UE: Mathematische Grundlagen

Aufgaben zum Thema: Vektoren und Matrizen

1. Es seien a = (1, 3, -1, 5), b = (4, 4, 2, 5) und c = (3, 1, 3, 0). Berechnen Sie:
   a) a + b +c, b) a + b – c,
   c) a – b + c, d) a – b – c.

2. Gegeben seien folgende Matrizen:

$$A = \begin{pmatrix} 3 & -2 & 1 \\ 0 & 5 & 4 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} -2 & 2 & 0 \\ 5 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

   Bestimmen Sie: a) A + B, b) A – B, c) A + 2B, d) 3A – B.

3. A und B seien zwei Matrizen mit jeweils identischer Anzahl an Reihen und Spalten. λ und μ seien zwei beliebige Zahlen. Zeigen Sie folgende Zusammenhänge:

$$(\lambda + \mu)\, A = \lambda A + \mu A$$
$$\lambda(A + B) = \lambda A + \lambda B$$
$$\lambda(\mu A) = (\lambda\mu)A.$$

4. Die Fläche eines Waldes wurde in Quadrate von 1 m² Grösse unterteilt. Die Anzahl der in jedem Quadrat enthaltenen Farner wurde ermittelt. Das Resultat der Zählungen wurde in Vektorform wie folgt angegeben:

$$f = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \end{pmatrix}, q = \begin{pmatrix} 23 \\ 17 \\ 8 \\ 6 \\ 8 \\ 2 \end{pmatrix}$$

   f beschreibt die Anzahl der Farne pro Quadrat, q die Anzahl der Quadrate selbst. Ermitteln Sie die Gesamtzahl der Farne durch Ausführung einer Matrixoperation.

5. Schreiben Sie die folgenden Ausdrücke als Inneres Produkt zweier Vektoren an:

   a) $a_1x_1 + a_2x_2 + a_3x_3 + a_4x_4$,
   b) $1 + 2p + 3p^2 + ... + np^{n-1}$
   c) a cosß + b sinμ

6. Gegeben seien folgende beiden Matrizen:

$$M = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, N = \begin{pmatrix} 0 & 3 \\ 5 & 2 \end{pmatrix}$$

Zeigen Sie, dass MN nicht gleich NM ist (Ungültigkeit des Kommutativgesetzes bei Matrizen-Multiplikation)

7. Zeigen Sie, dass für die Matrix

$$A=\begin{pmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & \frac{\sqrt{2}}{2} & -\frac{\sqrt{2}}{2} \end{pmatrix}$$

gilt: A'A = I mit A' = transponierte Matrix von A, I = Einheitmatrix.

8. Lösen Sie folgende Matrix-Gleichung nach u und v:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -2 & 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} u & 6 \\ 1 & v \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 10 & -8 \\ -13 & -33 \end{pmatrix}$$

9. Lösen Sie unter Verwendung the Cramer'schen Regel:

a) $6x_1 + 5x_2 = 8$
$5x_1 + 7x_2 = 13$

b) $-2x + 3y = 2r$
$8x - 13y = 5s$

10. Lösen Sie folgende Determinanten:

$$a)\begin{vmatrix} 4 & 7 & 5 \\ 3 & -2 & 8 \\ 4 & 0 & 0 \end{vmatrix}, b)\begin{vmatrix} 4 & 0 & 5 \\ -2 & 1 & 1 \\ 3 & 7 & 0 \end{vmatrix}$$

11. Finden Sie jeweils die inverse Matrix:

$$A=\begin{pmatrix} 3 & -1 & 0 \\ 0 & 4 & 2 \\ 3 & 0 & 1 \end{pmatrix}, B=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 3 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

12. In einer Region leben 10% der Bevölkerung auf dem Land, 30% in Vororten einer Stadt und 60% in der Stadt selbst. Dieser Sachverhalt lässt sich durch einen sog. Zustandsvektor darstellen:

	L	V	S
S:=	(10	30	60)

Eine sog. Transitionsmatrix beschreibt die Wahrscheinlichkeit des Übergangs von einem Zustand in den anderen. Im gegebenen Falle lautet die Matrix:

	L	V	S	
	60	10	30	L
T:=	3	72	25	V
	10	35	55	S

Die erste Reihe der Matrix bedeutet dabei: Personen des Landes ziehen mit 10%iger Wahrscheinlichkeit in einen Vorort, mit 30%iger W. in eine Stadt und verbleiben mit 60%iger W. an ihrem Wohnsitz.
Das Produkt aus Transitionsmatrix und Zustandsmatrix ergibt den Zustandsvektor. Dieser beschreibt im gegebenen Falle den Zustand des Systems nach einem Jahr. Berechnen Sie den Zustandsvektor. Wenden Sie die Multiplikation nochmals auf den soeben berechneten Zustandsvektor an (STT). Wie hat sich die Bevölkerungsverteilung nach 2 Jahren entwickelt?

13. Das Wachstum einer hypothetischen Population wird durch ein sog. Lesliemodell mit zwei Altersklassen beschrieben. Die Leslie-Matrix L und die in einem Spaltenvektor x_0 zusammengefassten Anfangswerte in der ersten und der zweiten Altersklasse lauten:

$$L = \begin{pmatrix} 0.80 & 2 \\ 0.60 & 0 \end{pmatrix}, x_0 = \begin{pmatrix} 100 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Man bestimme den die Individuenzahlen nach einer Generation enthaltenden Spalten-Vektor $x_1 = Lx_0$. Indem man L mit x_1 multipliziert, ergibt sich die Klassenbelegung x_2 nach zwei Generationen. Wie lautet die Klassenbelegung nach 5 Generationen?

14. Wie lautet die Lösung der Gleichung

$$\begin{vmatrix} a - x & b \\ b & c - x \end{vmatrix} = 0$$

mit a = 4, b = 1 und c = 3?

15. Man bestimme mit Hilfe der Cramer'schen Regel die Lösungen Q und R des folgenden Gleichungssystems:

$$(a + b)Q - aR = b$$
$$cQ - (b + c)R = 0$$

16. Lösen Sie folgendes Gleichungssystem nach dem Schema $x = A^{-1}b$:

$$3x_1 + x_2 = 2$$
$$5x_1 + 3x_2 = 1$$

17. Gegeben seien die Matrizen

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -5 & 1 \\ 1 & 2 & -2 \\ 3 & -4 & -3 \end{pmatrix}, b = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 5 \end{pmatrix}$$

Berechnen Sie die Lösungen von Ax = b.