

# SCHWINGUNGEN UND WELLEN

## Tipler-Mosca 15. Ausbreitung von Wellen (Traveling Waves)

15.1 Einfache Wellenbewegungen (Simple wave motion)

15.2 Periodische Wellen, harmonische Wellen (Periodic waves)

15.3 Wellen in drei Dimensionen (Waves in three dimensions)

15.4 Wellenasubreuung an Hindernissen (Waves encountering barriers)

15.5 Der Doppler-Effekt (The Doppler effect)



Wellen transportieren Energie und Impuls durch den Raum ohne Transport von Materie.

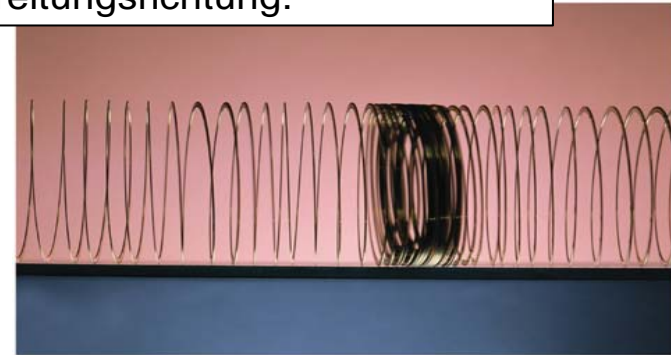
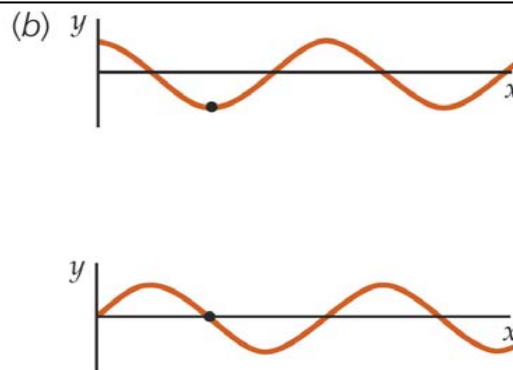
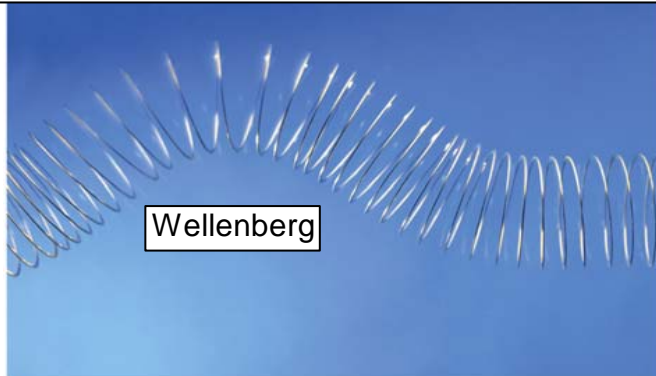


### 15.1 Einfache Wellenbewegungen (Simple wave motion)

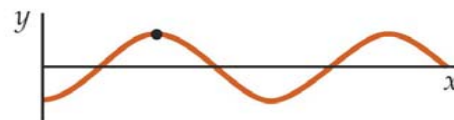
Eine mechanische Welle wird durch eine Störung in einem Medium erzeugt.

#### Transversale und longitudinale Wellen

Eine Welle, bei der die Störung senkrecht zur Ausbreitungsrichtung erfolgt, heißt transversale Welle. Bei der longitudinalen Welle erfolgt die Störung des Mediums in Ausbreitungsrichtung.



Die Geschwindigkeit, mit der sich der Wellenberg sich ausbreitet, wird Ausbreitungsgeschwindigkeit der Welle genannt. Sie hängt von der Materialspannung und den Materialeigenschaften der Feder ab.



#### Wellenberge

Mit dem Wellenberg mitbewegtes

Bezugssystem:  $x' = x - vt$   $y' = y$

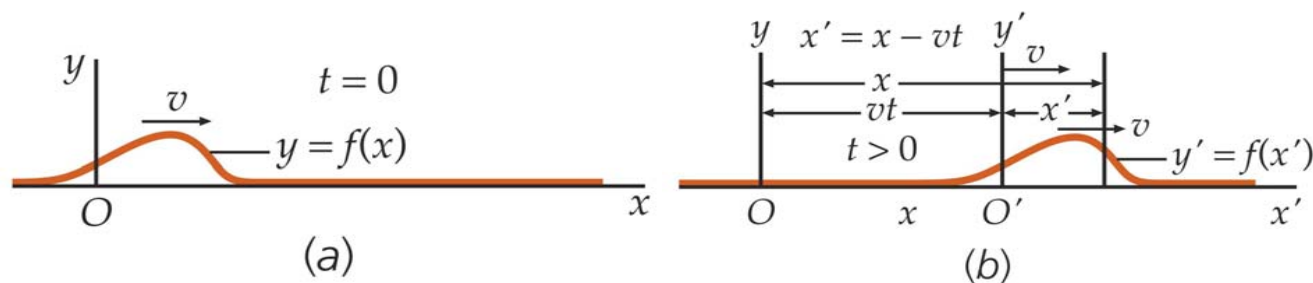
Verformung des Seils:  $y' = f(x') = y \Rightarrow$   
Wellenfunktion

$y = f(x - vt) \Rightarrow$  in positiver  $x$ -Richtung

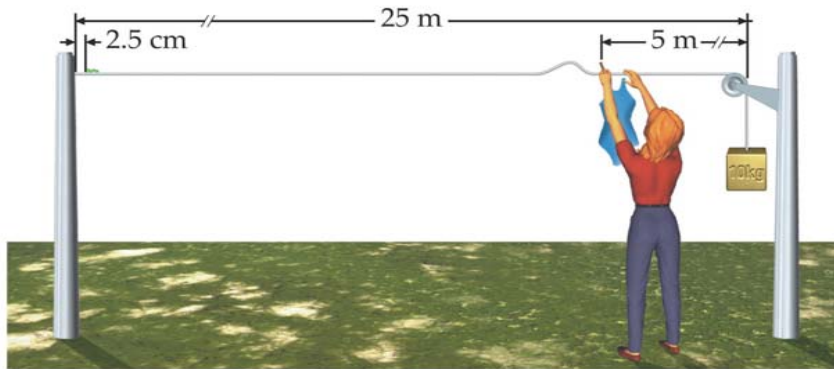
$y = f(x + vt) \Rightarrow$  in negativer  $x$ -Richtung

Wellenfunktionen sind Lösungen der

Wellengleichung (Differentialgleichung)



Ausbreitung eines Wellenberges längs eines Seils



Wäscheleine  $L = 25 \text{ m}$   $m_L = 0.25 \text{ kg}$ ;

hängendes Massestück  $m = 10 \text{ kg}$ ; Wurm mit  $v = 1 \text{ cm s}^{-1}$

gesucht Wellengeschwindigkeit  $v = \sqrt{\frac{F_T}{\mu}}$ :

$$\text{aus } \mu = \frac{m_L}{L} \text{ und } F_T = mg \Rightarrow v = \sqrt{\frac{mgL}{m_L}} \Rightarrow$$

$$v = \sqrt{\frac{(10 \text{ kg})(9.81 \text{ m s}^{-2})(25 \text{ m})}{(0.25 \text{ kg})}} = 99.0 \text{ m s}^{-1}$$

Zeit  $\Delta t$  für Wellenberg  $\Delta x = 20 \text{ m}$  zurückzulegen:  $\Delta t = \frac{\Delta x}{v} = 0.202 \text{ s}$

Zeit  $\Delta t'$  für Wurm  $\Delta x' = 2.5 \text{ cm}$  zurückzulegen:  $\Delta t' = \frac{\Delta x'}{v'} = 2.5 \text{ s}$

### Ausbreitungsgeschwindigkeit der Wellen

Die Geschwindigkeit von Wellen relativ zum Medium hängt von den Eigenschaften des Mediums ab, aber ist unabhängig von der Bewegung der Wellenquelle.

$$v = \sqrt{\frac{F_T}{\mu}}$$

15-3

$F_T$  : Spannung des Seils  $\mu$  : lineare Massendichte

SPEED OF WAVES ON A STRING

Wellengeschwindigkeit in Gasen und Flüssigkeiten:  $v = \sqrt{\frac{K}{\rho_0}}$  wobei  $K = - \frac{\Delta p}{\Delta V/V}$  Kompressionsmodul

$\rho_0$  Massendichte des Mediums im Gleichgewichtszustand, siehe Teil 17  $\Rightarrow$

$$v = \sqrt{\frac{\gamma RT}{M}}$$

15-5

### Beispiel 15.2: Schallgeschwindigkeit in Luft

Mit  $\gamma = 1.4$   $M = 29 \times 10^{-3} \text{ kg mol}^{-1} \Rightarrow$

a) bei  $0^\circ \text{C}$   $T = 273 \text{ K} \Rightarrow v = 331 \text{ m s}^{-1}$

b) bei  $20^\circ \text{C}$   $T = 293 \text{ K} \Rightarrow v = 343 \text{ m s}^{-1}$

SPEED OF SOUND IN A GAS

$R = 8.314 \text{ J mol}^{-1} \text{ K}^{-1}$  Gaskonstante,  $T$  absolute Temperatur  
 $M$  molare Masse eines Gases,  $\gamma$  gasspezifische Konstante

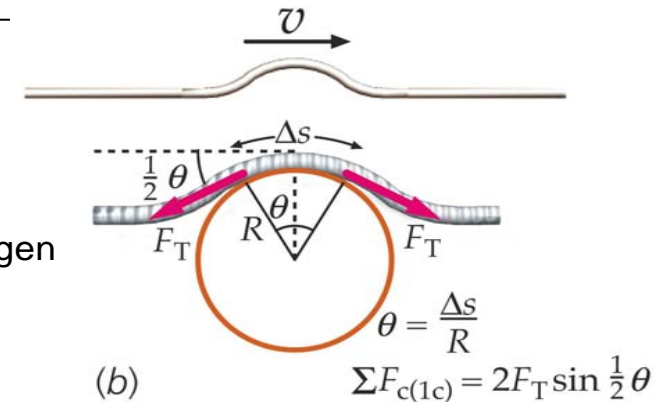
**Herleitung von  $v$  für Wellen auf einer Saite**

Amplitude des Wellenbergs klein im Vergleich zur Länge der Saite  $\Rightarrow$

Spannkraft  $F_T$  näherungsweise konstant.

Mit dem Wellenberg mitbewegter Bezugssystem  $\Rightarrow$  Wellenberg stationär, Saite bewegt sich mit  $v$  nach links.

Kopf des Wellenberges  $\Rightarrow$  Segment  $\Delta s$  der Saite angenähert durch Kreisbogen mit Radius  $R \Rightarrow$  in radialer Richtung Zentripetalbeschleunigung  $-v^2/R$  an jedem Ende Saitenspannkraft  $F_T$



Zentripetalkraft auf das Segment  $\Delta s$ :  $\sum_i F_i = -2F_T \sin \frac{1}{2} \theta \approx -2F_T \frac{1}{2} \theta = -F_T \theta$  für kleine  $\theta$

Mit  $m = \mu \Delta s$  und  $\theta = \Delta s/R \Rightarrow m = \mu R \theta \Rightarrow$

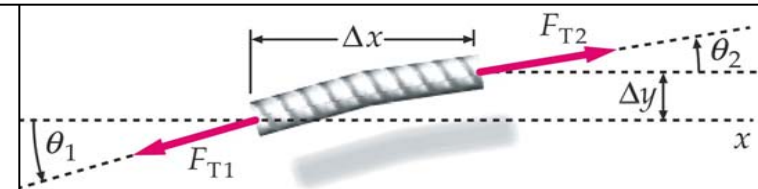
Mit zweitem Newton'sches Gesetz  $\sum_i F_i = m a_{zp} \Rightarrow -F_T \theta = -\mu R \theta v^2 / R \Rightarrow v = \sqrt{\frac{F_T}{\mu}}$

**Die Wellengleichung**

Als Wellengleichung wird die Differenzialgleichung bezeichnet, deren Lösung eine Wellenfunktion  $y(x, t)$  ist. Die Wellengleichung kann aus dem zweiten Newton'schen Gesetz  $\sum_i \vec{F}_i = m \vec{a}$  hergeleitet werden:

Sei Auslenkung klein  $\Rightarrow \theta_1$  und  $\theta_2$  klein.

Mit  $\mu$  eindimensionale Massendichte  $\Rightarrow$  Masse des Segments  $m = \mu \Delta x$ .

**Segment einer gespannten Saite der Länge  $\Delta x$** 

An dem Saitensegment greifen die Kräfte  $\vec{F}_{T1}$  und  $\vec{F}_{T2}$  an, wobei  $|\vec{F}_{T1}| = |\vec{F}_{T2}| = |\vec{F}_T| \Rightarrow$

horizontale Komponente der am Segment angreifenden Gesamtkraft:

$$\sum F_x = -|\vec{F}_{T1}| \cos \theta_1 + |\vec{F}_{T2}| \cos \theta_2 = |\vec{F}_T| (\cos \theta_2 - \cos \theta_1) \approx 0 \text{ da für kleine } \theta \Rightarrow \cos \theta \approx 1$$

vertikale Komponente der am Segment angreifenden Gesamtkraft:

$$\sum F_y = -|\vec{F}_{T1}| \sin \theta_1 + |\vec{F}_{T2}| \sin \theta_2 = |\vec{F}_T| (\sin \theta_2 - \sin \theta_1) \approx |\vec{F}_T| (\tan \theta_2 - \tan \theta_1) \text{ wobei } \tan \theta = \frac{\partial y}{\partial x} = S \text{ Steigung der Saitenkurve}$$



$$\text{aus } \sum F_y \approx |\vec{F}_T|(\tan \theta_2 - \tan \theta_1) = |\vec{F}_T| \Delta S = m a_y = \mu \Delta x \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} \Rightarrow \frac{\Delta S}{\Delta x} = \frac{\mu}{|\vec{F}_T|} \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} \Rightarrow$$

$$\text{mit } \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta S}{\Delta x} = \frac{\partial S}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{\partial y}{\partial x} \right) = \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} \Rightarrow \text{Wellengleichung für die gespannte Saite } \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} = \frac{\mu}{|\vec{F}_T|} \frac{\partial^2 y}{\partial t^2}$$

$$\text{Mit } \xi = x - vt \text{ und } y(x - vt) = y(\xi) \Rightarrow \frac{\partial y}{\partial x} = \frac{\partial y}{\partial \xi} \frac{\partial \xi}{\partial x} = y' \frac{\partial \xi}{\partial x} \text{ und } \frac{\partial y}{\partial t} = \frac{\partial y}{\partial \xi} \frac{\partial \xi}{\partial t} = y' \frac{\partial \xi}{\partial t} \Rightarrow$$

$$\text{Da } \frac{\partial \xi}{\partial x} = 1 \text{ und } \frac{\partial \xi}{\partial t} = -v \Rightarrow \frac{\partial y}{\partial x} = y' \text{ und } \frac{\partial y}{\partial t} = -v y' \Rightarrow$$

$$\frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{\partial y}{\partial x} \right) = \frac{\partial \xi}{\partial x} \frac{\partial}{\partial \xi} \left( \frac{\partial y}{\partial x} \right) = 1 \cdot \frac{\partial}{\partial \xi} (y' \cdot 1) = y'' \text{ und } \frac{\partial}{\partial t} \left( \frac{\partial y}{\partial t} \right) = \frac{\partial \xi}{\partial t} \frac{\partial}{\partial \xi} \left( \frac{\partial y}{\partial t} \right) = (-v) \frac{\partial}{\partial \xi} (-v y') = v^2 y'' \Rightarrow$$

$$\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} = \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2 y}{\partial t^2}$$

$$\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} = \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2 y}{\partial t^2}$$

15-9b

WAVE EQUATION

## Beispiel 15.3: Harmonische Wellenfunktion

Harmonische Welle als Wellenfunktion:  $y(x, t) = A \sin(kx - \omega t)$  mit Wellengeschwindigkeit  $v = \omega/k \Rightarrow$

Berechnung der Ableitungen:

$$\frac{\partial y}{\partial x} = k A \cos(kx - \omega t) \quad \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} = -k^2 A \sin(kx - \omega t) \quad \frac{\partial y}{\partial t} = -\omega A \cos(kx - \omega t) \quad \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = -\omega^2 A \sin(kx - \omega t) \Rightarrow$$

$$\text{eingesetzt in } \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} = \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} \Rightarrow -k^2 A \sin(kx - \omega t) = -\frac{1}{v^2} \omega^2 A \sin(kx - \omega t) \Rightarrow A \sin(kx - \omega t) = \frac{\omega^2}{k^2 v^2} A \sin(kx - \omega t)$$

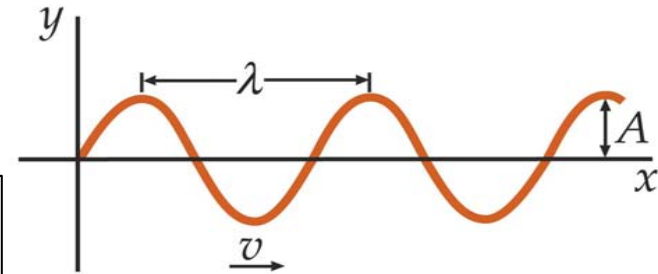
$$\Rightarrow A \sin(kx - \omega t) = A \sin(kx - \omega t)$$

## 15.2 Periodische Wellen, harmonische Wellen (Periodic waves)

## Harmonische Wellen

Alle Wellen, ob periodisch oder nicht, können durch Superposition aus harmonischen Wellen erzeugt werden.

Während einer Schwingungsdauer  $T = 1/\nu$  bewegt sich die Welle um eine Wellenlänge  $\lambda$  fort  $\Rightarrow$  Wellengeschwindigkeit  $v = \frac{\lambda}{T} = \lambda \nu$



Harmonische Welle zu einem festen Zeitpunkt mit  $A$  Amplitude,  $\lambda$  Wellenlänge und  $\delta = 0 \Rightarrow$

$$y(x) = A \sin\left(2\pi \frac{x}{\lambda}\right) = A \sin(kx) \quad \text{wobei Definition Wellenzahl } k = \frac{2\pi}{\lambda} \text{ da Ortskoordinate } x \text{ bei der harmonischen}$$

Welle stets mit  $2\pi/\lambda$  verknüpft ist, für  $k$  ist die SI Einheit  $\text{m}^{-1}$ .

Für eine sich in positiver  $x$ -Richtung mit  $v$  ausbreitende Welle  $\Rightarrow y(x,t) = A \sin[k(x - vt)] = A \sin[kx - kvt] \Rightarrow$   
 $y(x,t) = A \sin(kx - \omega t)$  mit  $\omega = kv$  Kreisfrequenz und  $(kx - \omega t)$  Phase der Welle

$$\omega = 2\pi\nu = \frac{2\pi}{T}$$

$$\text{mit } \omega = kv = \frac{2\pi}{\lambda} v \Rightarrow 2\pi\nu = \frac{2\pi}{\lambda} v \Rightarrow v = \lambda \nu$$

$$y(x,t) = A \sin(kx - \omega t)$$

15-13

HARMONIC WAVE FUNCTION

Die Wellengeschwindigkeit  $v$  ist eine physikalische Größe, die von dynamischen Bedingungen (Kräften, Spannungen) und von den Materialeigenschaften des Mediums abhängt, in dem sich die Welle ausbreitet. Die Frequenz  $\nu$  bzw. die Kreisfrequenz  $\omega$  ist eine kinematische Größe, die durch die äußeren Anregungsbedingungen der Welle festgelegt wird.

$v = \lambda \nu \Rightarrow \lambda \sim \frac{1}{\nu} \Rightarrow$  falls  $v = f(\nu) \Rightarrow$  Wellendispersion  $\Rightarrow$  Wellenpakete (Überlagerung von harmonischen Wellen unterschiedlicher Frequenz) fließen als Folge der Dispersionserscheinung auseinander.

Harmonische Welle, die sich längs einer gespannten Saite ausbreitet  $\Rightarrow y(x, t) = A \sin(kx - \omega t) \Rightarrow$   
 transversale Geschwindigkeit eines Punkts  $(x, y)$  der schwingenden Saite  $v_y = \frac{\partial y}{\partial t} = -\omega A \cos(kx - \omega t)$

$$v_y = \frac{\partial y}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial t} [A \sin(kx - \omega t)] = -\omega A \cos(kx - \omega t) \quad 15-16$$

TRANSVERSE VELOCITY

Beispiel 15.4: Eine harmonische Welle auf einer Saite

Harmonische Welle auf einer Saite  $y(x, t) = A \sin(kx - \omega t)$  wobei  $A = 0.03 \text{ m}$ ,  $k = 2.2 \text{ m}^{-1}$  und  $\omega = 3.5 \text{ s}^{-1} \Rightarrow$   
 Teil a) mit  $y(x, t) = A \sin(kx - \omega t)$  und  $\omega = kv \Rightarrow y(x, t) = A \sin[k(x - vt)] \Rightarrow$   
 Wellenausbreitung in positiver  $x$ -Richtung  $\Rightarrow$  mit  $v = \frac{\omega}{k} \Rightarrow v = \frac{3.5 \text{ s}^{-1}}{2.2 \text{ m}^{-1}} = 1.59 \text{ m s}^{-1}$   
 Teil b) aus  $k = \frac{2\pi}{\lambda} \Rightarrow$  Wellenlänge  $\lambda = \frac{2\pi}{k} = \frac{2\pi}{2.2 \text{ m}^{-1}} = 2.86 \text{ m}$   
 aus  $\omega = 2\pi\nu = \frac{2\pi}{T} \Rightarrow$  Frequenz  $\nu = \frac{\omega}{2\pi} = \frac{3.5 \text{ s}^{-1}}{2\pi} = 0.557 \text{ Hz} \Rightarrow$  Periodendauer  $T = \frac{1}{\nu} = 1.80 \text{ s}$   
 Teil c) maximale Auslenkung  $A = 0.03 \text{ m}$   
 Teil d) maximale transversale Geschwindigkeit eines Saitenpunkts: aus  $v_y = -\omega A \cos(kx - \omega t) \Rightarrow$   
 $|v_{y, \max}| = \omega A = (3.5 \text{ s}^{-1})(0.03 \text{ m}) = 0.105 \text{ m s}^{-1}$



**Energietransport durch Wellen auf einer Saite**

Eine Welle, die sich längs einer Saite ausbreitet, transportiert in ihrer Ausbreitungsrichtung mechanische Energie:

aus Gl. (6.17)  $\Rightarrow$  übertragene Leistung  $P = \vec{F}_T \cdot \vec{v}_t = F_{T,y} v_{t,y} \Rightarrow$

mit  $F_{T,y} = -|\vec{F}_T| \sin \theta \Rightarrow$  für kleine  $\theta \Rightarrow F_{T,y} = -|\vec{F}_T| \tan \theta \Rightarrow$

mit  $\tan \theta = \frac{\partial y}{\partial x}$  und  $v_{t,y} = \frac{\partial y}{\partial t}$  und  $y(x,t) = A \sin(kx - \omega t) \Rightarrow$

$$P = F_{T,y} v_{t,y} \approx -|\vec{F}_T| \frac{\partial y}{\partial x} \frac{\partial y}{\partial t} = (-|\vec{F}_T|) (kA \cos(kx - \omega t)) (-\omega A \cos(kx - \omega t)) \Rightarrow$$

$$P = |\vec{F}_T| \omega k A^2 \cos^2(kx - \omega t)$$

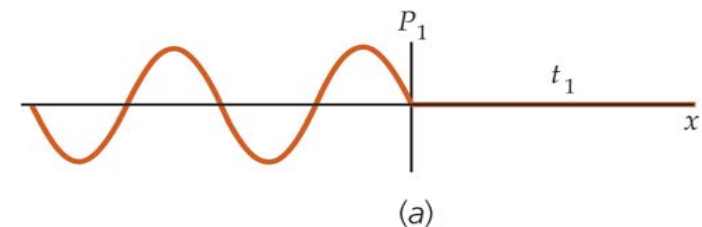
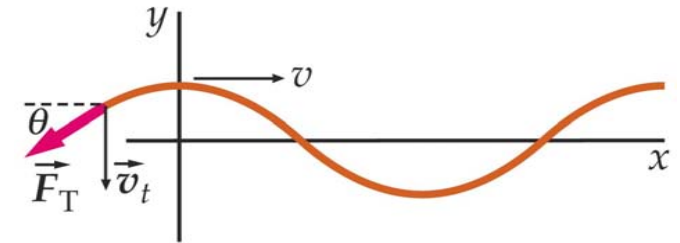
mit Gl. (15.3)  $v = \sqrt{\frac{|\vec{F}_T|}{\mu}}$  und Gl. (15.14)  $\omega = kv \Rightarrow$

$$P = \mu v^2 \omega \frac{\omega}{v} A^2 \cos^2(kx - \omega t) = \mu v \omega^2 A^2 \cos^2(kx - \omega t) \Rightarrow$$

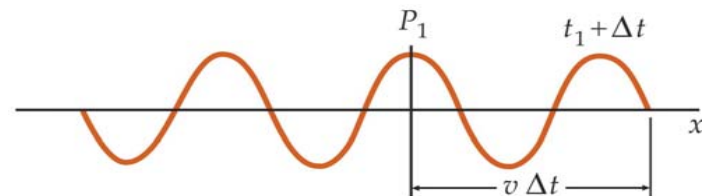
$$\text{mit } \frac{1}{T} \int_0^T \cos^2(kx - \omega t) dt = \frac{1}{2} \Rightarrow P_{\text{ave}} = \langle P \rangle = \frac{1}{2} \mu v \omega^2 A^2 \sim \omega^2 A^2$$

$\Rightarrow$  mittlere Energie während  $\Delta t$  durch ein Punkt  $P_1 \Rightarrow$

$$\langle E \rangle = \langle P \rangle \Delta t = \frac{1}{2} \mu v \omega^2 A^2 \Delta t = \frac{1}{2} \mu \omega^2 A^2 \Delta x \sim \omega^2 A^2$$



$$P_{\text{av}} = \frac{1}{2} \mu v \omega^2 A^2 \quad 15-18$$



$$(\Delta E)_{\text{av}} = \frac{1}{2} \mu \omega^2 A^2 \Delta x \quad 15-19$$

**Beispiel 15.5: Energieübertragung durch eine Welle auf einer Saite**

Saite: Länge  $L = 60$  m, Masse  $m = 320$  g, Spannkraft  $|\vec{F}_T| = 12$  N, Welle: Wellenlänge  $\lambda = 25$  cm, Amplitude  $A = 1.2$  cm  $\Rightarrow$

Teil a) aus Gl. (15.3)  $v = \sqrt{|\vec{F}_T|/\mu}$  mit  $\mu = m/L \Rightarrow v = \sqrt{|\vec{F}_T| L / m} = \sqrt{(12 \text{ N})(60 \text{ m}) / (320 \times 10^{-3} \text{ kg})} = 47.4 \text{ m s}^{-1}$

aus Gl. (15.15)  $\omega = 2\pi\nu$  und Gl. (15.10)  $v = \lambda\nu \Rightarrow \omega = 2\pi v / \lambda = 2\pi 47.4 \text{ m s}^{-1} / 25 \times 10^{-2} \text{ m} = 1190 \text{ s}^{-1}$

Teil b) mit  $\Delta x = 15$  m  $\Rightarrow$  aus Gl. (15.19)  $\langle E \rangle = \frac{1}{2} \mu \omega^2 A^2 \Delta x = \frac{1}{2} \frac{(320 \times 10^{-3} \text{ kg})}{(60 \text{ m})} (1190 \text{ s}^{-1})^2 (1.2 \text{ cm})^2 (15 \text{ m}) = 8.19 \text{ J}$

**Harmonische Schallwellen**

Schallwelle in Luft: longitudinale Wellenbewegung  $\Rightarrow$   
 Auslenkung der Luftmoleküle längs der Bewegungsrichtung der Welle  $\Rightarrow$   
 Schwankungen in der Dichte und im Druck der Luft

Auslenkung der Luftmoleküle aus der Gleichgewichtslage in einer harmonischen Schallwelle als Funktion der Ortskoordinate  $x$  zu einem festen Zeitpunkt

Gleichgewichtslagen

Eine Auslenkungswelle  $s(x, t) = s_{\max} \sin(kx - \omega t)$ , impliziert eine Druckwelle (Druckänderung bezüglich des Gleichgewichtsdruck)  
 $p(x, t) = p_{\max} \sin(kx - \omega t - \pi/2)$ , wobei  $p_{\max} = \rho_0 \omega v s_{\max}$

nach Eintreffen  
der Schallwelle

**Energie von Schallwellen**

Mittlere Energie aus Gl. (15.19) wobei  $\mu \Delta x$  mit  $\rho_0 \Delta V$  und  $A$  durch  $s_{\max}$  ersetzt wird:

$$\langle E \rangle = \frac{1}{2} \rho_0 \omega^2 s_{\max}^2 \Delta V \Rightarrow \text{Energiedichte } \langle w \rangle = \frac{\langle E \rangle}{\Delta V} = \frac{1}{2} \rho_0 \omega^2 s_{\max}^2$$

**Elektromagnetische Wellen**

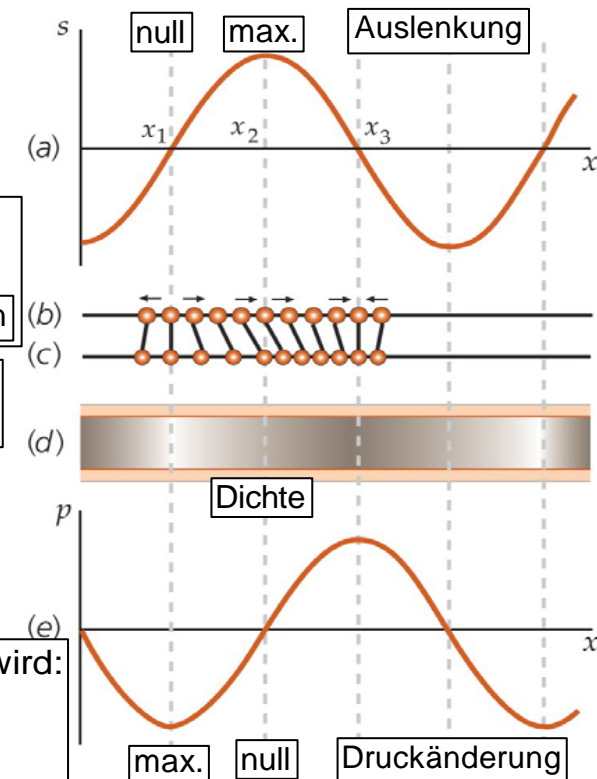
Elektromagnetische Wellen: Wellen längs Hochspannungsleitungen, Radiowellen, Mikrowellen, Licht, Röntgen- und Gammastrahlung; Unterschied in der Frequenz  $\Rightarrow$  Unterschied in der Wellenlänge.

Kein Ausbreitungsmedium erforderlich, Geschwindigkeit in Vakuum  $c = 2.99792458 \times 10^8 \text{ m s}^{-1}$ .

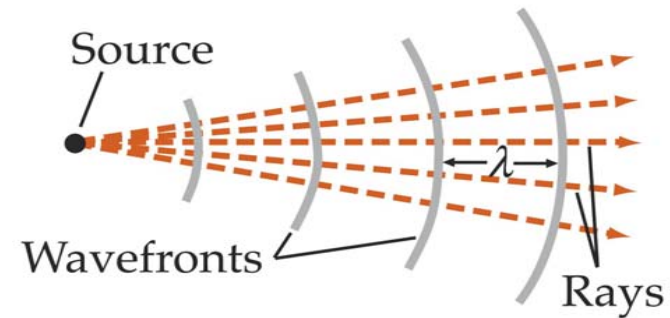
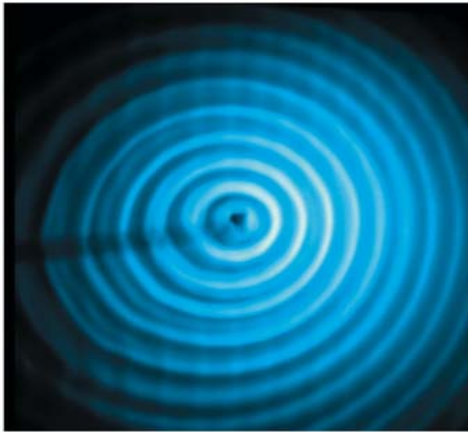
Wellenfunktion gegeben durch elektrisches Feld  $\vec{E}(x, t)$  und ein damit gekoppeltes magnetisches Feld  $\vec{B}(x, t)$  (siehe Teil 21 und Teil 30). Spektrum der elektromagnetischen Wellen siehe Teil 31.

Im Vakuum  $\vec{E}(x, t)$  und  $\vec{B}(x, t)$  stehen senkrecht auf der Ausbreitungsrichtung und senkrecht zueinander  $\Rightarrow$  Transversalwelle, rechthändiges Orthogonalsystem.

Elektromagnetische Wellen werden durch schwingende freie Ladungen, schwingende elektrische Dipole, schwingende Ströme in Antennen erzeugt.



## 15.3 Wellen in drei Dimensionen (Waves in three dimensions)



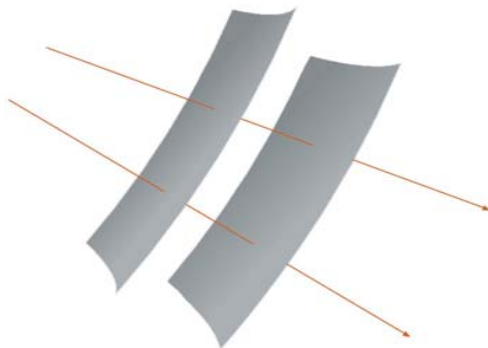
Wellen erzeugt durch eine punktförmige Quelle, die sich harmonisch auf und nieder bewegt.

Wellenlänge: Abstand zwischen den Wellenfronten,

Strahlen: Bewegungsrichtung der Wellenfronten.

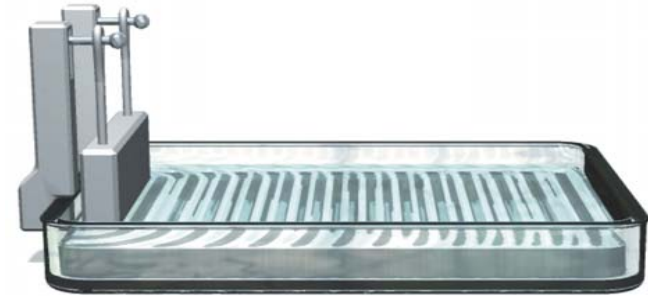
In einem homogenen Medium breitet sich die Welle in Strahlrichtung geradlinig aus,

Wellen mit parallelen ebenen Fronten: ebene Welle (2-dim  $\Rightarrow$  Linienwelle)



Ebene Welle,  
in großer Entfernung von einer punktförmigen Quelle  $\Rightarrow$   
Wellenfronten näherungsweise parallele Ebenen und  
Strahlen parallele Linien

Zweidimensionales Analogon einer ebenen Welle = Linienwelle



### Intensität einer Welle

Punktförmige Quelle in einem homogenen Medium  $\Rightarrow$  Kugelwelle

Sei  $P$  die von der Quelle auf die Fläche  $A$  abgestrahlte Leistung  $\Rightarrow$  Leistungsdichte  $P/A \Rightarrow$

für punktförmige Wellenquelle Leistungsdichte auf einer Kugeloberfläche im Abstand  $r$  von der Quelle  $P/(4\pi r^2) \sim r^{-2}$ .

Mittlere Leistungsdichte  $\Rightarrow$  Intensität  $I = \frac{\langle P \rangle}{A}$  SI-Einheit  $\text{W m}^{-2}$

$$I = \frac{P_{\text{av}}}{A}$$

15-25

Intensität (mittlere Leistung pro Fläche) und Energiedichte (Energie pro Volumen):

punktförmige Wellenquelle  $\Rightarrow$  Kugelwelle mit Radius  $r_1 \Rightarrow$

Energie innerhalb der Kugel mit Radius  $r_1 \Rightarrow$  in  $\Delta t$  breitet sich in die Schale  $\Delta r$  aus  $\Rightarrow$  durch die Kugeloberfläche  $A = 4\pi r_1^2$  wird  $\langle \Delta E \rangle = \langle w \rangle \Delta V$  transportiert, wobei Volumen der

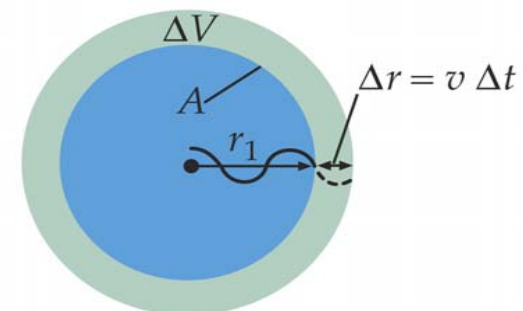
Kugelschale  $\Delta V = 4\pi r_1^2 \Delta r = 4\pi r_1^2 v \Delta t \Rightarrow$

mittlere Energie der Kugelschale  $\langle \Delta E \rangle = \langle w \rangle \Delta V = \langle w \rangle A v \Delta t \Rightarrow$

mittlere Leistung  $\langle P \rangle = \frac{\langle \Delta E \rangle}{\Delta t} = \langle w \rangle A v \Rightarrow$

Intensität  $I = \frac{\langle P \rangle}{A} = \langle w \rangle v$

INTENSITY DEFINED



Volume of shell =  $\Delta V = A \Delta r = A v \Delta t$

Für Schallquelle:

$$\text{mit Gl. (15.24)} \quad \langle w \rangle = \frac{1}{2} \rho_0 \omega^2 s_{\max}^2 \Rightarrow I = \langle w \rangle v = \frac{1}{2} \rho_0 \omega^2 s_{\max}^2 v \Rightarrow$$

$$\text{mit Gl. (15.22)} \quad p_{\max} = \rho_0 \omega v s_{\max} \Rightarrow I = \frac{1}{2} \frac{p_{\max}^2}{\rho_0 v}$$

Schallwellen von einem Telephonhörer



Die Intensität wird bei Schallwellen auch als Schallintensität oder Schallstärke bezeichnet.

Menschliches Ohr:  $10^{-12} \text{ W m}^{-2} \leq I \leq 1 \text{ W m}^{-2}$  bzw.  $3 \times 10^{-5} \text{ Pa} \leq p \leq 30 \text{ Pa}$   
zum Vergleich Luftdruck 101 kPa

Beispiel 15.6: Ein Lautsprecher

Lautsprechermembran, Durchmesser 30 cm, Frequenz  $\nu = 1 \text{ kHz}$ , Amplitude  $s_{\max} = 0.020 \text{ mm} \Rightarrow$

Teil a) Druckamplitude vor der Membran, aus Gl. (15.22)  $p_{\max} = \rho_0 \omega v s_{\max} \Rightarrow$

$$p_{\max} = (1.29 \text{ kg m}^{-3})(2\pi \cdot 1000 \text{ Hz})(340 \text{ m s}^{-1})(2.0 \times 10^{-5} \text{ m}) = 55.1 \text{ N m}^{-2}$$

Teil b) Schallintensität vor der Membran, aus Gl. (15.28)  $I = \frac{1}{2} \frac{p_{\max}^2}{\rho_0 v} \Rightarrow$

$$I = \frac{1}{2} \frac{(55.1 \text{ N m}^{-2})^2}{(1.29 \text{ kg m}^{-3})(340 \text{ m s}^{-1})} = 3.46 \text{ W m}^{-2}$$

Teil c) abgestrahlte akustische Leistung, aus  $I = \frac{P}{A} \Rightarrow P = IA \Rightarrow$

$$P = (3.46 \text{ W m}^{-2})\pi(0.15 \text{ m})^2 = 0.245 \text{ W}$$

Teil d) Intensität in 5 m Entfernung, aus  $I = \frac{\langle P \rangle}{A} \Rightarrow$  mit vordere Halbkugel  $A = 2\pi r^2 \Rightarrow$

$$I = \frac{0.245 \text{ W}}{2\pi \cdot (5 \text{ m})^2} = 1.56 \text{ mW m}^{-2}$$

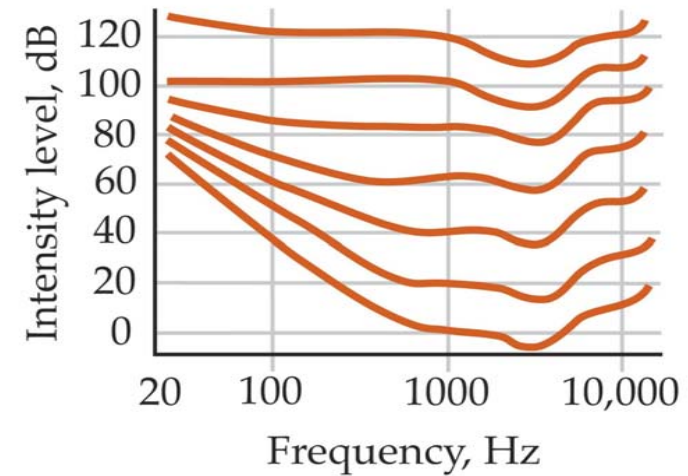


**Schallstärke (Schallintensität) und Lautstärke**

Wegen  $10^{-12} \text{ W m}^{-2} \leq I \leq 1 \text{ W m}^{-2}$  beim menschlichen Ohr  
 und weil Schallempfindlichkeit (Lautstärke  $\beta$ ) proportional zu  $\log I \Rightarrow$   
 Definition der Lautstärke in Dezibel, wobei  $I_0 = 10^{-12} \text{ W m}^{-2}$  Hörschwelle

$$\beta = 10 \log \frac{I}{I_0} \quad 15-29$$

DEFINITION—INTENSITY LEVEL IN dB



Kurven gleicher subjektiver  
Lautstärkeempfindung

**TABLE 15-1**

**Intensity and Intensity Level of Some Common Sounds ( $I_0 = 10^{-12} \text{ W/m}^2$ )**

Source	$I/I_0$	dB	Description
	$10^0$	0	Hearing threshold
Normal breathing	$10^1$	10	Barely audible
Rustling leaves	$10^2$	20	
Soft whisper (at 5 m)	$10^3$	30	Very quiet
Library	$10^4$	40	
Quiet office	$10^5$	50	Quiet
Normal conversation (at 1 m)	$10^6$	60	
Busy traffic	$10^7$	70	
Noisy office with machines; average factory	$10^8$	80	
Heavy truck (at 15 m); Niagara Falls	$10^9$	90	Constant exposure endangers hearing
Old subway train	$10^{10}$	100	
Construction noise (at 3 m)	$10^{11}$	110	
Rock concert with amplifiers (at 2 m); jet takeoff (at 60 m)	$10^{12}$	120	Pain threshold
Pneumatic riveter; machine gun	$10^{13}$	130	
Jet takeoff (nearby)	$10^{15}$	150	
Large rocket engine (nearby)	$10^{18}$	180	



Schalldämpfer  $\Rightarrow$  Dämpfung 30 dB  $\Rightarrow$

$$\text{aus Gl. (15.29) } \beta = 10 \log \frac{I}{I_0} \Rightarrow -30 = 10 \log \frac{I}{I_0} \Rightarrow -3 = \log \frac{I}{I_0} \Rightarrow I = 10^{-3} I_0$$

Beispiel 15.8: Bellende Hunde

mögliches Prüfungsbeispiel

## 15.4 Wellenasubreuung an Hindernissen (Waves encountering barriers)

## Reflexion und Brechung

Welle trifft auf eine Grenzfläche auf, die zwei Bereiche unterschiedlicher Wellengeschwindigkeit voneinander trennt  $\Rightarrow$  ein Teil der Welle wird reflektiert und der andere Teil wird durchgelassen.

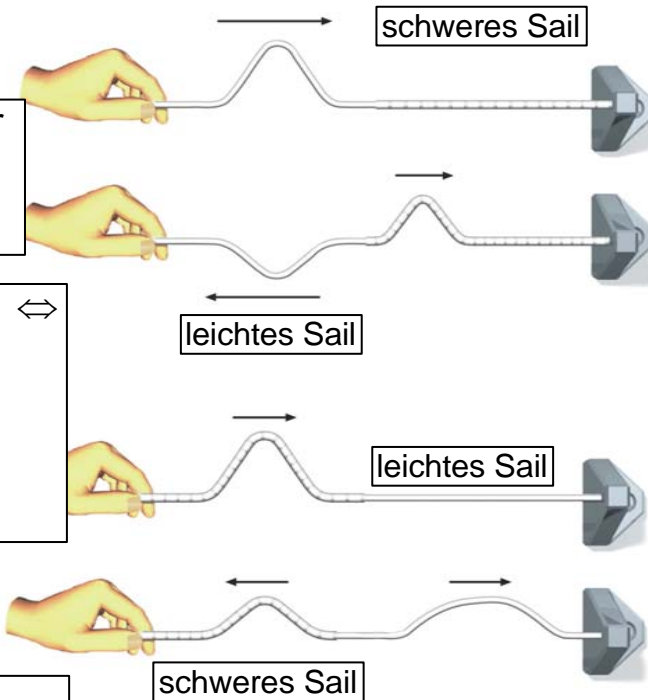
Sail an einem Punkt befestigt  $\Rightarrow$  Wellenberg reflektiert und invertiert  $\Leftrightarrow$

Reflexion am festen Ende

Sail an einem Punkt mit vernachlässigbarer Masse befestigt  $\Rightarrow$

Wellenberg reflektiert aber nicht invertiert  $\Leftrightarrow$

Reflexion am losen Ende



## Beispiel 15.9: Zwei zusammengelötete Drähte

Zwei Drähte mit  $\mu_1 \neq \mu_2$ ; sei  $A_{\text{in}}$  gegeben,  $v_1 = 2v_2$  und  $A_t = \frac{1}{2}A_t \Rightarrow$

Teil a) wegen Energieerhaltung  $P_{\text{ein}} = P_r + P_t \Rightarrow$  mit Gl. (15.18)  $\Rightarrow$

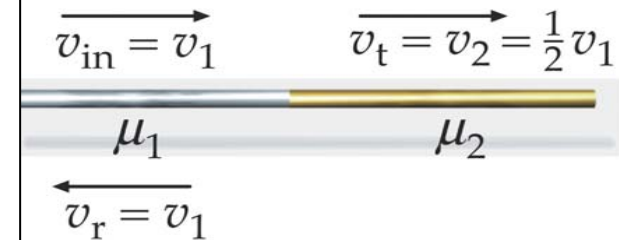
$$P = \frac{1}{2} \mu v \omega^2 A^2 \Rightarrow \frac{1}{2} \mu_1 v_1 \omega^2 A_{\text{in}}^2 = \frac{1}{2} \mu_2 v_2 \omega^2 A_t^2 + \frac{1}{2} \mu_1 v_1 \omega^2 A_r^2 \Rightarrow$$

$$\mu_1 v_1 A_{\text{in}}^2 = \mu_2 v_2 A_t^2 + \mu_1 v_1 A_r^2$$

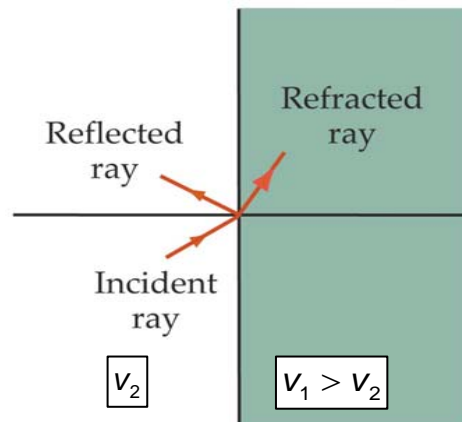
mit Gl. (15.3)  $v = \sqrt{\frac{|\vec{F}_T|}{\mu}} \Rightarrow \mu = \frac{|\vec{F}_T|}{v^2} \Rightarrow$  eingesetzt

$$\frac{|\vec{F}_T|}{v_1^2} v_1 A_{\text{in}}^2 = \frac{|\vec{F}_T|}{v_2^2} v_2 A_t^2 + \frac{|\vec{F}_T|}{v_1^2} v_1 A_r^2 \Rightarrow \frac{A_{\text{in}}^2}{v_1} = \frac{A_t^2}{v_2} + \frac{A_r^2}{v_1} \Rightarrow$$

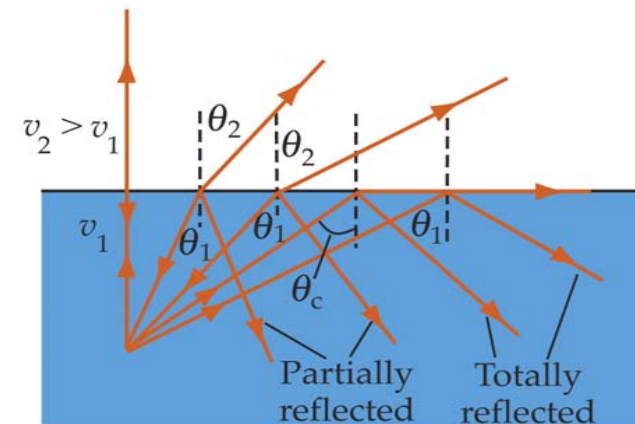
mit  $v_1 = 2v_2$  und  $A_t = \frac{1}{2}A_t \Rightarrow \frac{A_{\text{in}}^2}{v_1} = \frac{2A_t^2}{v_1} + \frac{A_r^2}{4v_1} \Rightarrow A_t = \frac{2}{3}A_{\text{in}} \Rightarrow A_r = \frac{1}{3}A_{\text{in}}$



Brechung einer Welle an einer Oberflächengrenzfläche  
zwischen zwei Medien mit Wellengeschwindigkeiten  $v_1 \neq v_2$



Lichtquelle im Wasser,  
Übergang zur Totalreflexion  
 $\theta_c$  kritischer Winkel



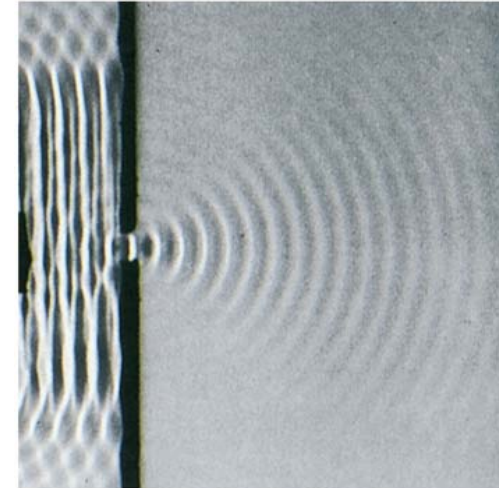
Wenn  $v_2 > v_1 \Rightarrow$  Brechung weg vom Lot  
Wenn  $v_2 < v_1 \Rightarrow$  Brechung zum Lot

Die von einer Oberfläche reflektierte Energiemenge hängt von der Struktur der Oberfläche und den Materialeigenschaften ab.  
Ebene Wände, Böden, Decken: gute Reflektoren  
Poröse und weiche Materialien (Stoffe, Vorhänge, Möbelverkleidungen): schlechte Reflektoren, der einfallende Schall wird teilweise absorbiert.

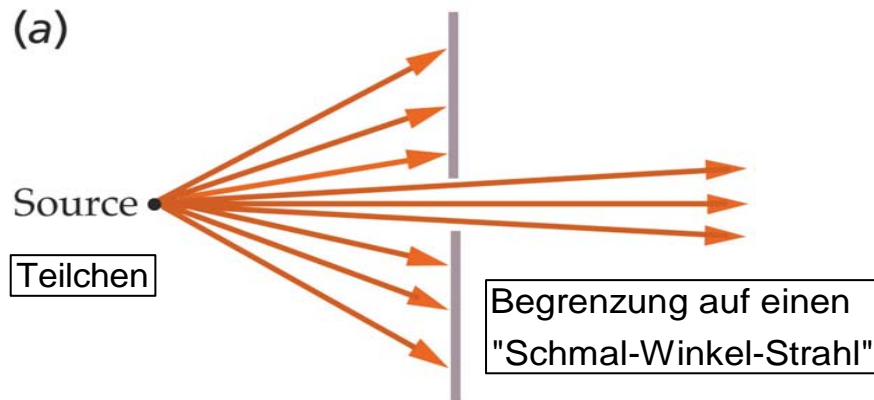


**Beugung**

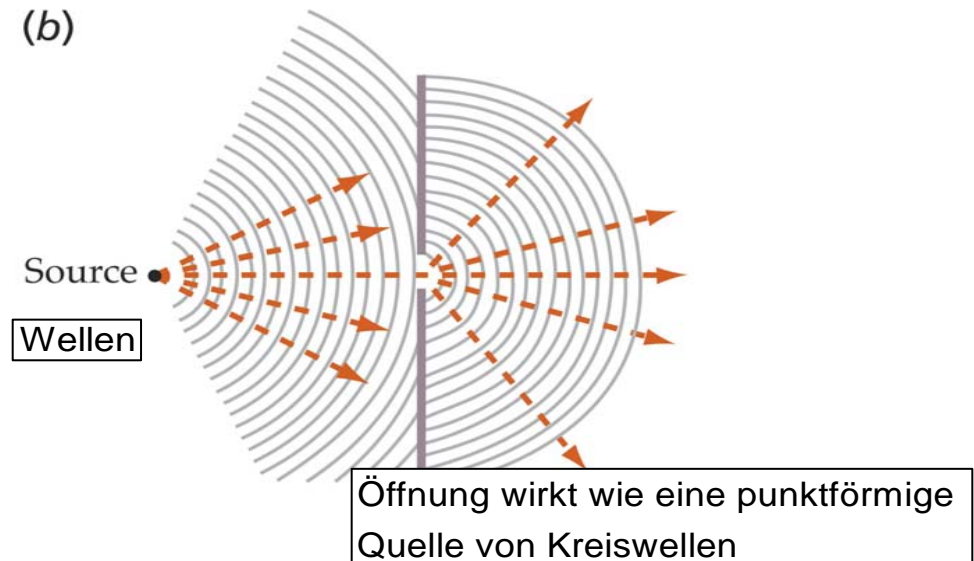
Wenn eine Wellenfront durch ein Hindernis teilweise eingeschränkt wird  $\Rightarrow$  die Welle bewegt sich nicht nur in der durch die Strahlengeometrie gegebenen Richtung weiter, sondern es tritt eine Wellenbewegung auch außerhalb der geometrischen Strahlenbegrenzung  $\Rightarrow$  Beugung.



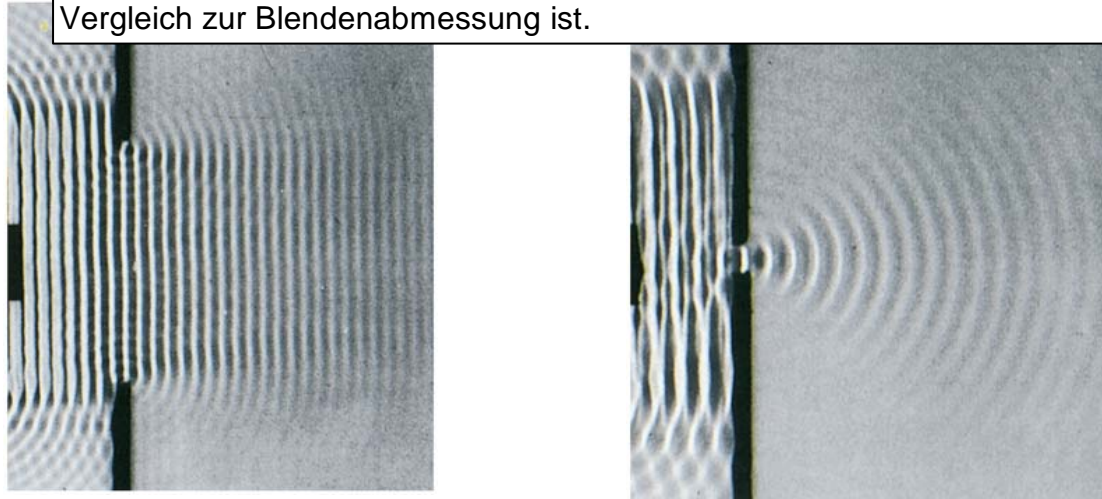
Vergleich von Teilchen und Wellen,  
die eine schmale Öffnung passieren



Ebene Wellen mit Wellenlänge  $\lambda$  treffen  
auf Öffnung mit Breite  $\approx \lambda \Rightarrow$  Beugung



Die Größe der Beugung hängt ab, ob die Wellenlänge groß oder klein im Vergleich zur Blendenabmessung ist.

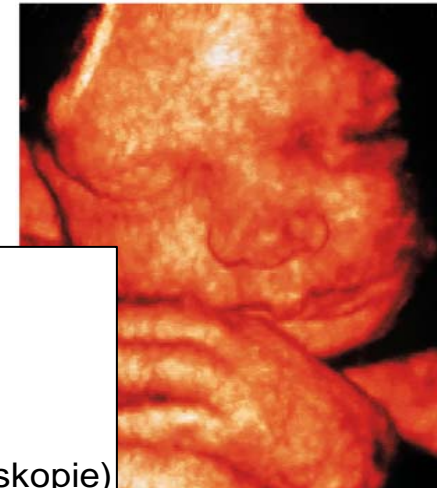


Strahlnäherung: die Wellen breiten sich in geraden Linien in Strahlrichtung ohne Beugung

Wellenlängen vom hörbaren Schall im Bereich cm bis m  $\Rightarrow$  Beugung wichtig

Wellenlängen vom sichtbaren Licht im Bereich  $4 \times 10^{-7}$  m bis  $4 \times 10^{-7}$  m  $\Rightarrow$  Strahlenmodell gute Näherung  
Beugung von Licht siehe Teil 35.

Durch Beugung  $\Rightarrow$  Grenze gesetzt, wie exakt kleine Objekte aufgelöst werden können. Es können keine Einzelheiten beobachtet werden, die kleiner als die benutzte Wellenlänge ist.



Schallwellen mit Frequenzen von  $\geq 20$  kHz: Ultraschallwellen  $\Rightarrow$   
sehr kleine Wellenlänge  $\leq 1.7$  cm  $\Rightarrow$  Verwendung: Ortung, Bildgebung

Hyperschallbereich: Frequenzen zwischen  $10^{10}$  und  $10^{12}$  Hz  $\Rightarrow$   
betrifft Gitterschwingungen in Kristallen  $\Rightarrow$  Materialuntersuchung (Brillouin-Spektroskopie)



## 15.5 Der Doppler-Effekt (The Doppler effect)

Wenn Wellenquelle und Empfänger sich relativ zueinander bewegen  $\Rightarrow$  empfangene Frequenz nicht dieselbe wie die Frequenz der Quelle:

Bewegung aufeinander zu  $\Rightarrow$  Frequenz höher als Quelfrequenz

Bewegung voneinander ab  $\Rightarrow$  Frequenz tiefer als Quelfrequenz

$\Rightarrow$  Doppler-Effekt

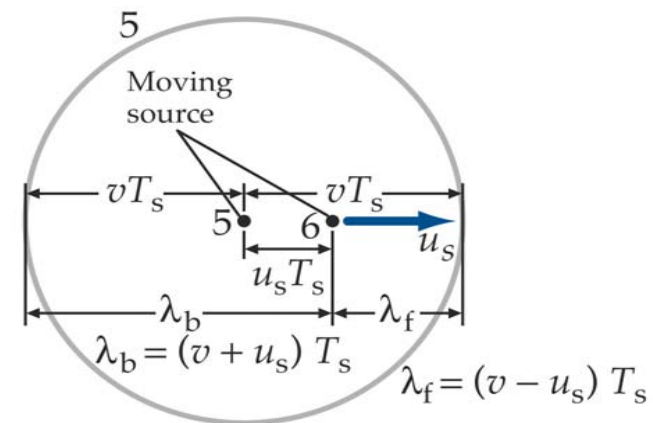
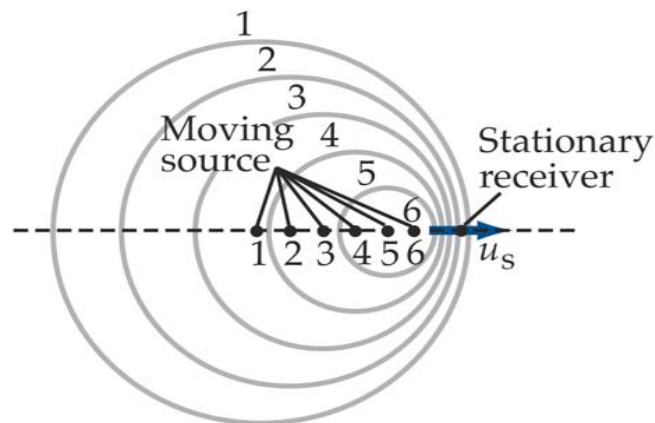
Bewegte Quelle, ruhender Empfänger, Annahme Geschwindigkeit der Quelle  $u_s <$  Wellengeschwindigkeit  $v$ :

Wellenfronten verlassen in gleichen Abständen  $T_s = 1/\nu_s$  die Quelle  $\Rightarrow$

für  $u_s = 0 \Rightarrow$  Abstand zwei aufeinander Wellenfronten = Wellenlänge =  $vT_s$

für  $u_s > 0 \Rightarrow$  vor der bewegten Quelle  $\lambda_f = (v - u_s)T_s$  hinter der bewegten Quelle  $\lambda_b = (v + u_s)T_s \Rightarrow$

$$\lambda_{b,f} = (v \pm u_s)T_s = \frac{v \pm u_s}{\nu_s} \Rightarrow \text{empfangene Frequenz } \nu_r = \frac{v}{\lambda_{b,f}} = \frac{v}{v \pm u_s} \nu_s$$





Ruhende Quelle  $u_s = 0$ , bewegter Empfänger  $u_r \neq 0 \Rightarrow$   
es ändert sich die Frequenz  $\nu_r$  der empfangenen Wellen.

Sei  $T_r$  Zeit zwischen dem Eintreffen der aufeinander folgenden Wellenberge mit Abstand  $\lambda$ :

Empfänger bewegt sich auf die Quelle zu  $\Rightarrow$

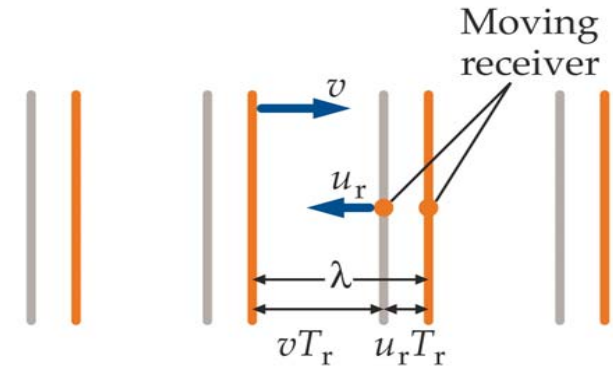
$$\lambda = \nu T_r + u_r T_r \Rightarrow T_r = \frac{\lambda}{\nu + u_r} \Rightarrow \nu_r = \frac{\nu + u_r}{\lambda} \Rightarrow \text{Frequenz wird höher}$$

Empfänger bewegt sich von der Quelle weg  $\Rightarrow$

sei  $u_r < \nu$  und  $u_r$  in Ausbreitungsrichtung von  $\nu \Rightarrow$

$$\lambda = \nu T_r - u_r T_r \Rightarrow T_r = \frac{\lambda}{\nu - u_r} \Rightarrow \nu_r = \frac{\nu - u_r}{\lambda} \Rightarrow \text{Frequenz wird niedriger}$$

$$\text{Zusammenfassend } \nu_r = \frac{1}{T_r} = \frac{\nu \pm u_r}{\lambda} = \frac{\nu \pm u_r}{\nu} \nu_s$$



Zusammenfassung von  
Gl. (15.33) und (15.34)

$$\nu_r = \frac{\nu \pm u_r}{\nu \pm u_s} \nu_s$$

Beispiel 15.10: Signalhorn

Autohupe  $\nu_s = 400$  Hz, ruhende Luft mit Schallgeschwindigkeit  $\nu = 340$  m s<sup>-1</sup>:

Teil a,b) Auto bewegt sich mit  $u_s = 34$  m s<sup>-1</sup> in Richtung ruhender Empfänger  $u_r = 0 \Rightarrow$

$$\text{aus Gl. (15.32) } \lambda_r = \frac{\nu - u_s}{\nu_s} = \frac{340 \text{ m s}^{-1} - 34 \text{ m s}^{-1}}{400 \text{ Hz}} = 0.765 \text{ m, aus Gl. (15.33) } \nu_r = \frac{\nu}{\nu \pm u_s} \nu_s = \frac{\nu}{\lambda_r} = \frac{340 \text{ m s}^{-1}}{0.765 \text{ m}} = 444 \text{ Hz}$$

Teil b,c) Auto steht  $u_s = 0$  und hupt, Empfänger bewegt sich in Richtung ruhendes Auto mit  $u_r = 34$  m s<sup>-1</sup>  $\Rightarrow$

$$\text{aus } \nu = \lambda \nu_s \Rightarrow \lambda = \frac{\nu}{\nu_s} = \frac{340 \text{ m s}^{-1}}{400 \text{ Hz}} = 0.850 \text{ m, aus Gl. (15.34) } \nu_r = \frac{\nu \pm u_r}{\lambda} = \frac{\nu \pm u_r}{\nu} \nu_s = \frac{340 \text{ m s}^{-1} + 34 \text{ m s}^{-1}}{0.850 \text{ m}} = 440 \text{ Hz}$$

Beispiel 15.11: Eine andere Autohupe

mögliches Prüfungsbeispiel

Relative Frequenzverschiebung  $\frac{\nu_r - \nu_s}{\nu_s} = \frac{\Delta \nu}{\nu_s} = \frac{\frac{\nu \pm u_r}{\nu \pm u_s} \nu_s - \nu_s}{\nu_s} = \frac{\nu \pm u_r}{\nu \pm u_s} - 1 = \frac{\nu \pm u_r - \nu \mp u_s}{\nu \pm u_s} = \frac{\pm u_r \mp u_s}{\nu \pm u_s} = \frac{\pm(u_r - u_s)}{\nu \pm u_s} \Rightarrow$

für  $\nu \gg u_r$  und  $u_s \Rightarrow \frac{\nu_r - \nu_s}{\nu_s} = \frac{\Delta \nu}{\nu_s} = \frac{\pm(u_r - u_s)}{\nu} = \frac{\mp u_{\text{rel}}}{\nu}$  wobei  $u_{\text{rel}} = u_s - u_r$

Beispiel 15.12: Radar der Polizei



Radargerät  $\Rightarrow$  elektromagnetische Wellen mit Frequenz  $\nu_s$  und mit Lichtgeschwindigkeit  $c$

Auto bewegt sich mit  $\nu_{\text{rel}}$  weg vom Polizeiauto. Wellen reflektiert  $\Rightarrow \Delta \nu$

Gesucht Geschwindigkeit des Autos in Abhängigkeit von  $\nu_s$  und  $\Delta \nu$ :

Gesamtfrequenzverschiebung  $\Delta \nu = \Delta \nu_1 + \Delta \nu_2$  wobei mit Gl. (15.36)

für emittierte Welle  $\Rightarrow$  Auto = Empfänger  $\Rightarrow$  Rotverschiebung der emittierten Radarwelle  $\Delta \nu_1 = -\frac{u_{\text{rel}}}{c} \nu_s$

für reflektierte Welle  $\Rightarrow$  Polizei = Empfänger  $\Rightarrow$  Rotverschiebung der reflektierten Radarwelle  $\Delta \nu_2 = -\frac{u_{\text{rel}}}{c} \nu_r$

Mit  $\Delta \nu_1 = \nu_r - \nu_s = -\frac{u_{\text{rel}}}{c} \nu_s \Rightarrow \nu_r = \nu_s \left(1 - \frac{u_{\text{rel}}}{c}\right) \Rightarrow \Delta \nu = \Delta \nu_1 + \Delta \nu_2 = -\frac{u_{\text{rel}}}{c} \nu_s - \frac{u_{\text{rel}}}{c} \nu_s \left(1 - \frac{u_{\text{rel}}}{c}\right) = -\frac{u_{\text{rel}}}{c} \nu_s \left(2 - \frac{u_{\text{rel}}}{c}\right) \Rightarrow$

da  $\nu_{\text{rel}} \ll c \Rightarrow \Delta \nu \approx -2 \frac{u_{\text{rel}}}{c} \nu_s \Rightarrow u_{\text{rel}} \approx -\frac{c \Delta \nu}{2 \nu_s}$

### Doppler-Verschiebung und Relativität

Nach der Einstein'schen Relativitätstheorie (siehe auch Teil R und Teil 39)  $\Rightarrow$

1) alle Beobachter messen dieselbe Lichtgeschwindigkeit  $c$ , unabhängig von ihrer Bewegung relativ zur Quelle

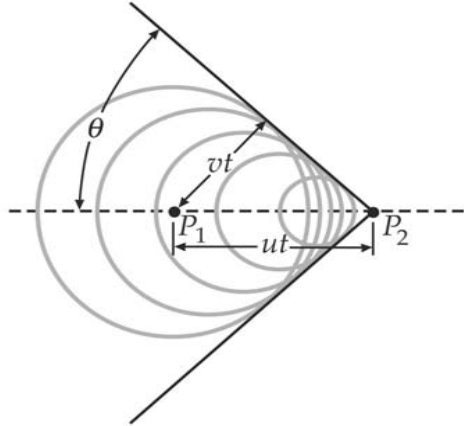
2) Berücksichtigung von Zeitdilatation und Längenkontraktion

$\Rightarrow \nu_r = \sqrt{\frac{c \pm \nu_{\text{rel}}}{c \mp \nu_{\text{rel}}}} \nu_s$  die oberen Zeichen werden verwendet wenn sich Quelle und Empfängern nähern, die unteren

wenn sie sich voneinander entfernen

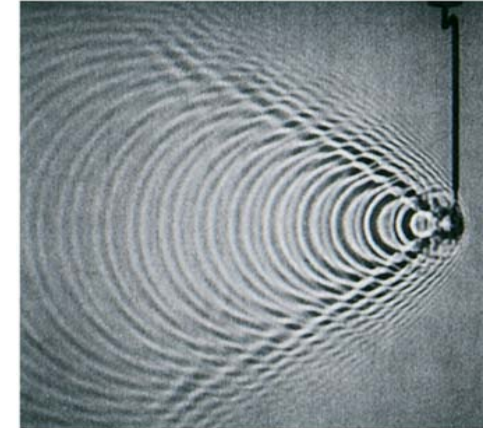
**Stoßwellen**

Wenn  $u_s \geq v \Rightarrow$  dann gibt es keine Wellen vor der Quelle  $\Rightarrow$   
 Wellen häufen sich hinter der Quelle an  $\Rightarrow$  Wellenfronten erzeugen eine Stoßwelle



Die Einhüllende der Wellenfront bildet einen Kegel mit der Quelle an der Spitze:

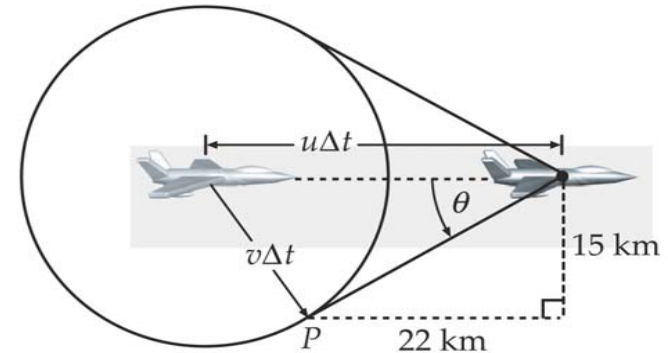
$$\sin \theta = \frac{vt}{u_s t} = \frac{v}{u_s} = \frac{1}{\text{Machzahl}} \quad \text{wobei Machzahl} = \frac{u_s}{v}$$



Wenn geladene Teilchen sich in einem Medium mit einer Geschwindigkeit  $u_s$  bewegen, die größer als die Lichtgeschwindigkeit  $c_n$  in diesem Medium ist  $\Rightarrow$  Čerenkov-Strahlung

$$\sin \theta = \frac{c_n}{u_s}$$





Überschallflugzeug, überfliegt P in 15 km Höhe in Richtung Osten,  
Überschallknall bei P gehört wenn Flugzeug 22 km östlich von P:  
gesucht Geschwindigkeit  $\Rightarrow$

$$\text{aus } \tan \theta = \frac{15 \text{ km}}{22 \text{ km}} \Rightarrow \theta = 34.3^\circ \Rightarrow$$

$$\text{aus Gl. (15.38) } \sin \theta = \frac{v\Delta t}{u_s\Delta t} = \frac{v}{u_s} \Rightarrow u_s = \frac{v}{\sin \theta} = \frac{340 \text{ m s}^{-1}}{\sin(34.3^\circ)} = 604 \text{ m s}^{-1}$$



## **Alonso-Finn 28. Wellenbewegung**

**28.1 Einführung**

**28.2 Wellen**

**28.3 Beschreibung einer Wellenbewegung**

**28.4 Die allgemeine Gleichung der Wellenbewegung**

**28.5 Elastische Wellen**

**28.7 Transversale Wellen auf einer Saite**

**28.8 Transversale elastische Wellen in einem Stab**

**28.9 Oberflächenwellen in einer Flüssigkeit**

**28.10 Was propagiert in einer Wellenbewegung?**

**28.11 Wellen in zwei und in drei Dimensionen**

**28.12 Sphärische Wellen in einer Flüssigkeit**

**28.13 Gruppengeschwindigkeit**

**28.14 Der Doppler-Effekt**