster bei einer kreisförmigen Öffnung

Fresnel'sches Beugungsmuster bei einer scharfen, geraden Kante, die von einer punktförmigen Lichtquelle beleuchtet wird  $\Rightarrow$  die Lichtintensität fällt im geometrischen Schatten nicht plötzlich auf null.



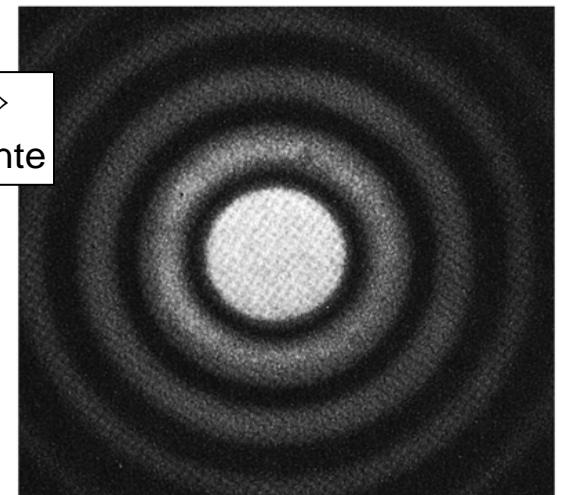
Fresnel'sches Beugungsmuster bei einer rechteckigen Öffnung

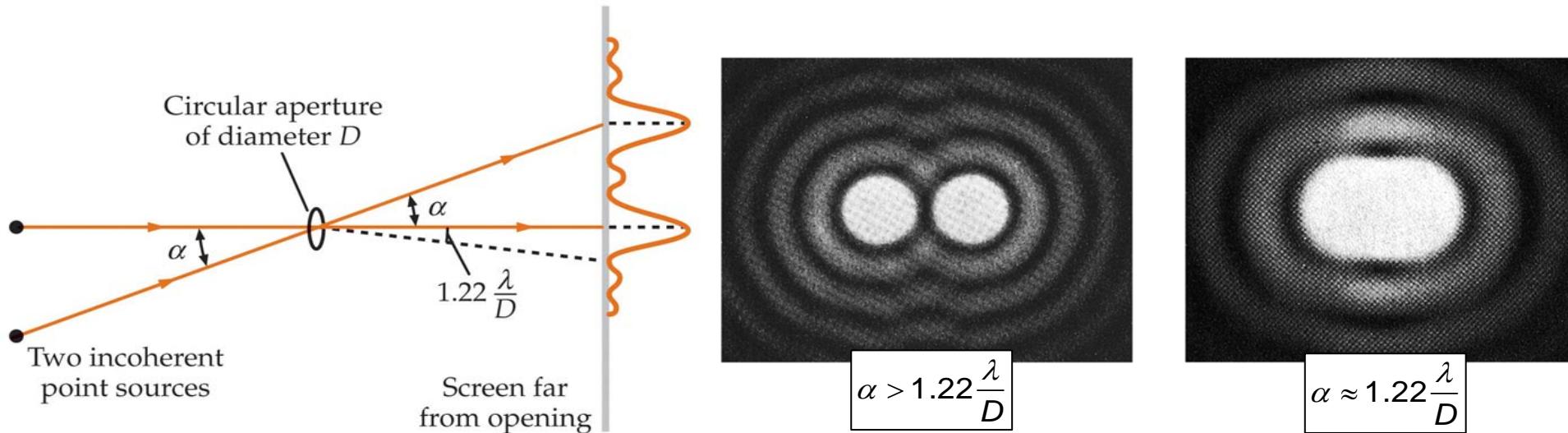


### 33.7 Beugung und Auflösung (Diffraction and resolution)

Fraunhofer'sches Beugungsmuster bei einer kreisförmigen Öffnung  $\Leftrightarrow$   
hat große Bedeutung für das Auflösungsvermögen optischer Instrumente

Winkel  $\theta$ , bei dem das erste Beugungsmaximum auftritt, hängt von der Wellenlänge  $\lambda$  und vom Öffnungsdiurchmesser  $D$  ab:  $\sin \theta = 1.22 \frac{\lambda}{D}$   
(vergleiche für Spalt Gl. (33.9)  $\sin \theta = \frac{\lambda}{a}$ )  $\Rightarrow$  für kleine Winkel  $\theta \Rightarrow \theta = 1.22 \frac{\lambda}{D}$





Zwei weit entfernte Quellen, die am Beobachtungsort (Schirm) unter dem Winkel  $\alpha$  erscheinen  $\Rightarrow$   
getrennt erkennbar, wenn sich ihre Beugungsmuster kaum überlappen  $\Leftrightarrow \alpha > 1.22 \frac{\lambda}{D}$

Rayleigh'sches Kriterium der Auflösung: das erste Beugungsminimum der einen Quelle fällt mit dem zentralen Beugungsmaximum der anderen Quelle zusammen  $\Leftrightarrow \alpha_k = 1.22 \frac{\lambda}{D}$

Das Rayleigh'sches Kriterium hat große praktische Bedeutung für das Auflösungsvermögen eines optischen Instrumentes (Mikroskop, Teleskop, menschliches Auge):  
Auflösungsvermögen  $\Leftrightarrow$  Fähigkeit, zwei Gegenstände oder Lichtquellen getrennt abzubilden oder erkennbar zu machen, die unter einem kleinen Winkel erscheinen.

Auflösungsvermögen kann erhöht werden durch Vergrößerung des Durchmessers  $D$  des abbildenden Elements (Linse, Spiegel), oder durch Verkleinerung der Wellenlänge  $\lambda$



Das aus 27 Radioantenne bestehende Very Large Array (VLA) in der Nähe von Socorro (USA)  $\Leftrightarrow$  der effektive Durchmesser der gesamten Anordnung kann bis zu 36 km betragen

<http://www.vla.nrao.edu/>

Beispiel 33.8: Physik an der Saaldecke

Feine Punktmuster an der weißen Saaldecke, Punkte haben voneinander einen Abstand von  $x = 5 \text{ mm}$ , gut unterscheidbar aus  $L = 5 \text{ m}$  Entfernung, weiter weg verschwimmen sie  $\Rightarrow$  hängt dies mit dem Auflösungsvermögen des Auges zusammen?

Annahme: Pupilledurchmesser  $D = 5 \text{ mm}$ , mittlere Wellenlänge  $\lambda = 500 \text{ nm} \Rightarrow$

$$\text{kritischer Winkel für die Auflösung } \alpha_k = 1.22 \frac{\lambda}{D} = 1.22 \frac{500 \times 10^{-9} \text{ m}}{5 \times 10^{-3} \text{ m}} = 1.22 \times 10^{-4} \text{ rad},$$

mit Winkel  $\theta$ , unter dem dem Auge zwei benachbarte Punkte erscheinen:  $\theta = \frac{x}{L} \Rightarrow$

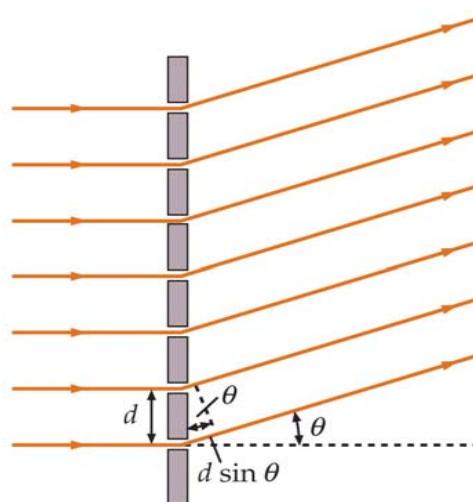
$$\text{Grenzwert } \alpha_k = \theta \Rightarrow 1.22 \frac{\lambda}{D} = \frac{x}{L} \Rightarrow 1.22 \times 10^{-4} \text{ rad} = \frac{5 \times 10^{-3} \text{ m}}{L} \Rightarrow L \approx 40 \text{ m}$$

bei einem Pupillendurchmesser  $D = 2.5 \text{ mm} \Rightarrow L \approx 20 \text{ m}$

Die Unterteilung der Netzhaut im Auge ist gerade so fein, daß das durch die Pupillenöffnung bestimmte Auflösungsvermögen beim sichtbaren Licht voll ausgenutzt wird.

### 33.8 Beugungsgitter (Diffraction gratings)

Beugungsgitter: besteht aus  $N$  äquidistanten, dicht beieinander liegenden, parallelen Linien, die den Abstand  $d$  (Gitterkonstante) voneinander haben.



Transmissionsgitter

Ebene Welle trifft auf Transmissionsgitter  $\Rightarrow$  im großem Abstand auf einem Schirm entsteht ein Interferenzmuster:  
bei  $\theta=0$  ist das Licht von jedem Spalt (Amplitude  $A_0$ , Intensität  $I_0$ ) in Phase mit dem von allen anderen Spalten  $\Rightarrow$  Amplitude  $NA_0$   $\Rightarrow$  Intensität am Schirm  $N^2 I_0$ ;  
bei einem Winkel  $\theta$ , für den  $d \sin \theta = \lambda$  gilt, ist der Gangunterschied zwischen den Strahlen aus benachbarten Spalten gleich  $\lambda$   $\Rightarrow$  das Licht von jedem Spalt in Phase mit dem von allen anderen Spalten  $\Rightarrow$  Amplitude  $NA_0$   $\Rightarrow$  Intensität am Schirm  $N^2 I_0$   $\Rightarrow$  die Interferenzmaxima treten bei Winkeln  $\theta_m$  auf, für die gilt  $d \sin \theta_m = m\lambda$  wobei  $m = 0, 1, 2, \dots$

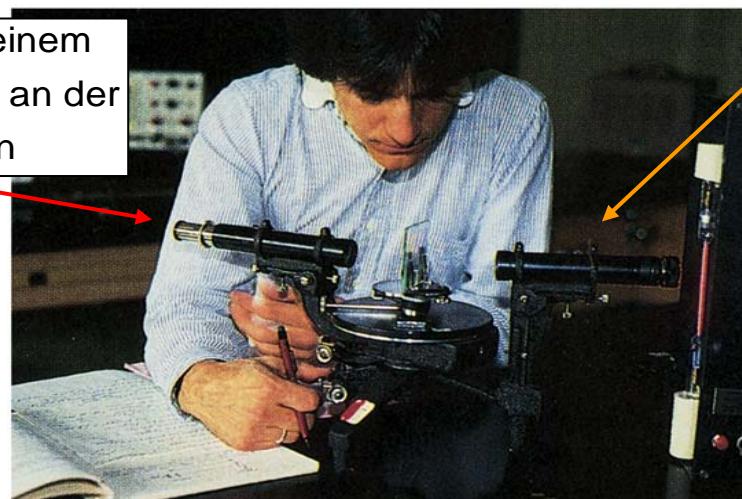
Die Lage eines Interferenzmaximums am Schirm hängt nicht von der Anzahl der Quellen bzw. Spalte ab, aber je zahlreicher diese sind, desto intensiver und schärfer wird das Maximum.



CDs als Reflexionsgitter

Spektroskop für die Ausbildung: das von einem Kollimatorspalt nach der Lichtquelle durchgelassene Licht wird mit Hilfe einer Linse in parallelen Lichtstrahlen umgesetzt, die auf das Gitter fallen.

Das vom Gitter gebeugte Licht wird mit einem Teleskop betrachtet, dessen Drehwinkel an der Halterung genau abgelesen werden kann



In Vorwärtsrichtung ( $\theta_0=0$ ) ist bei allen Wellenlängen das zentrale Maximum zu sehen.

Bei der Wellenlänge  $\lambda$  tritt das erste Interferenzmaximum ( $m=1$ ) beim Winkel  $\theta_1 \Leftrightarrow d \sin \theta_1 = \lambda \Rightarrow$  Spektrallinie  $\Rightarrow$  der Satz von Spektrallinien, die zu  $m=1$  gehören, bilden das Spektrum 1. Ordnung  $\Rightarrow$  entsprechend für  $m=2$  das Spektrum 2. Ordnung, usw. solange  $\theta_m < 90^\circ$

Wesentliches Merkmal eines Spektroskops ist seine Fähigkeit, Spektrallinien aufzulösen, deren Wellenlänge sich kaum unterscheidet  $\Leftrightarrow$  Auflösungsvermögen  $A = \frac{\lambda}{|\Delta\lambda|} = mN$

siehe auch <http://www.jobinyvon.de/default.htm>

Beispiel 33.9: Auflösen der Natrium-D-Linien

Das Licht einer Natriumdampflampe beleuchtet ein Beugungsgitter mit  $1/d = 12000$  Linien pro cm =  $= 1200$  Linien pro mm; gesucht: Winkel, bei welchen die Natrium-D-Linien (589.00 nm und 589.59 nm) in der 1. Ordnung auftreten  $\Rightarrow$

$$\text{aus Gl. (33.26)} \quad d \sin \theta_1 = \lambda \quad \Rightarrow \quad \theta_1 = \arcsin\left(\frac{\lambda}{d}\right) \quad \Rightarrow$$

$$\text{für } \lambda = 589.00 \text{ nm} \quad \Rightarrow \quad \theta_1 = \arcsin\left(\frac{589.00 \times 10^{-9} \text{ m}}{(1/12000) \times 10^{-2} \text{ m}}\right) = 44.98^\circ$$

$$\text{für } \lambda = 589.59 \text{ nm} \quad \Rightarrow \quad \theta_1 = \arcsin\left(\frac{589.59 \times 10^{-9} \text{ m}}{(1/12000) \times 10^{-2} \text{ m}}\right) = 45.03^\circ$$

VLA-Radioteleskop in Socorro, New Mexico:

die Wellen interferieren konstruktiv, wenn  $d \sin \theta_m = m\lambda$  erfüllt ist, wobei  $d$  der Abstand benachbarter Einzelantennen des VLA ist



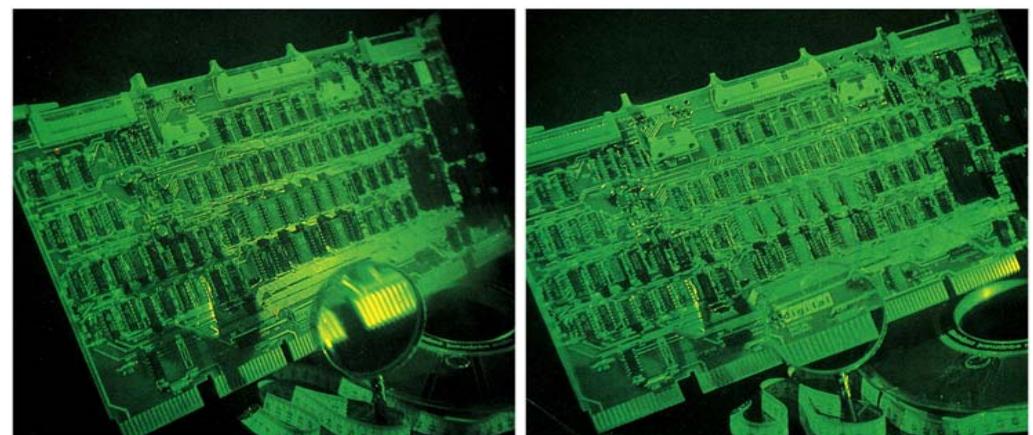
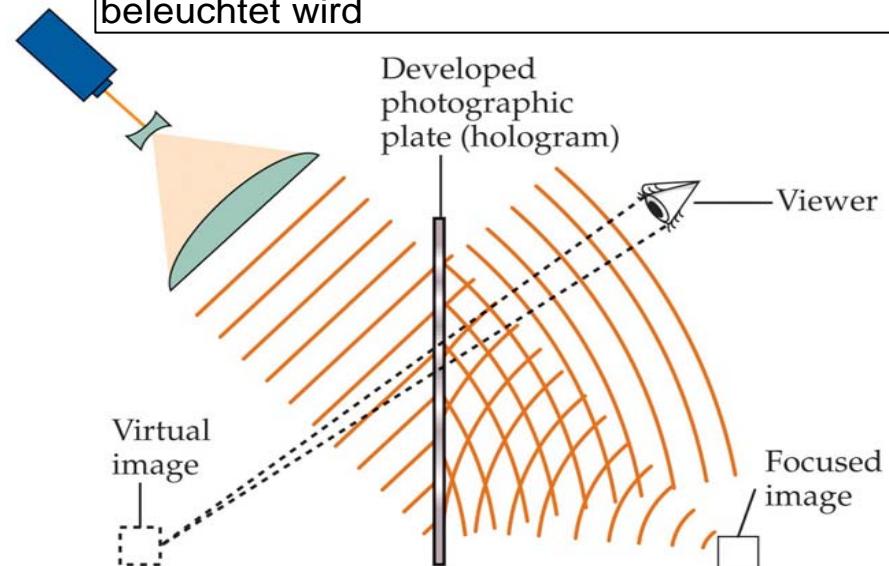
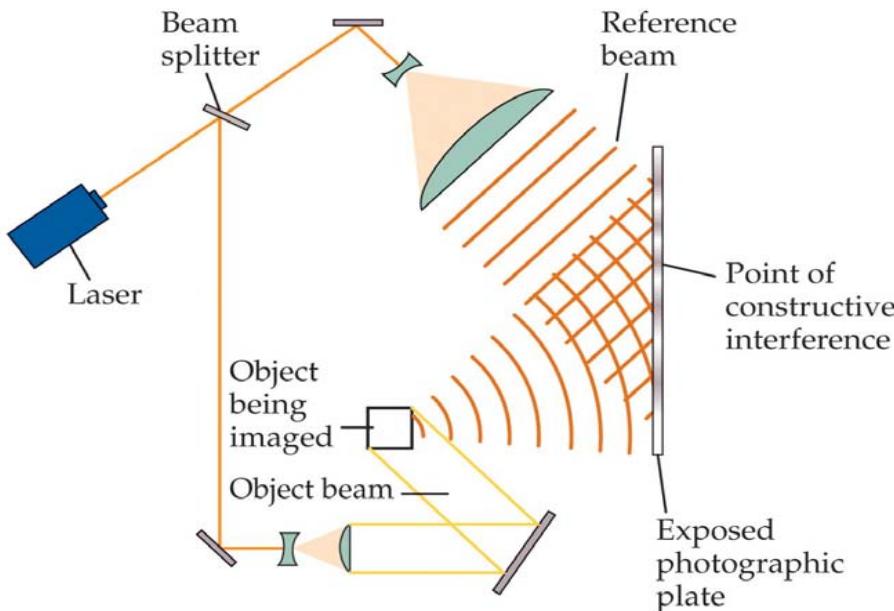
<http://www.vla.nrao.edu/>

**Hologramme**

**Hologramme**  $\Leftrightarrow$  Anwendung von Beugungsgittern zur Erzeugung dreidimensionaler Bilder

Erzeugung eines Hologramms: Durch Interferenz von Referenz- und Gegenstandsstrahl entsteht ein Interferenzmuster, das auf dem Film aufgezeichnet wird

Nach der Entwicklung des Films ergibt sich ein dreidimensionales Bild des Gegenstands, wenn der Film mit einem kohärenten Laserstrahl beleuchtet wird



**34. Interferenz**

- 34.1 Einführung
- 34.2 Interferenz von Wellen erzeugt durch zwei synchrone Quellen
- 34.3 Interferenz von mehreren synchronen Quellen
- 34.4 Stehende eindimensionale Wellen
- 34.5 Stehende elektromagnetische Wellen
- 34.6 Stehende zweidimensionale Wellen
- 34.7 Stehende dreidimensionale Wellen: Resonanzkörper
- 34.8 Wellenleiter

**35. Beugung**

- 35.1 Einführung
- 35.2 Das Huygens'sche Prinzip
- 35.3 Fraunhofer'sche Beugung an einem rechteckigen Spalt
- 35.4 Fraunhofer'sche Beugung an einer kreisförmigen Öffnung
- 35.5 Fraunhofer'sche Beugung an zwei gleichen parallelen Spalten
- 35.6 Beugungsgitter
- 35.7 Röntgenstreuung an Kristallen