UE: Mathematische Grundlagen

Beispiele zum Thema: *Funktionen*

Aufgabe 1. Der pazifische Rankenfusskrebs *Pollicipes polymerus* besitzt ein primitives Kreislaufsystem, in welchem Hämolymphe mittels eines bislang unbekannten Muskels durch den Körper gepumpt wird. Die Kontraktionsfrequenz dieses Muskels hängt stark von der Körpertemperatur ab. Folgende Messungen von Temperatur und Frequenz wurden durchgeführt:

° C	Schläge pro Minute
7	1
23	15
25	50

Tragen Sie in einem Diagramm die Temperaturwerte auf der Abszisse und die zugehörigen Frequenzwerte auf der Ordinate auf. Alle innerhalb des durch die drei Punkte definierten Dreiecks liegenden Werte können als Realwerte angenommen werden. Prüfen Sie, ob dies für folgende Wertepaare zutrifft: (15° C, 9 S./min.; 15° C, 25 S./min.; 24° C, 20 S./min.).

Aufgabe 2. Der Wasserdruck ist proportional zur Wassertiefe. In Meerwasser wurde folgende Messung ausgeführt: Tiefe d = 98.0 m, Druck p = 10.21 atm. Drücken Sie p in Abhängigkeit von d aus und bestimmen Sie die Funktionswerte im Intervall ($0 <= d <= 1000$).

Aufgabe 3. Ein springendes Tier (Katze, Floh, etc.) fällt derart wieder zu Boden, dass die Vertikalgeschwindigkeit seines Schwerpunktes jede Sekunde um 9.81 m/s zunimmt. Wie lautet die Gleichung für die Vertikalgeschwindigkeit, wenn zum Zeitpunkt $t = 0$ gilt: $v = 0$? Wie lauten die Geschwindigkeiten für $t = 0.1$ s, 0.2 s, etc.? Zeichnen Sie ein Diagramm und interpretieren Sie die Funktionswerte für negative Werte von t.

Aufgabe 4. Die Erde kann näherungsweise als Kugel mit einem Umfang von 40000 km betrachtet werden. Nehmen Sie an, dass ein Seil rund um den Äquator gespannt wird. Erhöhen Sie nun den Umfang um 10 m und spannen Sie im Gedanken das Seil nochmals in der Weise, dass der Abstand zur Erde konstant ist. Kann eine Maus unter dem Seil durchkriechen?

Aufgabe 5. Für die CO_2-Konzentration im Höhenbereich zwischen 9 und 12 km wurden 1960 313 ppm und 1970 321 ppm gemessen. Es konnte in diesem Zeitraum ein monotoner Anstieg der Konzentration festgestellt werden. Schätzen Sie unter Verwendung einer linearen Extrapolation die CO_2-Konzentrationen für die Jahre 1980, 1990, 2000 und 2010.

Aufgabe 6. Die eingeatmete Luft wird in den Lungen auf Körpertemperatur erwärmt. Beim Ausatmen kühlt sie sich wieder langsam ab. Experimente mit einer in der Wüste beheimateten Zaunkönig-Art ergaben, dass die Temperatur der ausgeatmeten Luft T_E in folgender Weise von der Umgebungstemperatur T_U abhängt:

$$T_E = 8.51 + 0.756\, T_U \quad \text{für } 12°\text{ C} < T_U < 30°\text{ C}$$

Zeichnen Sie den Funktionsgraphen, und bestimmen Sie die Funktionswerte für den angeführten Wertebereich von T_U.

Aufgabe 7. Ein Erwachsener benötigt pro Tag etwa 300 g Kohlehydrate. Welche Möglichkeiten hat er, wenn er dieses Bedürfnis durch aus Kartoffeln und Sojabohnen bestehende Nahrung abdecken möchte? 100 g roher Kartoffel enthalten 19 g Kohlehydrate, 100 g getrockneter Sojabohnen 35 g Kohlehydrate. Stellen Sie das Resultat in einem Diagramm dar.

Aufgabe 8. Nehmen Sie eine kugelförmige Zelle mit dem Volumen V und der Oberfläche S an. Drücken Sie V als Funktion von S aus. Um welchen Funktionstypen handelt es sich hier? Wie wirkt sich eine Verdopplung von S auf V aus?

Aufgabe 9. Lösen Sie folgende quadratische Gleichungen nach x:

a) $x^2 - 2px = 0$ b) $qx^2 = 3x$ c) $rx^2 + (r + 3)x = 0$

Aufgabe 10. Lösen Sie die Gleichung: $y^4 - y^2 = 12$.

Aufgabe 11. Die Summe zweier unbekannter Zahlen ist 6, ihr Produkt ist 4. Bestimmen Sie die Zahlen mit einer Genauigkeit von 2 Dezimalen.

Aufgabe 12. Auf einem See mit der Fläche A (in m²) dürfen Motorboote mit der Geschwindigkeit v (m/s) fahren. Nehmen Sie an, dass der See stark befahren ist und jedes Boot zum sicheren Manövrieren einen Streifen der Länge $s_1 = t_1 \cdot v$ und der Breite $s_2 = t_2\, v$ benötigt. t_1 und t_2 sind dabei die Zeiten, die für sicheres Manövrieren benötigt werden. Wie hoch ist die maximal mögliche Anzahl an Booten im See? Rechnen Sie das Beispiel numerisch mit folgenden Werten: $t_1 = 10$ s, $t_2 = 5$ s, $A = 1$ km².

Aufgabe 13. Durch die Gleichung der Form

$$r = c^{b\varphi + d}, \quad -\infty < \varphi < +\infty,\ b > 0,\ c > 0$$

ist eine sog. logarithmische Spirale gegeben. Zeichnen Sie diese für $c = 2$, $d = -1$ und $b = 1/(2\pi)$, indem Sie die Polarkoordinaten in folgender Art und Weise in karthesische Koordinaten überführen:

$$x = r\cos\varphi \qquad y = r\sin\varphi$$

Ist die erhaltene Spirale links- oder rechtsgewunden? Welche Veränderungen müssen an obiger Gleichung vorgenommen werden, um den Drehsinn umzukehren?

Aufgabe 14. Die Geschwindigkeit einer enzymatischen Reaktion lässt sich durch folgende Gleichung beschreiben:

$$v = k_3[ES] = v_m \frac{[S]}{[S]+K}$$

k_3 = Reaktionskonstante: Enzymsubstrat $\rightarrow$ Enzym + Produkt
[ES] = Konzentration des Enzymsubstrates
$v_m = k_3E_0 > 0$ (E_0 = Gesamtmenge des Enzyms)
$K = (k_2 + k_3)/k_1 > 0$ (Michaelis-Konstante)
k_1 = Reaktionskonstante: Enzym + Substrat $\rightarrow$ Enzymsubstrat
k_2 = Reaktionskonstante: Enzym + Substrat $\leftarrow$ Enzymsubstrat

Welchem Wert nähert sich v mit wachsender Substratkonzentration? Skizzieren Sie die Funktion, indem Sie auf der x-Achse die Substratkonzentration und auf der y-Achse die Geschwindigkeit auftragen. Für kleine Werte von [S] nimmt v nahezu linear mit [S] zu. Wie lautet die Gleichung dieser linearen Approximationsfunktion?

Aufgabe 15. Die Variable x durchlaufe die Menge der Natürlichen Zahlen ({1, 2, 3,......}), und y sei der Rest nach Division von x durch 5. Für x = 19 erhält man demnach für y = 4. Zeigen Sie graphisch, dass y eine periodische Funktion mit der Periode l = 5 darstellt. Ist l' = 10 eine Periode dieser Funktion?

Aufgabe 16. Die Variable x sei ein Vielfaches von 3 (3, 6, 9, 12,....), und y sei der Rest nach Division von x durch 5. Ist y eine periodische Funktion von x? Wenn ja, wie lautet die Periode?

Aufgabe 17. In einem Verhaltensexperiment wurden drei Schildkröten am Punkt O freigelassen und später an einer jeweiligen Position beobachtet. Die Positionen der Schildkröten lauteten:

$$r_1 = 27.5\text{ m},\ \alpha_1 = 73°;\quad r_2 = 18.7\text{ m},\ \alpha_2 = 165°;\quad r_3 = 31.3\text{ m},\ \alpha_3 = 106°$$

Die Polarachse ist in Ostrichtung mit O als Ursprung orientiert. Die angegebenen Winkel wurden gegen den Uhrzeigersinn gemessen. Konvertieren Sie die Polarkoordinaten in karthesische Koordinaten, wobei O auch hier der Ursprung sein soll, x in Richtung Osten, y in Richtung Norden orientiert sein sollen (für Transformation: siehe Aufgabe 13).

Aufgabe 18. Ein vertikaler Stab von 2 m Länge wirft einen Schatten auf eine horizontale Fläche. Die Sonnenstrahlen treffen mit einem Winkel $\theta = 67°$ auf die Fläche auf. Wie lang ist der erzeugte Schatten? Wie lang wäre der erzeugte Schatten, wenn der Stab horizontal und die Projektionsfläche vertikal orientiert wären?

Aufgabe 19. Skizzieren Sie die Funktion $y(t) = (1 + \sin t)(\sin(2t))$ für den Wertebereich $0 <= t <= 2\pi$.

Aufgabe 20. Skizzieren Sie die Funktion $y(t) = 3\ e^{-0.2\ t}\ \sin(2\pi t + \pi/2)$ für $0 <= t <= 5$. Lesen Sie aus dem Graphen, ab welchem Wert für t die Amplitude dieser gedämpften Schwingung unter den Wert 2 fällt.

Aufgabe 21. Der Zuwachs der Holzmenge in einem Jungwald gehorcht näherungsweise einer Exponentialfunktion. Die jährliche Wachstumsrate werde mit 3.5 % beziffert. Welcher Zuwachs kann nach 10 Jahren verzeichnet werden?

Aufgabe 22. Man nehme wiederum an, dass die jährliche Wachstumsrate der Holzmenge in einem Jungwald 3.5 % beträgt. Nach wie vielen Jahren hat sich die Holzmenge des Waldes verdoppelt, nach wie vielen Jahren verdreifacht?

Aufgabe 23. Ein Kulturmedium wurde mit N_0 Bakterien beimpft. Die Bakterienzellen teilen sich alle 2 Stunden. Wie viele Bakterien sind im Medium nach 24 Stunden enthalten? Zeichnen Sie die Funktion N(t). Zu welchem Zeitpunkt hat sich die Bakterienmenge um 25 % des Ausgangswertes erhöht?

Aufgabe 24. Das Kalium-Isotop ^{42}K besitzt eine Halbwertszeit von 12.5 Stunden. Wenn mit N_0 die Ausgangsmenge an ^{42}K bezeichnet wird, wie viele Isotope verbleiben nach 2 Tagen und 2 Stunden? Nach wie viele Stunden hat die Anzahl der Kalium-Isotope auf $N_0/1024$ abgenommen? Skizzieren Sie die Zerfallskurve von ^{42}K.

Aufgabe 25. Die weibliche Motte *Tinea pellionella* legt während ihres gesamten Lebens etwa 150 Eier. In einem Jahr können sich bis zu 5 Generationen dieses Insekts entwickeln. Jede Larve verzehrt bis zur Verpuppung ca. 20 mg Baumwolle. Nehmen Sie an, dass 2/3 der Eier zugrunde gehen und 50 % der verbleibenden Motten Weibchen sind. Schätzen Sie die Menge an Baumwolle ab, welche von den Abkömmlingen eines einzelnen Weibchens innerhalb eines Jahres verzehrt wird. Das ursprüngliche Weibchen soll dabei zu Generation 1 zählen.

Aufgabe 26. Die Weltpopulation betrug im Jahre 1970 $3.7\ 10^9$ Menschen. Damals wurde näherungsweise eine jährliche Wachstumsrate von 2 % angenommen. Wie gross wäre die Weltpopulation bei Annahme einer konstanten Wachstumsrate in den Jahren 1980, 1990, 2000 und 2010? Wie stimmen die Berechnungen mit den wahren Daten für das Jahr 2000 überein?

Aufgabe 27. Nach Oberdröster (1988) lässt sich der zeitliche Verlauf der Retention von in der Lunge abgelagerten Teilchen durch folgende Funktion darstellen:

$$R(t) = 0.8\ e^{-2.3\ t} + 0.2\ e^{-0.014\ t}$$

Zeichnen Sie die Funktion für $0 <= t <= 50$ Tage. Berechnen Sie die Steigung der Tangente im Punkt R(10) und schneiden sie die Tangente mit der y-Achse. Wie lautet der y-Wert des Schnittpunktes?

Aufgabe 28. Welche Halbwertszeit hat ein radioaktives Präparat, welches nach 30 Tagen zu 80 % zerfallen ist? Skizzieren Sie die Zerfallskurve für diese Substanz.

Aufgabe 29. In ein trübes Medium tritt von oben das Sonnenlicht mit der Intensität I_0 ein. In 1 m Tiefe gelangen nur noch 10 % von I_0. Man nehme an, dass die Lichtintensität I mit der Tiefe x nach der Formel

$$I(x) = I_0\ e^{-\beta\ x}$$

abnimmt. Berechnen Sie unter Verwendung obiger Daten den „Extinktionskoeffizienten" β. Zeichnen Sie I(x), und geben Sie an, welcher Prozentsatz des einfallenden Lichtes in den obersten 20 cm absorbiert wird.

Aufgabe 30. Die positiven Grössen y und x seien durch die Funktion $y = c\ x^k$ miteinander verknüpft. Wie hängen dann die Logarithmen von y und x voneinander ab?

Differential-Rechnung — H 4

Grunddifferentiale

Ableitungen

Grund-Regeln

	Funktion	Ableitung
h 21	$y = c \cdot x^n + C$	$y' = c \cdot n \cdot x^{n-1}$
h 22	$y = u(x) \pm v(x)$	$y' = u'(x) \pm v'(x)$
h 23	$y = u(x) \cdot v(x)$	$y' = u' \cdot v + u \cdot v'$
h 24	$y = \frac{u(x)}{v(x)}$	$y' = \frac{u' \cdot v - u \cdot v'}{v^2}$
h 25	$y = \sqrt{x}$	$y' = \frac{1}{2\sqrt{x}}$
h 26	$y = u(x)^{v(x)}$	$y' = u^v \left(\frac{u' \cdot v}{u} + v' \cdot \ln u \right)$

Ableitung einer Funktion von einer Funktion (Kettenregel)

	Funktion	Ableitung
h 27	$y = f\left[u(x)\right]$	$y' = f'(u) \cdot u'(x) = \frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \cdot \frac{du}{dx}$

Ableitung bei Parameter-Darstellung

	Funktion	Ableitung
h 28	$y = f(x) \quad \begin{cases} x = f(t) \\ y = f(t) \end{cases}$	$y' = \frac{dy}{dt} \cdot \frac{dt}{dx} = \frac{\dot{y}}{\dot{x}}$
h 29		$y'' = \frac{d^2 y}{dx^2} = \frac{\dot{x}\ddot{y} - \dot{y}\ddot{x}}{\dot{x}^3}$

Ableitung der Umkehr-Funktionen

Die Gleichung $y = f(x)$ nach x aufgelöst, gibt die Umkehrfunktion $x = \varphi(y)$.

	Funktion	Ableitung
h 30	$x = \varphi(y)$	$f'(x) = \frac{1}{\varphi'(x)}$

Beispiel

	Funktion	Ableitung
h 31	$y = f(x) = \arccos x$	
h 32	gibt $x = \varphi(y) = \cos y$	$f'(x) = \frac{1}{-\sin y} = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$

Differential-Rechnung — H 5

Grunddifferentiale

Ableitungen

Exponential-Funktionen

	Funktion	Ableitung
h 33	$y = e^x$	$y' = e^x = y'' = \ldots$
h 34	$y = e^{-x}$	$y' = -e^{-x}$
h 35	$y = e^{ax}$	$y' = a \cdot e^{ax}$
h 36	$y = x \cdot e^x$	$y' = e^x \cdot (1 + x)$
h 37	$y = \sqrt{e^x}$	$y' = \frac{\sqrt{e^x}}{2}$
h 38	$y = a^x$	$y' = a^x \cdot \ln a$
h 39	$y = a^{nx}$	$y' = n \cdot a^{nx} \cdot \ln a$
h 40	$y = a^{x^2}$	$y' = a^{x^2} \cdot 2x \cdot \ln a$

Trigonometrische Funktionen

	Funktion	Ableitung
h 41	$y = \sin x$	$y' = \cos x$
h 42	$y = \cos x$	$y' = -\sin x$
h 43	$y = \tan x$	$y' = \frac{1}{\cos^2 x} = 1 + \tan^2 x$
h 44	$y = \cot x$	$y' = \frac{-1}{\sin^2 x} = -(1 + \cot^2 x)$
h 45	$y = a \cdot \sin(kx)$	$y' = a \cdot k \cdot \cos(kx)$
h 46	$y = a \cdot \cos(kx)$	$y' = -a \cdot k \cdot \sin(kx)$
h 47	$y = \sin^n x$	$y' = n \cdot \sin^{n-1} x \cdot \cos x$
h 48	$y = \cos^n x$	$y' = -n \cdot \cos^{n-1} x \cdot \sin x$
h 49	$y = \tan^n x$	$y' = n \cdot \tan^{n-1} x \cdot (1 + \tan^2 x)$
h 50	$y = \cot^n x$	$y' = -n \cdot \cot^{n-1} x \cdot (1 + \cot^2 x)$
h 51	$y = \frac{1}{\sin x}$	$y' = \frac{-\cos x}{\sin^2 x}$
h 52	$y = \frac{1}{\cos x}$	$y' = \frac{\sin x}{\cos^2 x}$

Differential-Rechnung — H 6

Grunddifferentiale

Ableitungen

Logarithmische Funktionen

	Funktion	Ableitung
h 53	$y = \ln x$	$y' = \frac{1}{x}$
h 54	$y = \log_a x$	$y' = \frac{1}{x \cdot \ln a}$
h 55	$y = \ln(1 \pm x)$	$y' = \frac{\pm 1}{1 \pm x}$
h 56	$y = \ln x^n$	$y' = \frac{n}{x}$
h 57	$y = \ln \sqrt{x}$	$y' = \frac{1}{2x}$

Hyperbel-Funktionen

	Funktion	Ableitung
h 58	$y = \sinh x$	$y' = \cosh x$
h 59	$y = \cosh x$	$y' = \sinh x$
h 60	$y = \tanh x$	$y' = \frac{1}{\cosh^2 x}$
h 61	$y = \coth x$	$y' = \frac{-1}{\sinh^2 x}$

Arcus-Funktionen

	Funktion	Ableitung
h 62	$y = \arcsin x$	$y' = \frac{1}{\sqrt{1 - x^2}}$
h 63	$y = \arccos x$	$y' = -\frac{1}{\sqrt{1 - x^2}}$
h 64	$y = \arctan x$	$y' = \frac{1}{1 + x^2}$
h 65	$y = \mathrm{arccot}\, x$	$y' = -\frac{1}{1 + x^2}$
h 66	$y = \mathrm{arsinh}\, x$	$y' = \frac{1}{\sqrt{x^2 + 1}}$
h 67	$y = \mathrm{arcosh}\, x$	$y' = \frac{1}{\sqrt{x^2 - 1}}$
h 68	$y = \mathrm{artanh}\, x$	$y' = \frac{1}{1 - x^2}$
h 69	$y = \mathrm{arcoth}\, x$	$y' = \frac{1}{1 - x^2}$