Maurizio Musso, Universität Salzburg

Physikalische Grundlagen der Meßtechnik

Teil 6

Fehlerfortpflanzung

- Mittelbare (oder indirekte) Messung und Fehlerfortpflanzung
- Fehlerfortpflanzung: Summen- und Differenzenregel
- Fehlerfortpflanzung: Produkt- und Quotientenregel
- Fehlerfortpflanzung: der allgemeine Fall
- Beispiel 1: Dichte eines Körpers aus Messung der Masse und des Volumens
- Beispiel 2: Widerstand eines Bauelementes aus Messung von Strom und Spannung

- Literatur:

- Wolfgang Hellenthal: *Physik für Mediziner und Biologen*, Wissenschaftliche Verlagsgesellschaft mbH Stuttgart 2002
- Trautwein, Kreibig, Oberhauser, Hüttermann: *Physik für Mediziner, Biologen und Pharmazeuten,* Walter de Gruyter Berlin 2000

Web-Link

http://www.sbg.ac.at/bio/people/musso/physikalische-messtechnik-ge.htm

Physikalische Grundlagen der Meßtechnik

Mittelbare (oder indirekte) Messung und Fehlerfortpflanzung

Oft wird eine Größe gesucht, die nicht direkt zu messen ist, sondern erst mittelbar über einen formelmäßigen Zusammenhang (eine Funktion) aus anderen Größen ergibt. Bespiele:

- die **Dichte ρ** eines Körpers durch Messung der **Masse *m*** des Körper und eines **Volumens *V***

$$\rho = m / V$$

- den **elektrischen Widerstand *R*** eines Körpers durch Messung der an diesem Körper anliegenden **Spannung *U*** und des durch diesem Körper fließenden **Stromes *I***

$$R = U / I$$

- *.....*

In diesen Fällen ist es wichtig zu wissen, wie sich die Fehler der einzelnen Meßgrößen auf das Resultat auswirken. Siehe auch Hellenthal S. 12-13, Trautwein S. 389-390

Beispiel: Differenz *d* zweier Längen l_1 und l_2, (siehe Trautwein S. 389)

$l_1 = (30{,}0 \pm 0.3)$ cm, $l_2 = (31{,}2 \pm 0.3)$ cm; diese Einzelmessungen sind auf ca. $\pm 1\%$ genau;

- Differenz $d = l_2 - l_1 = 1{,}2$ cm, aus den Ungenauigkeiten der Einzelmessungen kann der Wert dieser Differenz *d* zwischen 0,6 cm und 1,8 cm schwanken, d.h
- $d = (1{,}2 \pm 0.6)$ cm, *die Differenz ist auf $\pm 50\%$ ungenau, obwohl die Einzelmessungen auf 1% genau durchgeführt wurden!*

Physikalische Grundlagen der Meßtechnik

Fehlerfortpflanzung: Summen- und Differenzenregel

Besteht die **Funktion nur aus Summen und/oder Differenzen** verschiedener Meßgrößen, so ergibt sich **der absolute Gesamtfehler aus der Summe der einzelnen Absolutfehler**.
Steht vor einer Meßgröße eine Konstante, so wird der Absolutfehler dieser Meßgröße mit dieser Konstante multipliziert.

Siehe Hellenthal S. 13, Trautwein S. 389-390

Beispiel 1:

Differenz $d = l_2 - l_1$ zweier Längen l_1 und l_2, (siehe Trautwein S. 389) $\Rightarrow$

absoluter Gesamtfehler $\Delta d = \Delta l_2 + \Delta l_1$

- $l_1 = (30{,}0 \pm 0.3)$ cm, $l_2 = (31{,}2 \pm 0.3)$ cm; diese Einzelmessungen sind auf ca. $\pm 1\%$ genau;
- Differenz $d = 1{,}2$ cm, absoluter Gesamtfehler $\Delta d = 0{,}6$ cm, d.h $d = (1{,}2 \pm 0.6)$ cm bzw. $d = 1{,}2$ cm $\pm$ 50%,

  die Differenz ist auf $\pm 50\%$ ungenau, obwohl die Einzelmessungen auf 1% genau durchgeführt wurden!

Beispiel 2:

$z = 3{,}5\, x - 0.7\, y$ (siehe Trautwein S. 390) $\Rightarrow$

absoluter Gesamtfehler $\Delta z = 3{,}5\, \Delta x + 0{,}7\, \Delta y$

Physikalische Grundlagen der Meßtechnik

Fehlerfortpflanzung: Produkt- und Quotientenregel

Besteht die **Funktion**, durch welche die gesuchte Größe mit den Meßwerten verknüpft ist, **nur aus Produkten und/oder Quotienten** direkter Größen, so erhält man den ***relativen*** **Gesamtfehler als Summe der *relativen* Fehler der Einzelgrößen**.
Tritt eine Meßgröße mit einem Exponenten auf (z.B. -1/2, oder 2), so wird deren relativen Fehler mit dem Betrag dieses Exponenten multipliziert.

Siehe Hellenthal S. 12-13, Trautwein S. 390

Beispiel 1:

Dichte $\rho = m / V$ wobei m die Masse und $V = l^3$ das Volumen der würfelförmigen Probe $\Rightarrow$

relativer Gesamtfehler $\Delta\rho / \rho = \Delta m / m + \Delta V / V$

- $m = (60{,}0 \pm 0{,}1)$ g, $l = (20{,}0 \pm 0.1)$ mm; d.h. $\Delta m / m = 0{,}17\%$, $\Delta l / l = 0{,}5\%$
- $V = 8000\ \text{mm}^3 = 8\ \text{cm}^3$; da $V = l^3 \Rightarrow \Delta V / V = 3\, \Delta l / l = 1{,}5\%$
- Dichte $\rho = 60\ \text{g} / 8\ \text{cm}^3 = 7{,}5\ \text{g cm}^{-3}$
- relativer Gesamtfehler der Dichte $\Delta\rho / \rho = \Delta m / m + \Delta V / V = 0{,}17\% + 1{,}5\% = 1{,}67\% \Rightarrow \Delta\rho / \rho = 1{,}7\ \%$
  in diesem Fall ist der Fehler der Massenbestimmung fast vernachlässigbar gegenüber dem Fehler der Volumsbestimmung.

Beispiel 2:

$z = x^2 / y$ (siehe Trautwein S. 390) $\Rightarrow$

relativer Gesamtfehler $\Delta z / z = 2\, \Delta x / x + \Delta y / y$

Physikalische Grundlagen der Meßtechnik

Fehlerfortpflanzung: der allgemeine Fall

Beide vorherigen Regeln sind Spezialfälle der allgemeinen Vorschrift für die Ermittlung der Fehlerfortpflanzung.

Sei $z = f(x_1, x_2, x_3, ...)$ das mittelbare Ergebnis, das durch einen funktionalen Zusammenhang mit den direkten Meßgrößen x_i zusammenhängt.

Eine obere Grenze für den Gesamtfehler (Größtfehler) Δf infolge der Fehler aller Variablen Δx_i erhält man, wenn man die Absolutbeträge der Einzehlfehler addieren (siehe Trautwein S. 390):

$$\Delta f = \left|\frac{\partial f}{\partial x_1}\Delta x_1\right| + \left|\frac{\partial f}{\partial x_2}\Delta x_2\right| + \ldots + \left|\frac{\partial f}{\partial x_n}\Delta x_n\right|$$

wobei $\left|\frac{\partial f}{\partial x_i}\Delta x_i\right|$ die partiellen Ableitungen der Funktion $f(x_1, x_2, x_3, ...)$ nach der Variable x_i sind.

Ableitungen und Differentialquotienten siehe Trautwein S. 397-399, Hellenthal S. 334-337,

Beispiel 1:

$z = x^2 / y + d = x^2 \; y^{-1} + d \;\Rightarrow x$, y und d direkt gemessen mit den Fehlern Δx, Δy und Δd

- Berechnung der Ableitungen $\quad \frac{\partial z}{\partial x} = 2x/y \qquad \frac{\partial z}{\partial y} = (-1)x^2/y^2 \qquad \frac{\partial z}{\partial d} = 1$

- Gesamtfehler

$$\Delta z = |2x/y\,\Delta x| + |x^2/y^2\,\Delta y| + |\Delta d|$$