Tipler-Mosca

16. Überlagerung und stehende Wellen (Superposition, standing waves)

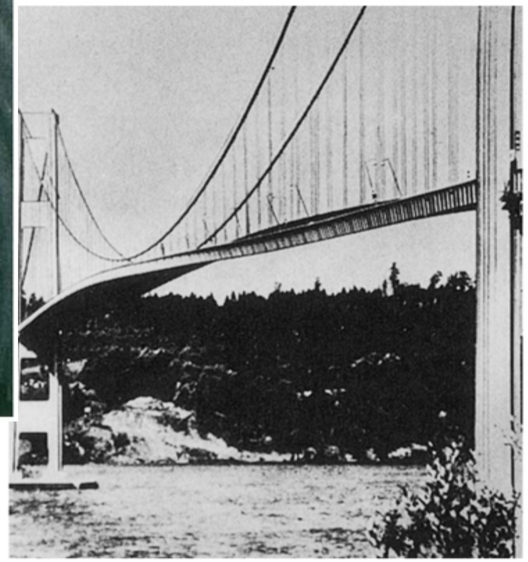
16.1 Überlagerung von Wellen (Superposition of waves)

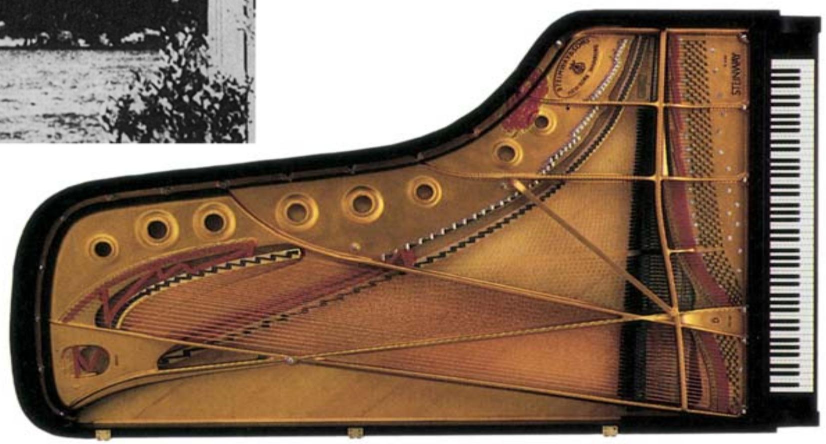
16.2 Stehende Wellen (Standing waves)

16.3 Überlagerung von stehenden Wellen (The superposition of standing waves)

16.4 Harmonische Analyse und Synthese (Harmonic analysis and synthesis)

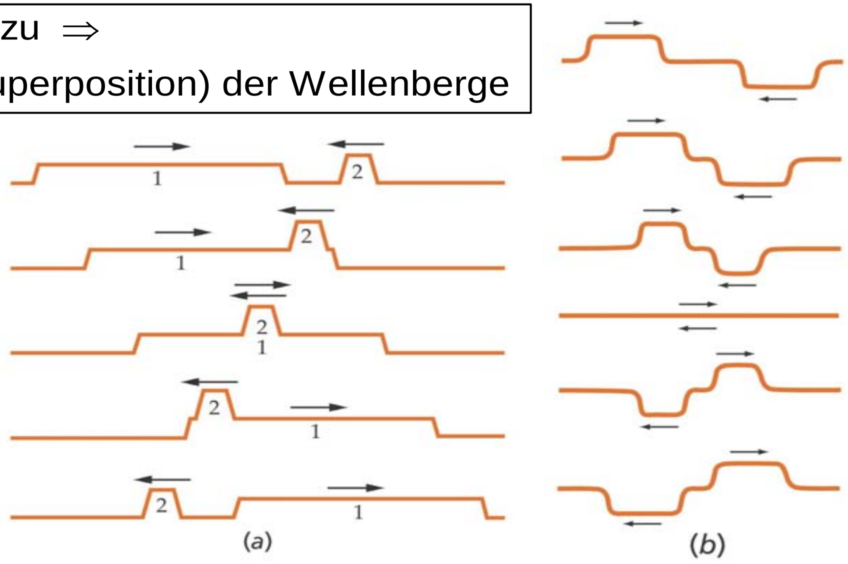
16.5 Wellenpakete und Dispersion (Wavepackets and dispersion)





16.1 Überlagerung von Wellen (Superposition of waves)

Zwei Wellenberge bewegen sich aufeinander zu $\Rightarrow$
Resultierende Form aus der Überlagerung (Superposition) der Wellenberge



When two or more waves overlap, the resultant wave is the algebraic sum of the individual waves.

PRINCIPLE OF SUPERPOSITION

Die Wellenfunktion der resultierenden Welle ergibt sich
als algebraische Summe der einzelnen Wellenfunktionen.

Superposition ist charakteristisch für Wellenbewegungen.
Bei der Bewegung von Teilchen nach den Newton'schen Axiomen kommt Superposition nicht vor.

Superposition und Wellengleichung

Wellengleichung Gl. (15.9b): $\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} = \frac{1}{v^2}\frac{\partial^2 y}{\partial t^2}$

Das Superpositionsprinzip folgt aus der Linearität der Wellengleichung, d.h. die Wellenfunktion $y(x,t)$ und ihre Ableitungen sind lineare Glieder $\Rightarrow$

Kennzeichen einer linearen Gleichung: wenn y_1 und y_2 Lösungen der Wellengleichung sind, dann ist $y_3 = C_1 y_1 + C_2 y_2$ auch Lösung derselben Gleichung, wobei C_1 und C_2 beliebige Konstanten.

Beispiel 16.1: Superposition und Wellengleichung

Zu zeigen: wenn y_1 und y_2 Lösungen der Wellengleichung $\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} = \frac{1}{v^2}\frac{\partial^2 y}{\partial t^2}$, dann $y_3 = C_1 y_1 + C_2 y_2$ auch Lösung der Wellengleichung:

mit $\frac{\partial^2 y_3}{\partial x^2} = \frac{\partial^2}{\partial x^2}\left(C_1 y_1 + C_2 y_2\right) = C_1 \frac{\partial^2 y_1}{\partial x^2} + C_2 \frac{\partial^2 y_2}{\partial x^2}$

und durch die Vorgabe, daß $\frac{\partial^2 y_1}{\partial x^2} = \frac{1}{v^2}\frac{\partial^2 y_1}{\partial t^2}$ und $\frac{\partial^2 y_2}{\partial x^2} = \frac{1}{v^2}\frac{\partial^2 y_2}{\partial t^2}$ $\Rightarrow$

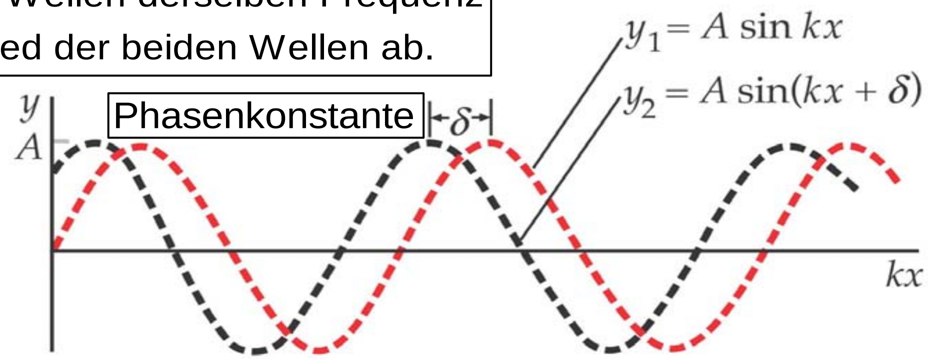
$$\frac{\partial^2 y_3}{\partial x^2} = C_1 \frac{1}{v^2}\frac{\partial^2 y_1}{\partial t^2} + C_2 \frac{1}{v^2}\frac{\partial^2 y_2}{\partial t^2} = \frac{1}{v^2}\left(C_1 \frac{\partial^2 y_1}{\partial t^2} + C_2 \frac{\partial^2 y_2}{\partial t^2}\right) = \frac{1}{v^2}\left(\frac{\partial^2 C_1 y_1}{\partial t^2} + \frac{\partial^2 C_2 y_2}{\partial t^2}\right) = \frac{1}{v^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}\left(C_1 y_1 + C_2 y_2\right) \quad \Rightarrow$$

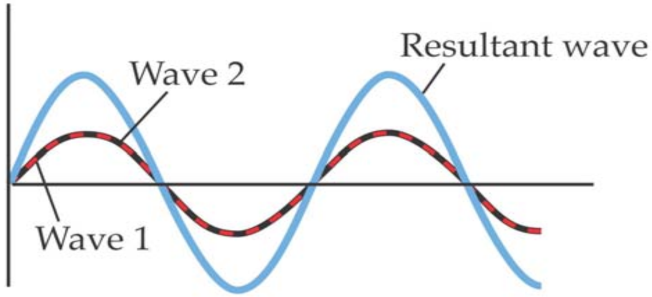
$$\frac{\partial^2 y_3}{\partial x^2} = \frac{1}{v^2}\frac{\partial^2 y_3}{\partial t^2}$$

Interferenz von harmonischen Wellen

Das Ergebnis der Superposition von zwei harmonischen Wellen derselben Frequenz hängt von der Phasendifferenz bzw. vom Gangunterschied der beiden Wellen ab.

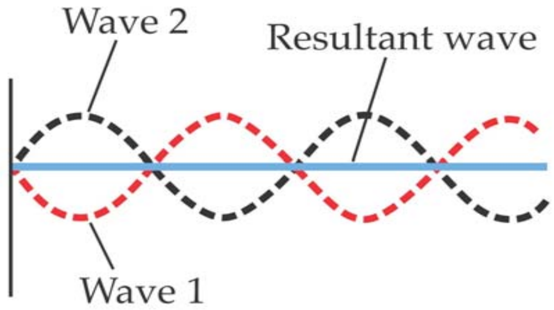
1. Harmonische Welle $y_1 = A\sin(kx - \omega t)$ mit
A Amplitude, k Wellenzahl, ω Kreisfrequenz
$kx - \omega t$ Phase,
2. Harmonische Welle $y_2 = A\sin(kx - \omega t + \delta)$ mit
δ Phasenkonstante





$\delta = 0 \quad \Rightarrow \quad \Delta x = 0 \quad \Rightarrow$
konstruktive Interferenz

$\delta = \pi \quad \Rightarrow \quad \Delta x = \lambda/2 \quad \Rightarrow$
destruktive Interferenz



An einem bestimmten Ort x $\Rightarrow$ Phasendifferenz der beiden Wellen:
$(kx - \omega t_1) - (kx - \omega t_2 + \delta) = \omega(t_2 - t_1) - \delta = -\omega\Delta t - \delta \quad \Rightarrow$ Zweite Welle hat gleiche Auslenkung wie die erste Welle wenn $-\omega\Delta t - \delta = 0 \quad \Rightarrow \quad \Delta t = -\delta/\omega = -T\,\delta/(2\pi)$.

An einem bestimmten Zeitpunkt t $\Rightarrow$ Phasendifferenz der beiden Wellen:
$(kx_1 - \omega t) - (kx_2 - \omega t + \delta) = k(x_1 - x_2) - \delta = k\Delta x - \delta \quad \Rightarrow$ Zweite Welle hat gleiche Auslenkung wie die erste Welle wenn $k\Delta x - \delta = 0 \quad \Rightarrow$ Gangunterschied $\Delta x = \delta/k = \lambda\,\delta/(2\pi)$.

Aus der Überlagerung resultierende Welle: $y_3 = y_1 + y_2 = A\sin(kx - \omega t) + A\sin(kx - \omega t + \delta) \quad \Rightarrow$

mit $\sin\theta_1 + \sin\theta_2 = 2\sin\left[\frac{1}{2}(\theta_1 + \theta_2)\right]\cos\left[\frac{1}{2}(\theta_1 - \theta_2)\right] \quad \Rightarrow \quad y_3 = y_1 + y_2 = 2A\sin\left(kx - \omega t + \frac{\delta}{2}\right)\cos\left(-\frac{\delta}{2}\right) \quad \Rightarrow$

mit $\cos\left(-\frac{\delta}{2}\right) = \cos\left(\frac{\delta}{2}\right) \quad \Rightarrow \quad y_3 = y_1 + y_2 = 2A\cos\left(\frac{\delta}{2}\right)\sin\left(kx - \omega t + \frac{\delta}{2}\right)$

$$y_1 + y_2 = [2A \cos \tfrac{1}{2}\delta] \sin(kx - \omega t + \tfrac{1}{2}\delta) \qquad 16\text{-}6$$

SUPERPOSITION OF TWO WAVES OF THE SAME AMPLITUDE AND FREQUENCY

Die resultierende Welle ist wieder eine harmonische Welle mit gleichem k und ω

Das resultierende räumliche Intensitätsmuster nennt man Interferenz:

bei $\delta = 0 \Rightarrow \cos\left(\frac{1}{2}\delta\right) = 1 \Rightarrow y_1 + y_2 = 2A\sin(kx - \omega t) \Rightarrow$ konstruktive Interferenz

bei $\delta = \pi \Rightarrow \cos\left(\frac{1}{2}\delta\right) = 0 \Rightarrow y_1 + y_2 = 0 \Rightarrow$ destruktive Interferenz

Schwebungen

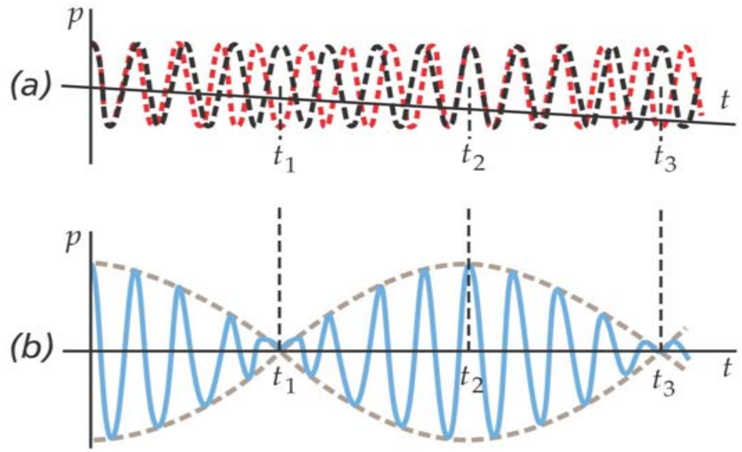
Bei der Überlagerung von zwei Wellen, deren Frequenz sich leicht unterscheidet, tritt Schwebung auf. Die Frequenz dieser periodischen Erscheinung nennt man Schwebungsfrequenz:

sei $y_1 = A\sin(k_1 x - \omega_1 t)$ und $y_2 = A\sin(k_2 x - \omega_2 t) \Rightarrow y_1 + y_2 = A\sin(k_1 x - \omega_1 t) + A\sin(k_2 x - \omega_2 t) \Rightarrow$

$$y_1 + y_2 = 2A\sin\left[\frac{1}{2}(k_1 + k_2)x - \frac{1}{2}(\omega_1 + \omega_2)t\right]\cos\left[\frac{1}{2}(k_1 - k_2)x - \frac{1}{2}(\omega_1 - \omega_2)t\right] \Rightarrow$$

mit $\langle k \rangle = \frac{1}{2}(k_1 + k_2) \quad \langle \omega \rangle = \frac{1}{2}(\omega_1 + \omega_2) \quad \Delta k = k_1 - k_2 \quad \Delta\omega = \omega_1 - \omega_2 \Rightarrow$

$$y_1 + y_2 = 2A\cos\left(\frac{1}{2}\Delta k x - \frac{1}{2}\Delta\omega t\right)\sin\left(\langle k \rangle x - \langle \omega \rangle t\right)$$



Intensität $\sim (y_1 + y_2)^2 \Rightarrow$ wegen $\cos^2\theta = \frac{1}{2}(1 + \cos 2\theta) \Rightarrow$

Intensität $\sim 2A^2\left[1 + \cos(\Delta k x - \Delta\omega t)\right]$

$$f_{\text{beat}} = \Delta f \qquad 16\text{-}8$$

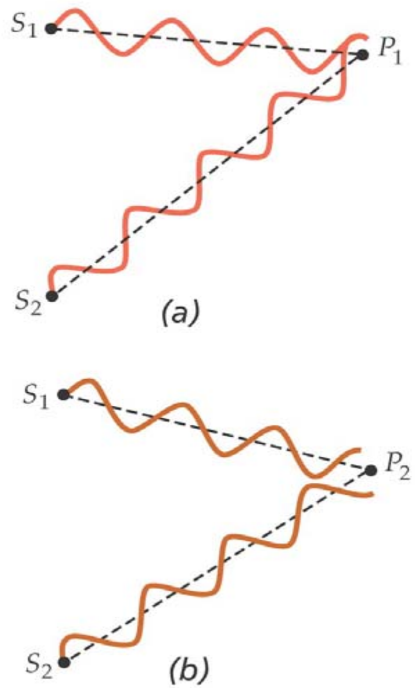
BEAT FREQUENCY

Beispiel 16.2: Stimmen einer Gitarre

Stimmgabel mit Kammerton a (440 Hz) und a-Saite der Gitarre angeschlagen $\Rightarrow$
3 Schwebungen pro Sekunde $\Rightarrow$ Frequenz der Saite entweder 437 oder 443 Hz.
Gitarrensaite etwas fester gespannt $\Rightarrow$ Zunahme auf 6 Schwebungen pro Sekunde $\Rightarrow$
ursprüngliche Frequenz der Gitarrensaite $\nu = \nu_a + 3$ Hz = 443 Hz

Zusammenhang zwischen Phasendifferenz und Gangunterschied

Häufiger Grund für Phasendifferenz zwischen Wellen ist eine unterschiedliche Entfernung zwischen den Quellen S_1 und S_2 und dem Interferenzpunkt P_1 bzw. P_2 $\Rightarrow$
Differenz dieser Entfernungen = Wegunterschied oder Gangunterschied $\Rightarrow$
wenn Gangunterschied = ganzzahliges Vielfaches von λ $\Rightarrow$ konstruktive Interferenz,
wenn Gangunterschied = ungeradzahliges Vielfaches von λ $\Rightarrow$ destruktive Interferenz



Zwei Wellen $y_1 = A\sin(kx_1 - \omega t)$ und $y_2 = A\sin(kx_2 - \omega t)$ $\Rightarrow$
Phasendifferenz δ der beiden Wellenfunktionen:

$$\delta = (kx_2 - \omega t) - (kx_1 - \omega t) = k(x_2 - x_1) = k\Delta x = \frac{2\pi}{\lambda}\Delta x$$

$$\delta = k\Delta x = 2\pi\frac{\Delta x}{\lambda} \qquad 16\text{-}9$$

PHASE DIFFERENCE DUE TO PATH DIFFERENCE

Beispiel 16.3: Resultierende Schallwelle

Zwei Schallquellen S_1 und S_2 schwingen in Phase. Druckamplitude jeder einzelnen Welle sei p_{max}.

Entfernungen $\overline{S_1P} = 5.00\text{ m}$, $\overline{S_2P} = 5.17\text{ m}$ $\Rightarrow$ gesucht Amplitude der resultierenden Welle:

Mit Gl. (16.6) $A_{res} = 2p_{max}\cos\left(\frac{1}{2}\delta\right)$, Gl. (16.9) $\delta = 2\pi\frac{\Delta x}{\lambda}$, und $v = \lambda\nu = 340\text{ m s}^{-1}$ $\Rightarrow$

Teil a) $\nu = 1000\text{ Hz}$ $\Rightarrow$ $\lambda = v/\nu = \left(340\text{ m s}^{-1}\right)/\left(1000\text{ Hz}\right) = 0.34\text{ m}$ $\Rightarrow$

$$\delta = 2\pi\frac{\Delta x}{\lambda} = 2\pi\frac{(0.17\text{ m})}{(0.34\text{ m})} = \pi \quad \text{und somit} \quad A_{res} = 2p_{max}\cos\left(\frac{1}{2}\delta\right) = 2p_{max}\cos\left(\frac{1}{2}\pi\right) = 0$$

Teil b) $\nu = 2000\text{ Hz}$ $\Rightarrow$ $\lambda = v/\nu = \left(340\text{ m s}^{-1}\right)/\left(2000\text{ Hz}\right) = 0.17\text{ m}$ $\Rightarrow$

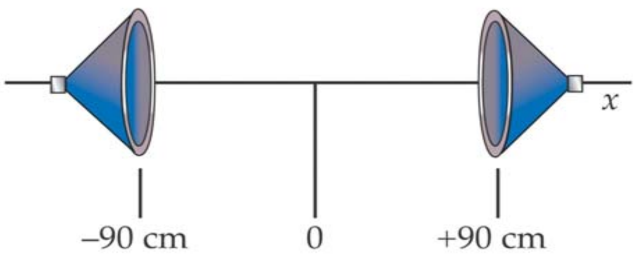
$$\delta = 2\pi\frac{\Delta x}{\lambda} = 2\pi\frac{(0.17\text{ m})}{(0.17\text{ m})} = 2\pi \quad \text{und somit} \quad A_{res} = 2p_{max}\cos\left(\frac{1}{2}\delta\right) = 2p_{max}\cos(\pi) = -2p_{max}$$

Teil c) $\nu = 5000\text{ Hz}$ $\Rightarrow$ $\lambda = v/\nu = \left(340\text{ m s}^{-1}\right)/\left(500\text{ Hz}\right) = 0.68\text{ m}$ $\Rightarrow$

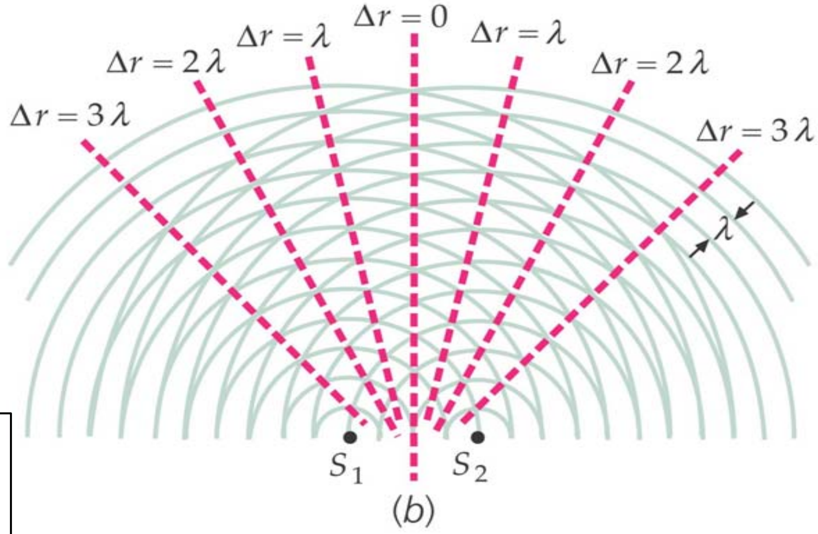
$$\delta = 2\pi\frac{\Delta x}{\lambda} = 2\pi\frac{(0.17\text{ m})}{(0.68\text{ m})} = \frac{\pi}{2} \quad \text{und somit} \quad A_{res} = 2p_{max}\cos\left(\frac{1}{2}\delta\right) = 2p_{max}\cos\left(\frac{\pi}{4}\right) = \sqrt{2}p_{max}$$

Beispiel 16.4: Schallstärke aus zwei Lautsprechern

möglicher Prüfungsbeispiel



Wellenmuster erzeugt durch zwei dicht beieinander liegende Stifte, die sich gleichphasig auf- und abbewegen

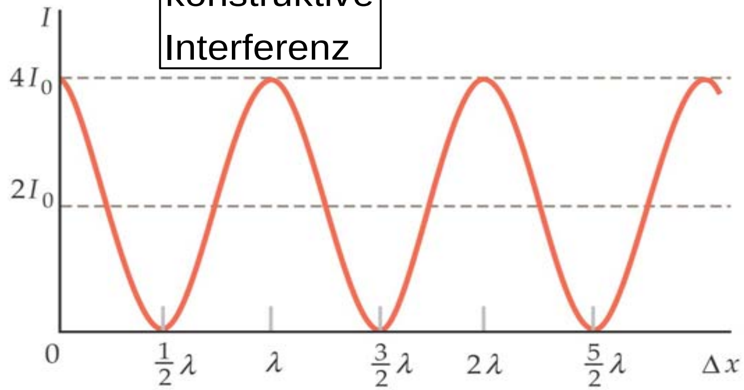


$$A_{\text{res}} = 2A\cos\left(\frac{1}{2}\delta\right) \quad \text{und} \quad \delta = 2\pi\frac{\Delta r}{\lambda}$$

für $\Delta r = n\lambda$ mit $n = 0,1,2...$ $\Rightarrow$ konstruktive Interferenz

für $\Delta r = (2n+1)\dfrac{\lambda}{2}$ mit $n = 0,1,2...$ $\Rightarrow$ destruktive Interferenz

konstruktive Interferenz



Intensität der Welle resultierend aus der Überlagerung von zwei gleichphasigen Wellen mit der jeweiligen Amplitude A_0

mittlere Intensität

destruktive Interferenz

Kohärenz

Zwei Quellen heißen kohärent, wenn die Phasendifferenz der Quellen konstant bleibt.
Zwei Quellen heißen inkohärent, wenn die Phasendifferenz der Quellen zufällig verteilt variiert.

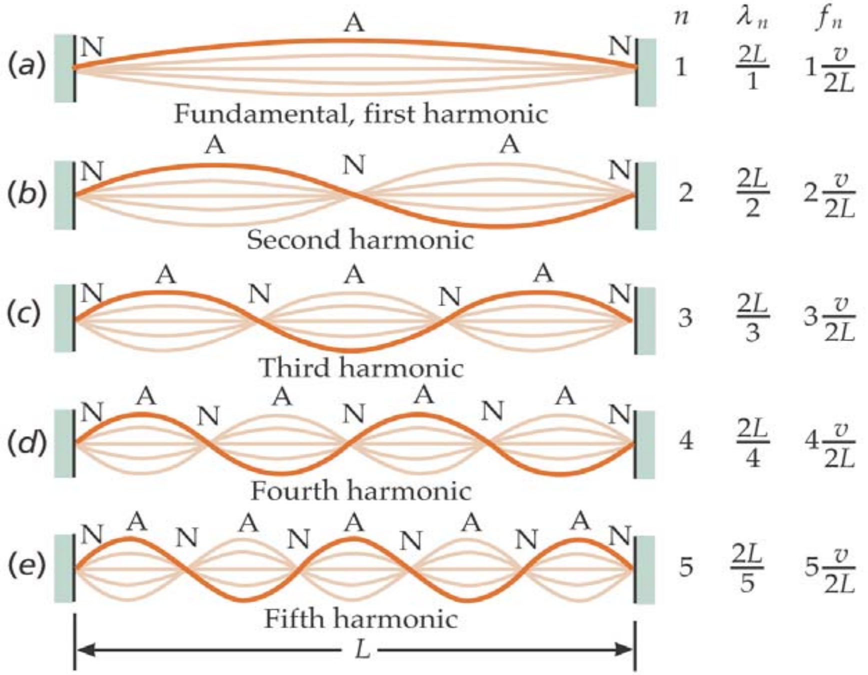
16.2 Stehende Wellen (Standing waves)

Bei Ausbreitung von Wellen nur in einem bestimmten räumlich begrenzten Gebiet $\Rightarrow$ an beiden Enden des Gebietes treten Reflexionen auf $\Rightarrow$ Überlagerung gemäß des Superpositionsprinzips $\Rightarrow$ In Abhängigkeit von der Länge des Gebietes gibt es bestimmte Frequenzen, für die die Überlagerung zu einem stationären Schwingungsmuster führt $\Rightarrow$ stationäre Wellen

Stehende Seilwellen: beidseitig eingespannte Saiten

N Schwingungsknoten (node)

A Schwingungsbauch (anti-node)



Bedingung für stehende Wellen für eine beidseitig eingespannte Saite

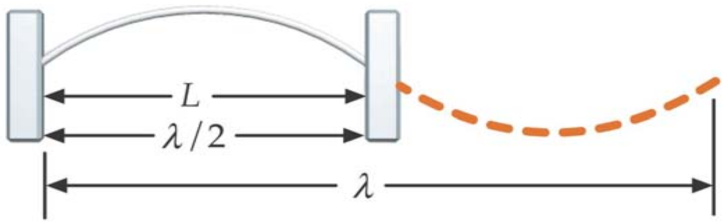
$$L = n\frac{\lambda_n}{2}, \qquad n = 1, 2, 3, \ldots \qquad \text{16-10}$$

STANDING-WAVE CONDITION, BOTH ENDS FIXED

aus $v = f\lambda \quad \Rightarrow \quad f = \dfrac{v}{\lambda} \quad \Rightarrow$ mit $\lambda_n = \dfrac{2L}{n} \quad \Rightarrow$

$$f_n = n\frac{v}{2L} = nf_1 \qquad n = 1, 2, 3, \ldots \qquad \text{16-11}$$

RESONANCE FREQUENCIES, BOTH ENDS FIXED

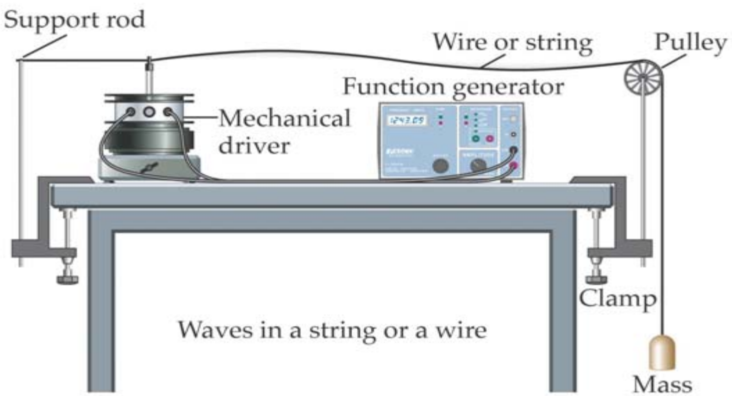


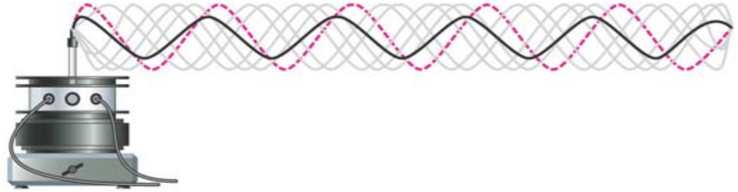
Jede Resonanzfrequenz und ihre zugehörige Wellenfunktion nennt man Schwingungsmode.
Die Menge aller Resonanzfrequenzen nennt man das Resonanzspektrum.

You shouldn't bother to memorize Equation 16-11. Just sketch Figure 16-10 to remind yourself of the standing-wave condition, $\lambda_n = 2L/n$, and then use $v = f_n\lambda_n$.

PROBLEM-SOLVING GUIDELINE

Versuchsaufbau zur Erzeugung stehender Seilwellen





Frequenz des Vibrators ist nicht in Resonanz mit einer der Eigenfrequenzen der Saite $\Rightarrow$ keine Amplitudenüberhöhung

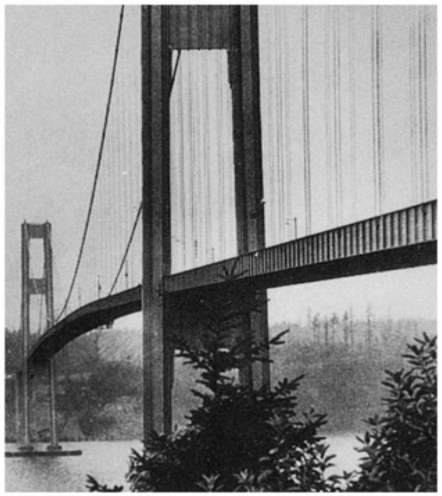
Frequenz des Vibrators ist in Resonanz mit einer der Eigenfrequenzen der Saite $\Rightarrow$ Amplitudenüberhöhung

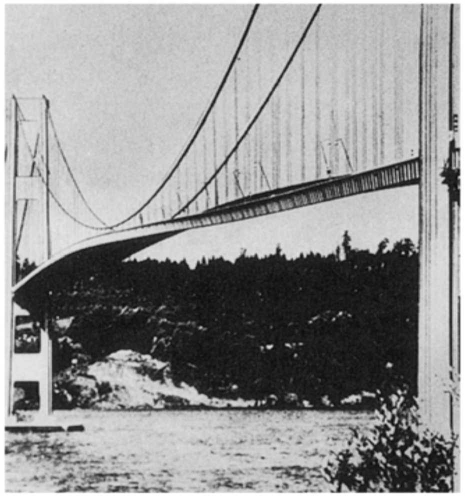
Der Vibrator ist in Resonanz mit der Saite, wenn die Zeit, die der erste Wellenberg für die Ausbreitung über die Strecke $2L$ benötigt, genau das n-fache (n ganzzahlig) der Periode T des Vibrators beträgt $\Rightarrow$

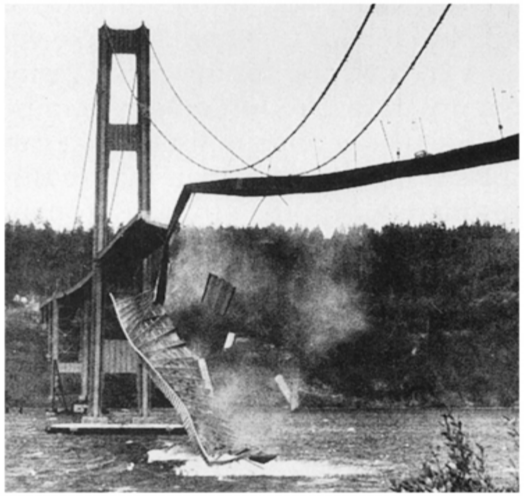
$$\frac{2L}{v} = nT \quad \Rightarrow \quad f = \frac{1}{T} = n\frac{v}{2L}$$

Einsturz der Hängebrücke von Tacoma Narrows (1940)

http://www.enm.bris.ac.uk/anm/tacoma/tacoma.html







Beispiel 16.5: Stimmen einer Saite

Saite $L = 0.7$ m, beidseitig eingespannt, Grundfrequenz Kammerton a (440 Hz),
gesucht Geschwindigkeit der Transversalwelle:
Aus $v = \lambda f$ und Grundschwingung $\lambda = 2L \quad \Rightarrow \quad v = \lambda f = 2Lf = 2\left(0.7 \text{ m}\right)\left(440 \text{ Hz}\right) = 616 \text{ m s}^{-1}$

Übung: sei $v = 200 \text{ m s}^{-1}$ und $L = 5$ m $\Rightarrow$ Grundschwingung $\lambda = 2L \quad \Rightarrow \quad f = \dfrac{v}{\lambda} = 20$ Hz,
zweite Harmonische $\lambda = L \quad \Rightarrow \quad f = \dfrac{v}{\lambda} = 40$ Hz, dritte Harmonische $\lambda = \dfrac{2}{3}L \quad \Rightarrow \quad f = \dfrac{v}{\lambda} = 60$ Hz

Beispiel 16.6: Testen von Klavierdraht

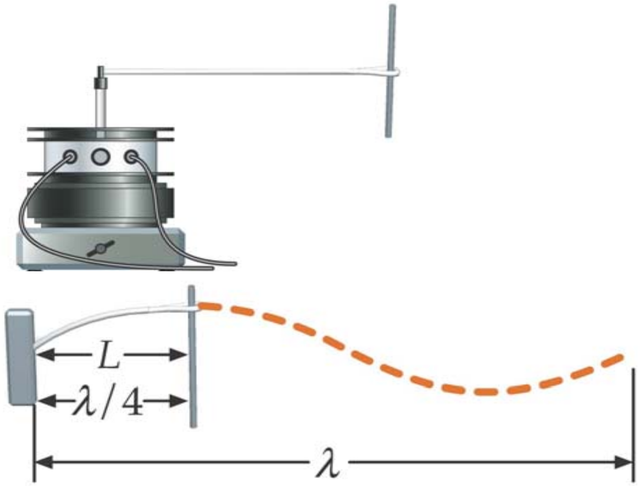
mögliches Prüfungsbeispiel

Stehende Seilwellen: Saiten mit nur einem fest eingespannten Ende

Am losen Ende bildet sich ein Schwingungsbauch.

Da die Entfernung von einem Knoten zum benachbarten Bauch $\frac{1}{4}\lambda$ ausmacht $\Rightarrow$

Grundschwingung bei $\lambda_1 = 4L$ bzw. $L = \frac{\lambda_1}{4}$

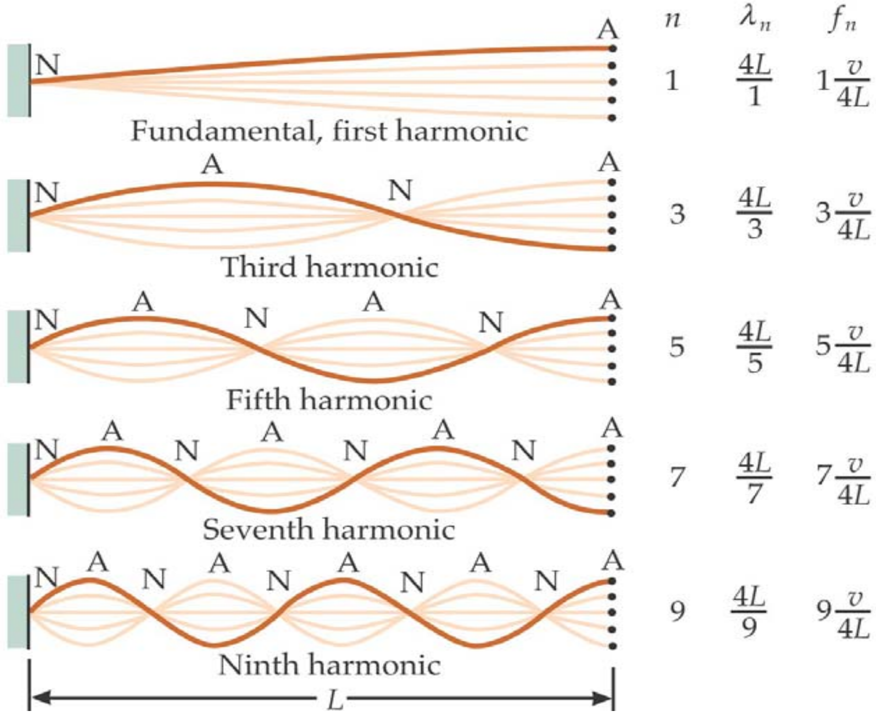


$$L = n\frac{\lambda_n}{4}, \qquad n = 1, 3, 5, \ldots \qquad \text{16-12}$$

STANDING-WAVE CONDITION, ONE END FREE

$$f_n = \frac{v}{\lambda_n} = n\frac{v}{4L} = nf_1, \qquad n = 1, 3, 5, \ldots \qquad \text{16-13}$$

RESONANCE FREQUENCIES, ONE END FREE



Again, an easy way to remember the resonance frequencies given by Equation 16-13 is to sketch Figure 16-16 to remind yourself of the standing-wave condition and use $v = f_n\lambda_n$

PROBLEM-SOLVING GUIDELINE

Wellenfunktionen für stehende Wellen

Wenn eine Saite in der n-ten Schwingungsmode schwingt, bewegt sich jeder Punkt auf der Saite gemäß einer einfachen harmonischen Bewegung:
Die Wellenfunktion für eine stehende Welle in der n-ten Harmonischen hat die Form
$y_n(x,t) = A_n \sin(k_n x)\cos(\omega_n t + \delta_n)$

1. Each point on the string either remains at rest or oscillates in simple harmonic motion. (Those points remaining at rest are at nodes.)
2. The motions of any two points on the string not at nodes oscillate either in phase or 180° out of phase.

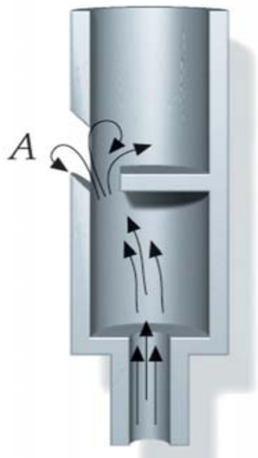
NECESSARY CONDITIONS FOR A STANDING WAVE MOTION ON A LENGTH OF STRING

Stehende Schallwellen

Orgelpfeifen sind bekannte Beispiele für die Verwendung von stehenden Wellen in Luftsäulen.

Man kann sich eine Schallwelle entweder als Druckwelle oder als Bewegungswelle vorstellen (siehe Teil 15 Harmonische Schallwellen). Druckveränderung und Auslenkungen sind um 90° gegeneinander phasenverschoben $\Rightarrow$
in einer stehenden Schallwelle: Druckknoten = Auslenkungsbäuche (und umgekehrt) $\Rightarrow$
in der Nähe des offenen Endes einer Pfeife: Auslenkungsbauch bzw. Druckknoten,
in der Nähe des geschlossenen Endes einer gedackten Pfeife (an einem Ende offen, am anderen geschlossen): Auslenkungsknoten bzw. Druckbauch

In realen Pfeifen liegt der Druckknoten etwas außerhalb des offenen Rohrendes $\Rightarrow$
effektive Länge der Pfeife $L_{\text{eff}} = L + \Delta L$ wobei ΔL Korrekturwert $\approx$ Pfeinfendurchmesser



Schema einer Labialpfeife,
Schwingungsknoten in der Nähe von A

Beispiel 16.8: Stehende Schallwelle in einer Luftsäule I

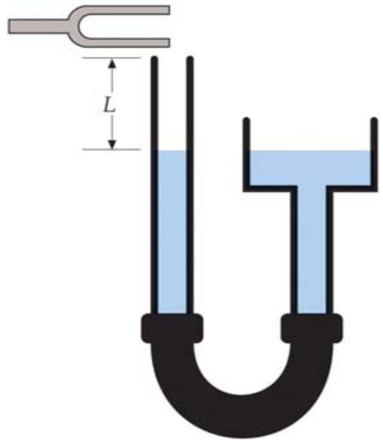
Schallgeschwindigkeit in Luft $v = \lambda \nu = 340 \text{ m s}^{-1}$, beidseitig offene Orgelpfeife mit $L_{\text{eff}} = 1\text{ m}$,
gesucht Frequenzen und Wellenlängen der stehenden Wellen:
beidseitig offenes Ende $\Rightarrow$ Auslenkungsbauch $\Rightarrow$ Druckknoten $\Rightarrow$
Länge der Pfeife ganzzahliges Vielfache der halben Wellenlänge $\Rightarrow$

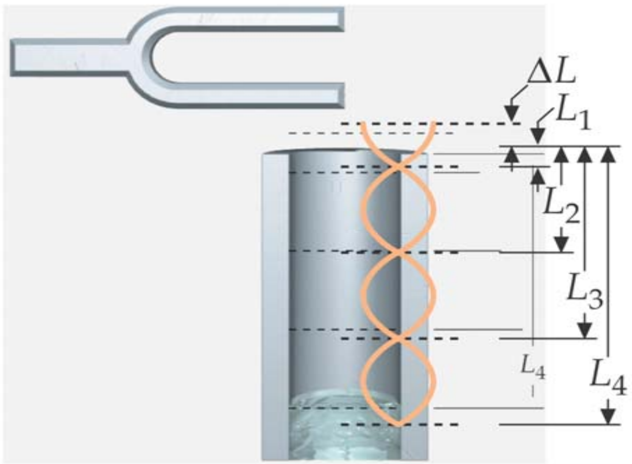
Grundschwingung $L_{\text{eff}} = \dfrac{\lambda_1}{2} \quad \Rightarrow \quad \lambda_1 = 2L_{\text{eff}} = 2 \text{ m} \quad \Rightarrow \quad \nu_1 = \dfrac{v}{\lambda_1} = 170 \text{ Hz}$

Oberschwingungen $\nu_n = n\nu_1 = n(170 \text{ Hz}) \quad \Rightarrow \lambda_n = \dfrac{v}{\nu_n} = \dfrac{v}{n\nu_1} = \dfrac{\lambda_1}{n}$

Beispiel 16.9: Stehende Schallwelle in einer Luftsäule II

mögliches Prüfungsbeispiel

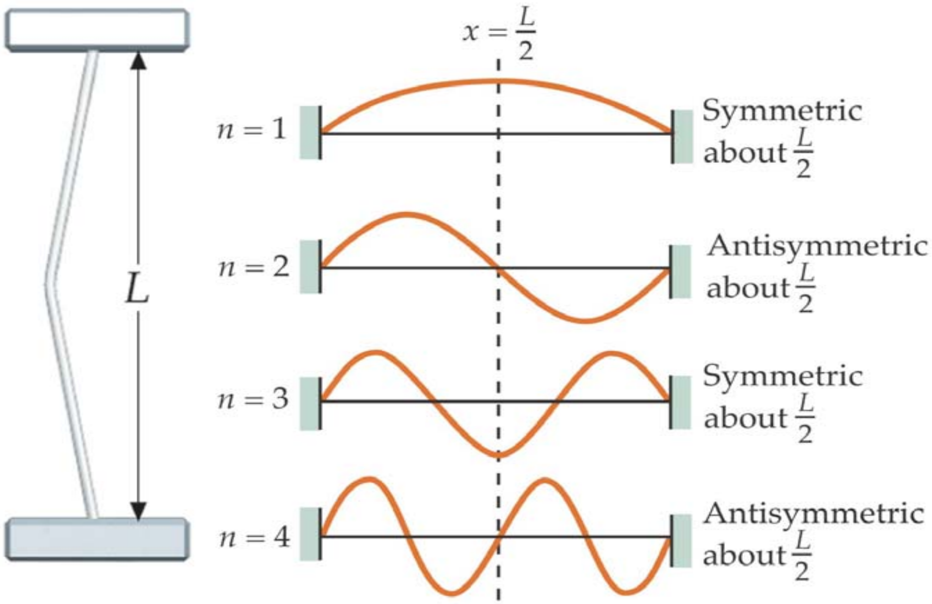




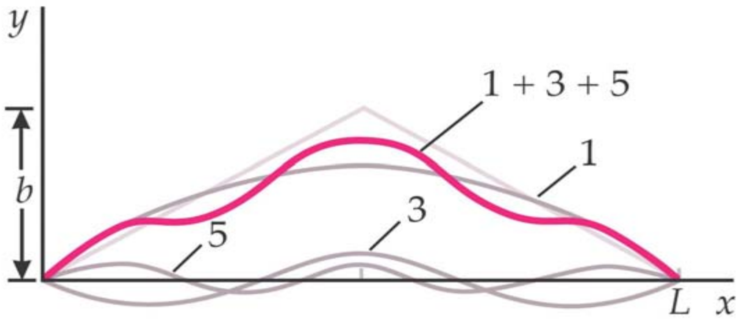
16.3 Überlagerung von stehenden Wellen (The superposition of standing waves)

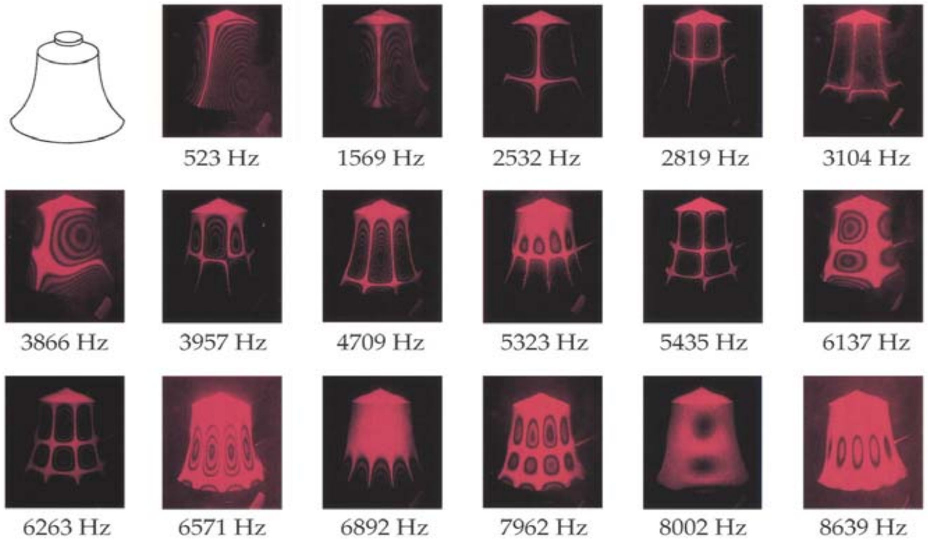
Im Allgemeinen ist die Schwingung eines schwingungsfähigen Systems eine Überlagerung von Grundschwingung und Oberwellen:

$$y(x,t) = \sum_n A_n \sin(k_n x)\cos(\omega_n t + \delta_n)$$

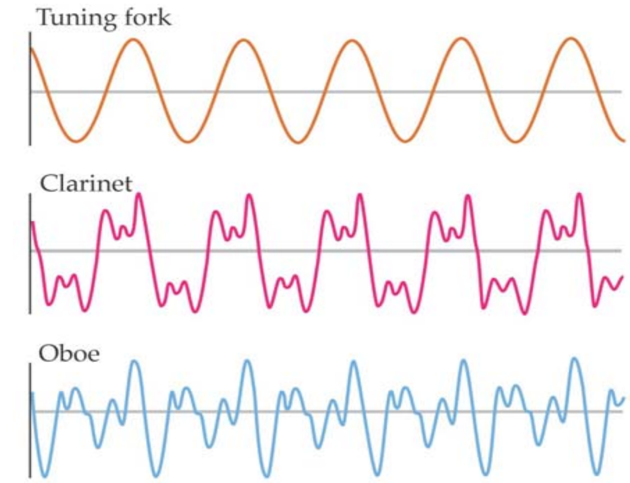


Eine in der Mitte gezupfte Saite





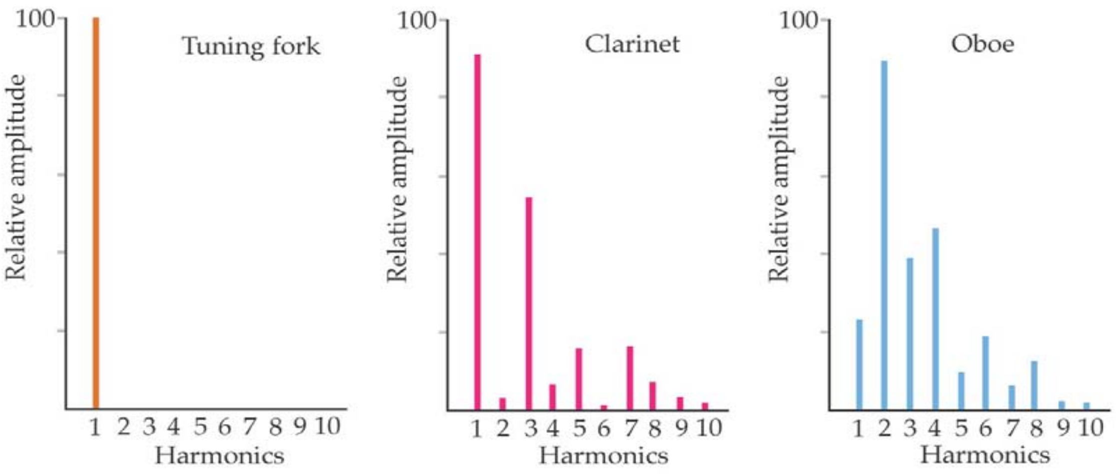
16.4 Harmonische Analyse und Synthese (Harmonic analysis and synthesis)



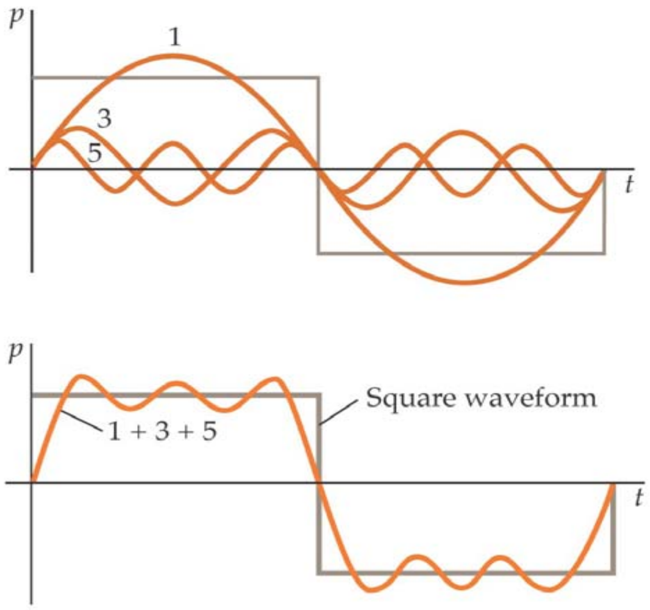
Physikalische Akustik:
Ton: sinusförmige Schallwelle im Hörbereich
Klang: periodische Schallwelle im Hörbereich zusammengesetzt aus Grund- und Obertönen
Geräusch: nichtperiodische Schallwellen

Wellenformen sind aus Harmonischen zusammengesetzt.
Harmonische Analyse oder Fourier-Analyse: Bestimmung der Anteile der einzelnen Harmonischen in einer Wellenform $\Rightarrow$ Fourier-Spektrum

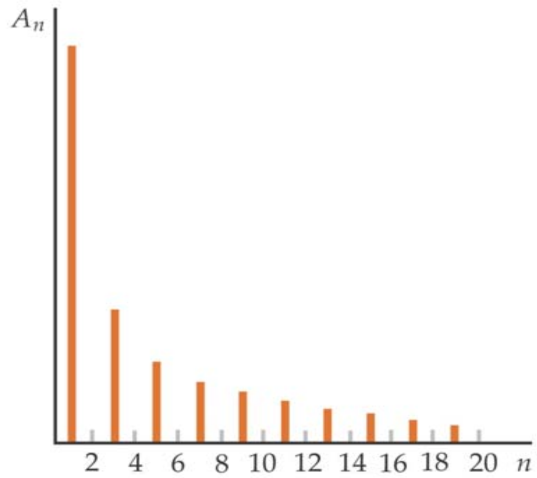
Wellenformen einer Stimmgabel, einer Klarinette, und einer Oboe: Grundschwingung bei 440 Hz und ungefähr gleiche Intensität $\Rightarrow$ selbe Tonhöhe, unterschiedliche Klangfarbe



Fourier-Spektren der obigen Wellenformen:
Relative Intensitäten der Harmonischen zu den Wellenformen



Gegenstück zur harmonischen Analyse ist die harmonische Synthese oder Fourier-Synthese: Konstruktion einer periodischen Wellenform aus ihren harmonischen Anteilen



16.5 Wellenpakete und Dispersion (Wavepackets and dispersion)

Nichtperiodische Funktionen wie Wellenpulse können durch die Überlagerung einer Gruppe von harmonischen Wellen verschiedener Frequenzen dargestellt werden: Wellenpaket.

Allgemein gilt $\Delta t \Delta\omega \sim 1$ wobei

Δt Dauer eines Pulses

$\Delta\omega$ Verteilung der Frequenzen innerhalb des Wellenpakets $\Rightarrow$

je kürzer der Puls, umso breiter die Verteilung (Bandbreite);

je kürzer der Puls, umso geringer seine räumliche Breite $\Delta x = v\Delta t \quad \Rightarrow$

wegen $k = \dfrac{\omega}{v} \quad \Rightarrow \quad \Delta k = \dfrac{\Delta\omega}{v} \quad \Rightarrow \quad \Delta\omega = v\Delta k \quad \Rightarrow \quad \Delta t\Delta\omega \sim 1 \sim \Delta x \Delta k$

Wenn ein Wellenpaket bei der Ausbreitung seine Form beibehält $\Rightarrow$
Ausbreitungsgeschwindigkeit einer Welle unabhängig von der Wellenlänge bzw. von der Frequenz $\Rightarrow$
nichtdispersives Medium

Wenn die Ausbreitungsgeschwindigkeit von Wellen in einem Medium von der Frequenz bzw. von der Wellenlänge der Wellen abhängt $\Rightarrow$ dispersives Medium $\Rightarrow$ Wellenpaket ändert seine Form, d.h. es verbreitet sich (fließt auseinander).

Gruppengeschwindigkeit: Geschwindigkeit, mit der sich der Schwerpunkt des gesamten Wellenpaketes fortbewegt,
Phasengeschwindigkeit: Geschwindigkeit der einzelnen harmonischen Wellen,
dispersives Medium: Gruppengeschwindigkeit $\neq$ Phasengeschwindigkeit

Gruppengeschwindigkeit: jene Geschwindigkeit, mit der Energie oder Information übertragen wird,
Gruppengeschwindigkeit $\leq$ Lichtgeschwindigkeit

Alonso-Finn

28. Wellenbewegung