

Tipler-Mosca

## 12. Statisches Gleichgewicht und Elastizität (Static equilibrium and elasticity)

12.1 Gleichgewichtsbedingungen (Conditions for equilibrium)

12.2 Der Schwerpunkt (The center of gravity)

12.3 Einige Beispiele für statisches Gleichgewicht (Some examples of static equilibrium)

12.4 Kräftepaare (Couples)

12.5 Statisches Gleichgewicht in beschleunigten Bezugssystemen (Static equilibrium in an accelerated frame)

12.6 Stabilität des Gleichgewichts (Stability of rotational equilibrium)

12.7 Unbestimmbare Probleme (Indeterminate problems)

12.8 Spannung und Dehnung (Stress and strain)





**12.1 Gleichgewichtsbedingungen (Conditions for equilibrium)**

Kräfte, die die Kabel und Stäbe in einer Konstruktion ausüben, werden elastische Kräfte genannt. Sie sind das Ergebnis leichter Deformationen (Dehnung oder Kompression von massiven Körpern unter mechanischer Spannung, die eine Last tragen).

**Gleichgewichtsbedingungen**

1. The net external force acting on the body must remain zero:

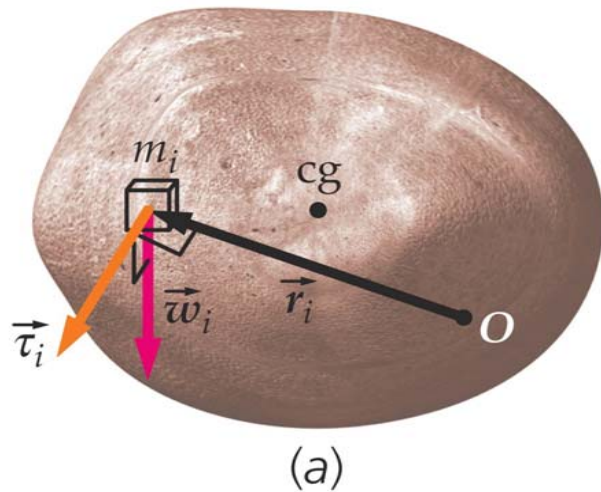
$$\sum \vec{F} = 0 \quad 12-1$$

2. The net external torque about *any* point must remain zero:

$$\sum \vec{\tau} = 0 \quad 12-2$$

CONDITIONS FOR EQUILIBRIUM

## 12.2 Der Schwerpunkt (The center of gravity)



O beliebiger fester Punkt  $\Rightarrow$  für i-tes Teilchen  
 Drehmoment bezüglich O:  $\vec{\tau}_i = \vec{r}_i \times \vec{F}_{g,i} = \vec{r}_i \times m_i \vec{g} \Rightarrow$   
 resultierendes Drehmoment  $\vec{\tau} = \sum_i \vec{\tau}_i = \sum_i \vec{r}_i \times m_i \vec{g}$

cg Schwerpunkt:

die gesamte Gewichtskraft  $\sum_i \vec{F}_{g,i}$  greift in cg dergestalt an,

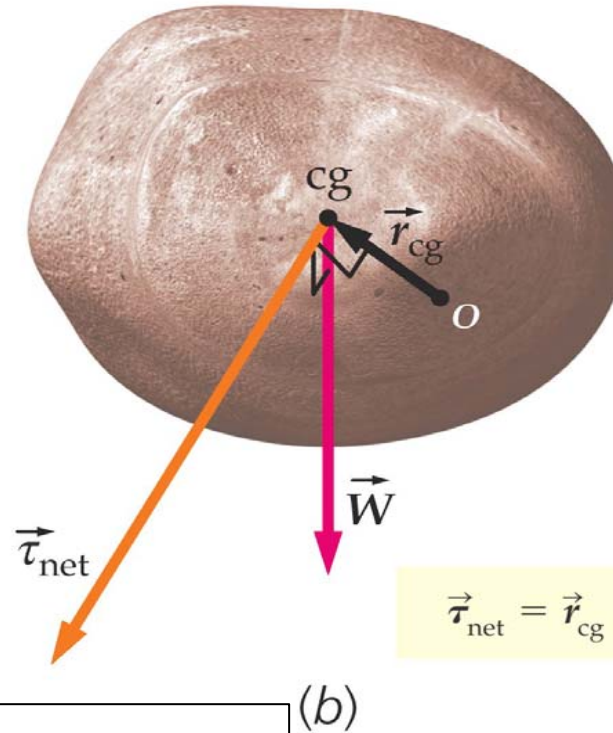
daß  $\vec{\tau} = \vec{r}_{cg} \times \vec{F}_g = \sum_i (\vec{r}_i \times \vec{F}_{g,i})$

Falls Gravitationsfeld  $\vec{g}$  homogen über den gesamten Körper ist  $\Rightarrow$

$\vec{F}_g = \sum_i \vec{F}_{g,i} = \sum_i m_i \vec{g} = m \vec{g} \Rightarrow \vec{\tau} = \sum_i (\vec{r}_i \times \vec{F}_{g,i}) = \sum_i (\vec{r}_i \times m_i \vec{g}) \Rightarrow$

$\vec{\tau} = \sum_i (m_i \vec{r}_i) \times \vec{g} = m \vec{r}_{CM} \times \vec{g} = \vec{r}_{CM} \times \vec{F}_g$

Annahme dabei:  $\vec{r}_{CM} = \vec{r}_{cg}$  gültig in einem homogenen Gravitationsfeld



$$\vec{\tau}_{net} = \vec{r}_{cg} \times \vec{W}$$

12-3

CENTER OF GRAVITY DEFINED

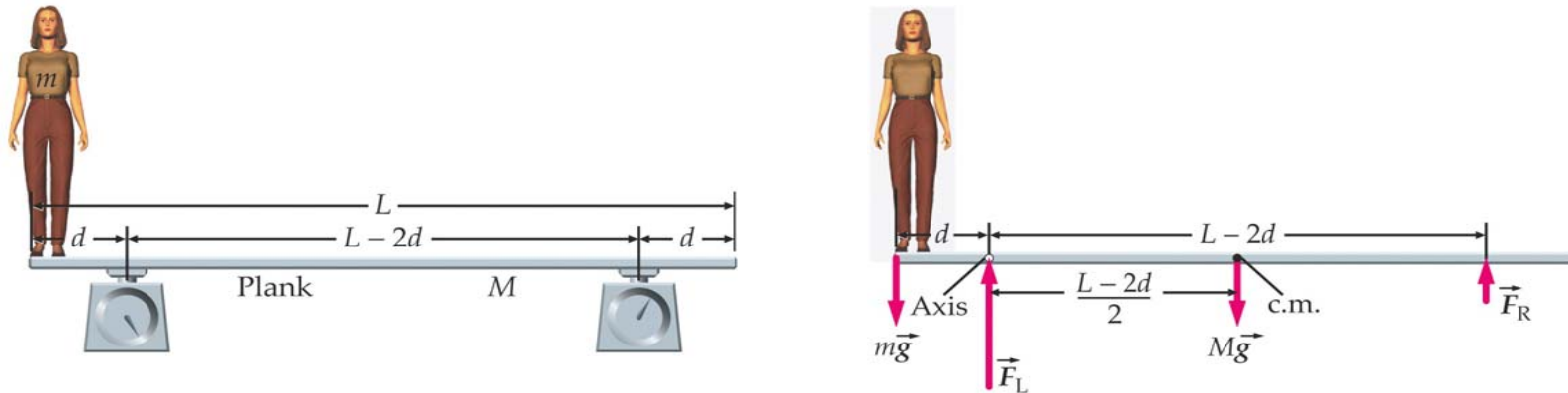


## 12.3 Einige Beispiele für statisches Gleichgewicht (Some examples of static equilibrium)

Obtain a simple solution by choosing an axis through the point of application of the force you have the least information about to calculate the torques.

Beispiel 12.1: Balanciert auf der Bohle

PROBLEM SOLVING GUIDELINE



Bohle  $L = 3 \text{ m}$ ,  $M = 35 \text{ kg}$ , Waagen  $d = 0.5 \text{ m}$ , Studentin  $m = 45 \text{ kg}$

Teil a) gesucht Anzeige der Waagen wenn Studentin sich am linken Ende stellt:

$$\text{aus Gl. 12.1 } \sum_i \vec{F}_i = 0 \Rightarrow \sum_i F_{i,y} = 0 \Rightarrow -mg + F_L - Mg + F_R = 0$$

$$\text{aus Gl. 12.2 } \sum_i \vec{\tau}_i = 0 \Rightarrow \sum_i \tau_{i,z} = 0 \Rightarrow \text{bezogen auf Achse} \Rightarrow (L-2d)F_R - \frac{L-2d}{2}Mg + 0 + dmg = 0$$

$$\Rightarrow F_R = \frac{1}{2}Mg - \frac{dmg}{(L-2d)} \Rightarrow \text{eingesetzt in } F_L = mg + Mg - F_R \Rightarrow F_L = mg + Mg - \frac{1}{2}Mg + \frac{dmg}{(L-2d)} \Rightarrow$$

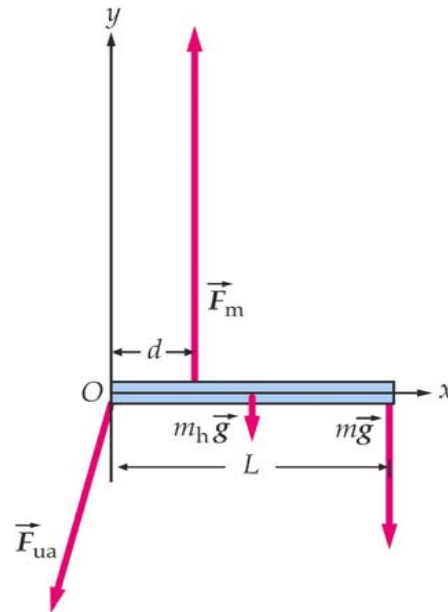
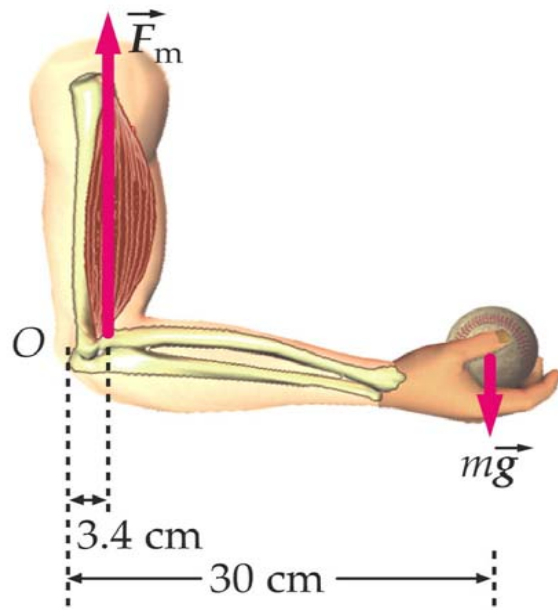
$$F_L = \frac{1}{2}Mg + mg \left( 1 + \frac{d}{(L-2d)} \right) = 723.5 \text{ N}$$

$$F_R = \frac{1}{2}Mg - \frac{dmg}{(L-2d)} = 61.3 \text{ N}$$

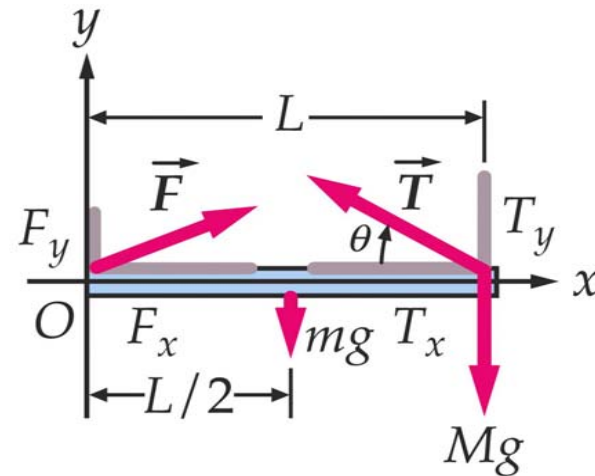
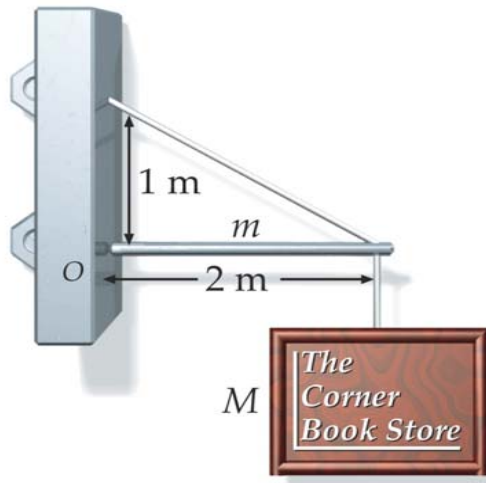
$$\text{Teil b) wenn Student am linken Ende} \Rightarrow F_R = 0 \Rightarrow \frac{1}{2}Mg - \frac{dmg}{(L-2d)} = 0 \Rightarrow m = M \frac{(L-2d)}{2d} = 70 \text{ kg}$$

## Bespiel 12.2: Kraft auf den Ellbogen

mögliches Prüfungsbeispiel



## Beispiel 12.3: Das Ladentisch



Ladenschild mit  $M = 20 \text{ kg}$ , Ausleger mit  $L = 2 \text{ m}$  und  $m = 4 \text{ kg}$ ,  
 Draht  $1 \text{ m}$  über dem Auflagepunkt des Stabes an der Wand befestigt.

Gesucht Kraft im Draht, Kraft auf die Wand:

$$\text{aus Gl. (12.1)} \quad \sum_i \vec{F}_i = 0 \Rightarrow \sum_i F_{i,x} = 0 \text{ und } \sum_i F_{i,y} = 0 \Rightarrow F_x - T \cos \theta = 0 \text{ und } F_y + T \sin \theta - mg - Mg = 0$$

$$\text{aus Gl. (12.2)} \quad \sum_i \vec{\tau}_i = 0 \Rightarrow \sum_i \tau_{i,z} = 0 \Rightarrow -LMg - \frac{L}{2}mg + LT \sin \theta + 0 = 0 \Rightarrow$$

$$T = \frac{1}{\sin \theta} \left( M + \frac{1}{2}m \right) g \Rightarrow \text{mit } \tan \theta = \frac{1 \text{ m}}{2 \text{ m}} \Rightarrow \theta = 26.56^\circ \Rightarrow T = 483 \text{ N}$$

$$F_x = T \cos \theta = 432 \text{ N}$$

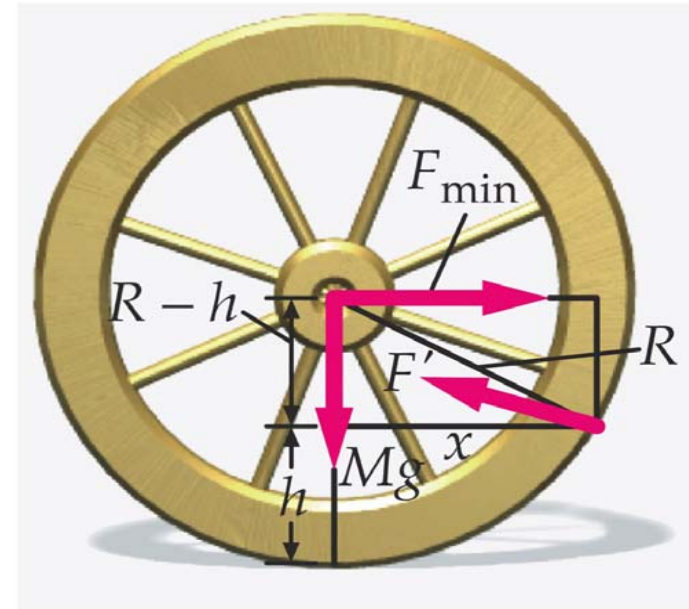
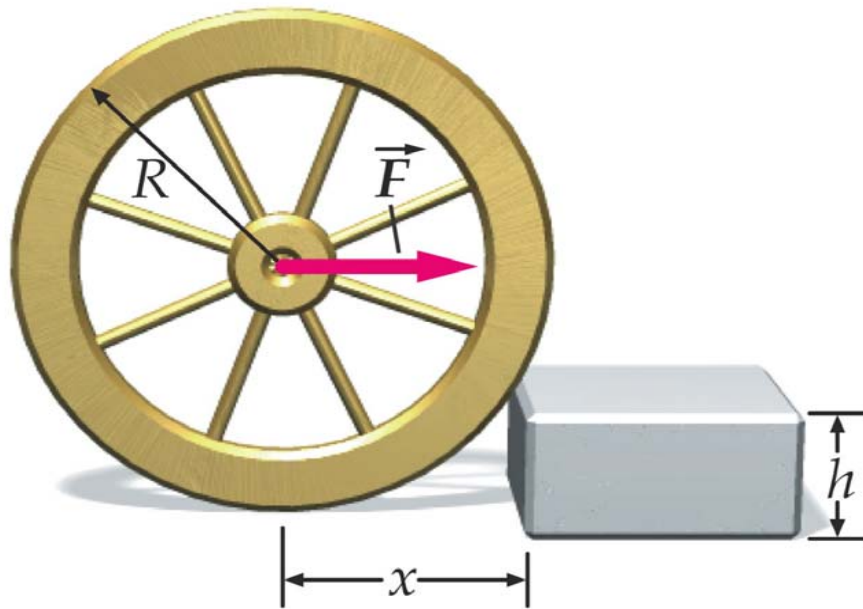
$$F_y = mg + Mg - T \sin \theta = mg + Mg - \left( M + \frac{1}{2}m \right) g = \frac{1}{2}mg = 19.6 \text{ N}$$

$$\text{Kraft auf die Wand: } F_{A,W} = -(432 \text{ N})\vec{e}_x - (19.6 \text{ N})\vec{e}_y$$



## Beispiel 12.4: Mit dem Rad über eine Kante

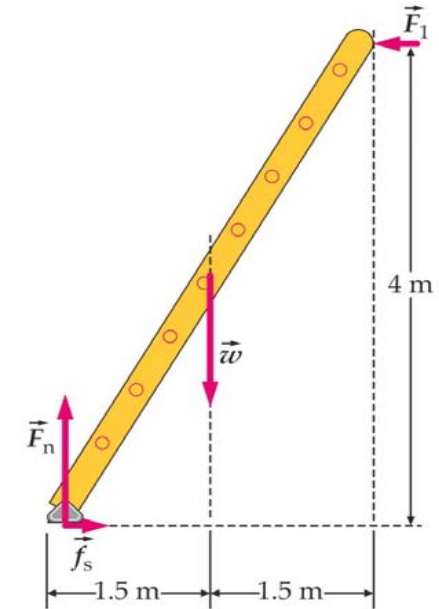
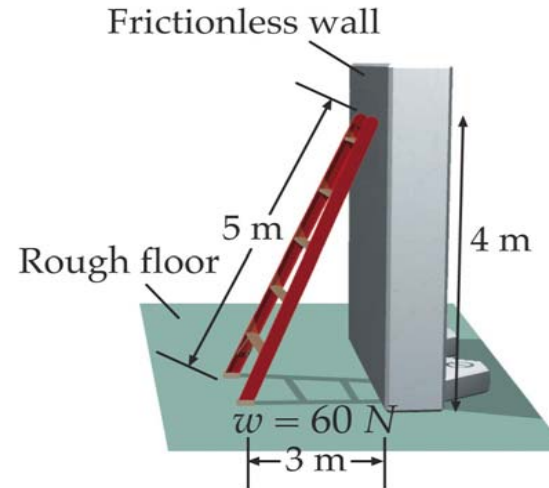
## mögliches Prüfungsbeispiel





## Beispiel 12.5: Eine angelehnte Leiter

Leiter Länge  $\ell = 5 \text{ m}$ , Gewicht  $F_g = 60 \text{ N}$ ,  
 unteres Ende 3 m von der Wand,  
 gesucht Haftreibungskoeffizient Boden-Leiter



aus Kräfte diagramm und Gl. (12.1):  $\sum_i \vec{F}_i = 0$  bzw.  $\sum_i F_{i,x} = 0$  und  $\sum_i F_{i,y} = 0$

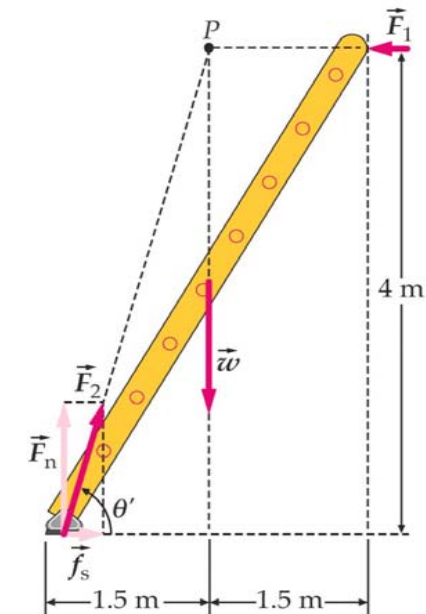
$$\Rightarrow \sum_i F_{i,x} = F_1 - f_s = F_1 - \mu_s |\vec{F}_n| = 0 \Rightarrow F_1 = \mu_s |\vec{F}_n|$$

$$\Rightarrow \sum_i F_{i,y} = F_n - mg = 0 \Rightarrow F_n = mg \Rightarrow F_1 = \mu_s mg$$

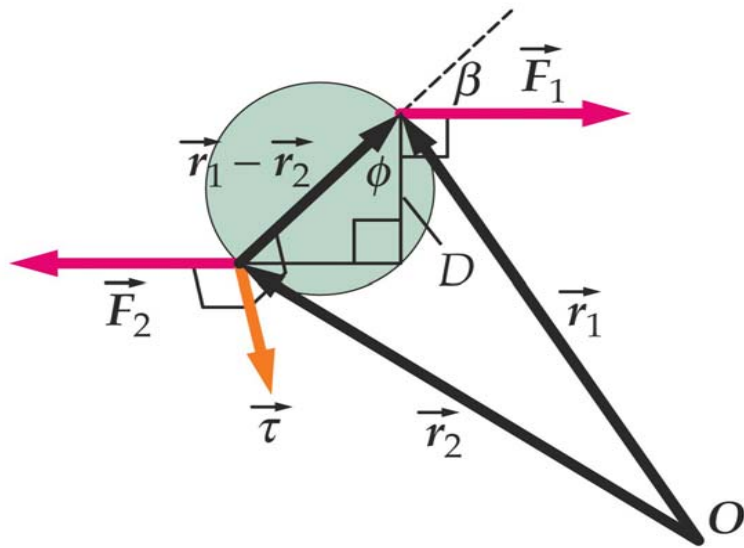
aus Gl. (12.2)  $\sum_i \vec{\tau}_i = 0 \Rightarrow \sum_i \tau_{i,z} = 0$

$$\Rightarrow \sum_i \tau_{i,z} = F_1 \cdot (4.0 \text{ m}) - mg \cdot (1.5 \text{ m}) = 0 \Rightarrow F_1 = mg \frac{1.5 \text{ m}}{4.0 \text{ m}} = 22.5 \text{ N}$$

$$\Rightarrow \text{aus } F_1 = \mu_s mg \Rightarrow \mu_s = \frac{F_1}{mg} = \frac{22.5 \text{ N}}{60 \text{ N}} = 0.375$$



## 12.4 Kräftepaare (Couples)



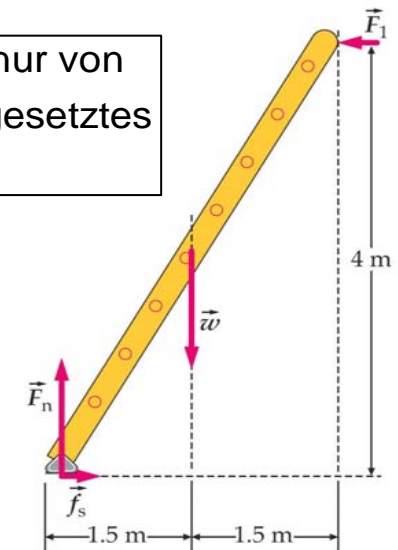
Zwei gleich große, aber entgegengesetzte Kräfte von dem Betrag  $|\vec{F}|$  bilden ein Kräftepaar. Das Drehmoment, das von den Kräftepaar erzeugt wird, besitzt bezüglich jedes Punkts im Raum den gleichen Wert  $D|\vec{F}|$ :

$$\begin{aligned}\vec{\tau} &= \vec{r}_1 \times \vec{F}_1 + \vec{r}_2 \times \vec{F}_2 \Rightarrow \text{mit } \vec{F}_2 = -\vec{F}_1 \Rightarrow \vec{\tau} = \vec{r}_1 \times \vec{F}_1 + \vec{r}_2 \times (-\vec{F}_1) \Rightarrow \\ \vec{\tau} &= (\vec{r}_1 - \vec{r}_2) \times \vec{F}_1 \Rightarrow |\vec{\tau}| = |\vec{r}_1 - \vec{r}_2| |\vec{F}_1| \sin \beta = |\vec{r}_1 - \vec{r}_2| |\vec{F}_1| \sin(90^\circ - \phi) \Rightarrow \\ \text{da } \sin(90^\circ - \phi) &= \sin 90^\circ \cos \phi - \cos 90^\circ \sin \phi = \cos \phi \Rightarrow \\ \text{mit } |\vec{r}_1 - \vec{r}_2| \cos \phi &= D \Rightarrow |\vec{\tau}| = D |\vec{F}_1|\end{aligned}$$

The torque produced by a couple is the same about all points in space.

Da die resultierende Kraft eines Kräftepaars null ist, lässt sich ein Kräftepaar nur von einem zweiten Kräftepaar ausgleichen, das ein gleich großes, aber entgegengesetztes Drehmoment bewirkt.

Zwei betragsmäßig ungleiche, antiparallele Kräfte können durch eine einzelne Kraft ersetzt werden, die gleich der resultierenden, am Schwerpunkt angreifenden Kraft ist, plus einem Kräftepaar, das dasselbe Drehmoment bezüglich des Schwerpunkts verursacht wie die ursprüngliche Kräfte.



## 12.5 Statisches Gleichgewicht in beschleunigten Bezugssystemen (Static equilibrium in an accelerated frame)

Gleichgewichtsbedingungen für das statische Gleichgewicht in einem beschleunigten Bezugssystem:

$$\sum_i \vec{F}_i = m\vec{a}_{\text{CM}} \quad \text{wobei } \vec{a}_{\text{CM}} \text{ Beschleunigung des Massenmittelpunkts} = \text{Beschleunigung des Bezugssystems}$$

$$\sum_i \vec{\tau}_{\text{CM},i} = 0 \quad \text{d.h. die Summe aller Drehmomente bezüglich des Massenmittelpunkts muss null sein}$$

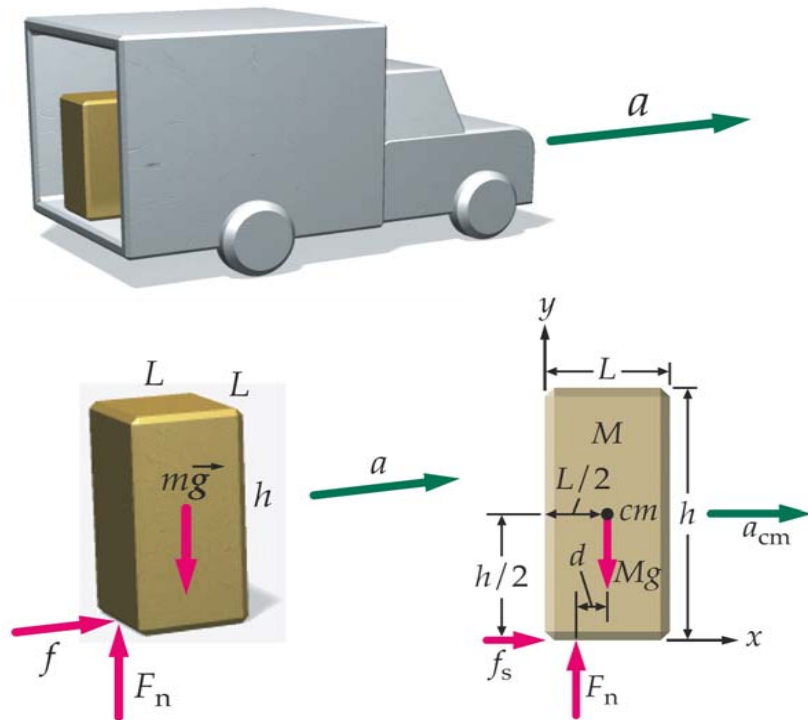
siehe auch Teil 9.6

If the torques are computed from a reference frame moving with the center of mass, then Newton's second law for rotation holds even when the center of mass is accelerating, and the torques are computed in the center-of-mass reference frame. That is,

$$\tau_{\text{net,cm}} = I_{\text{cm}} \alpha$$

9-30

Beispiel 12.6: Sichere Ladung



Gleichförmige Kiste im Laderaum eines Lieferwagens:

Kiste mit Masse  $M$ , Höhe  $h$ , quadratische Grundfläche mit Kantenlänge  $L$ , gesucht maximale Beschleunigung bevor Kiste umfällt (kein Rutschen bevor):

aus Kräfte diagramm und Gleichgewichtsbedingung  $\sum_i \vec{F}_i = m\vec{a}_{\text{CM}} \Rightarrow$

$$y\text{-Komponente: } \sum_i F_{i,y} = 0 \Rightarrow -Mg + F_n = 0 \Rightarrow F_n = Mg$$

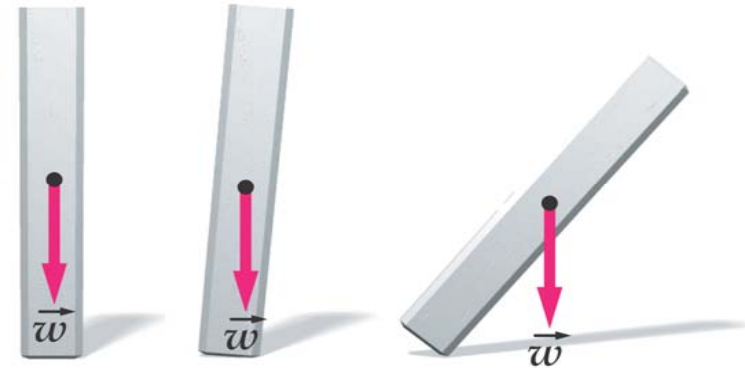
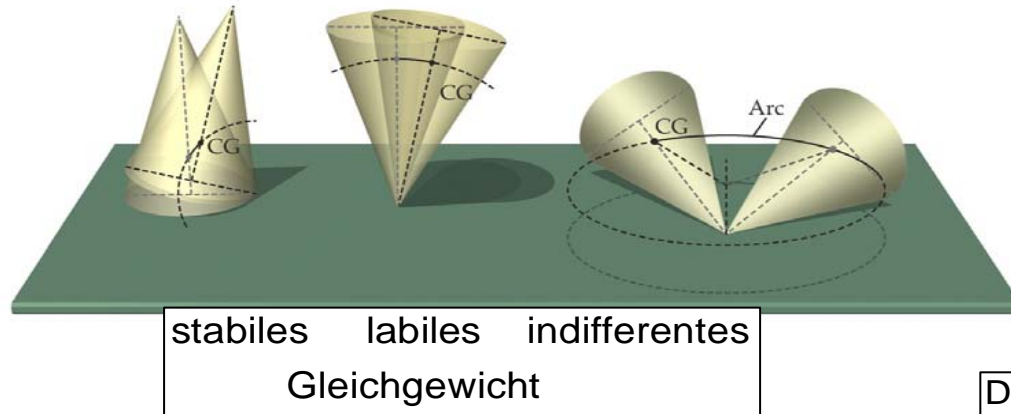
$$x\text{-Komponente: } \sum_i F_{i,x} = 0 \Rightarrow f_s = Ma_{\text{CM}}$$

$$\text{aus } \sum_i \vec{\tau}_{\text{CM},i} = 0 \Rightarrow \sum_i \tau_{\text{CM},i,z} = 0 \Rightarrow dF_n - \frac{h}{2}f_s = 0 \Rightarrow$$

maximal auszugleichende Drehmoment von  $F_n$  wenn  $d = \frac{L}{2} \Rightarrow$

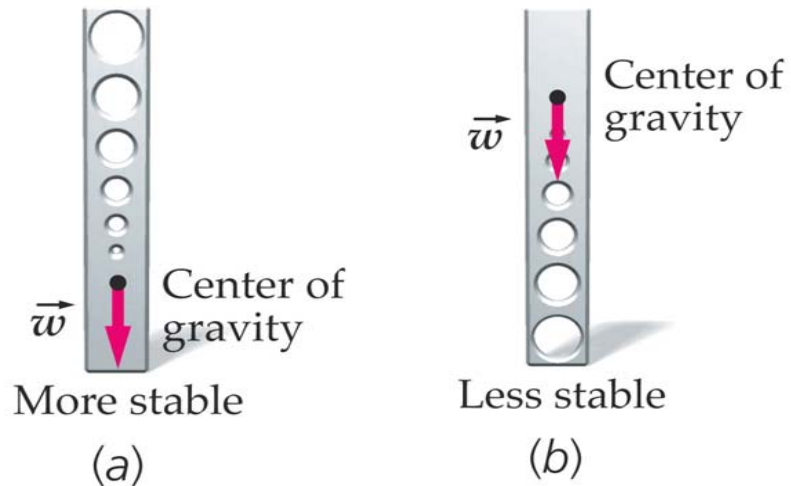
$$\frac{L}{2}F_n = \frac{h}{2}f_s \Rightarrow LMg = hMa_{\text{CM}} \Rightarrow a_{\text{CM}} = \frac{L}{h}g$$

## 12.6 Stabilität des Gleichgewichts (Stability of rotational equilibrium)

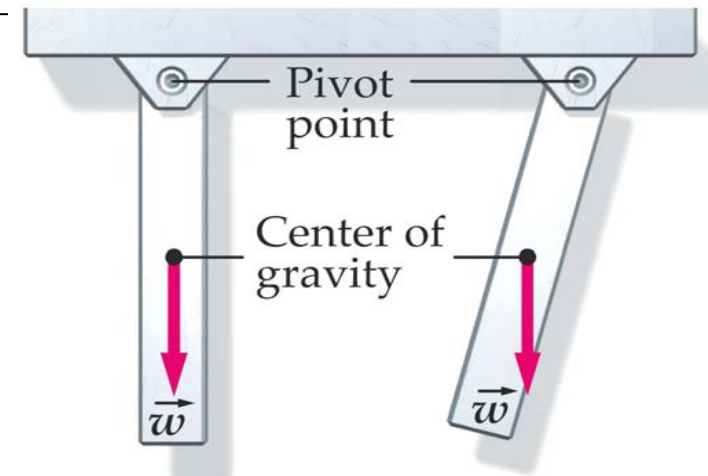


Die Stabilität einer Gleichgewichtslage ist eine relative Größe

Die Stabilität eines Systems lässt sich erhöhen, indem man entweder den Schwerpunkt tiefer legt oder die Grundfläche vergrößert.



Laufen lernen

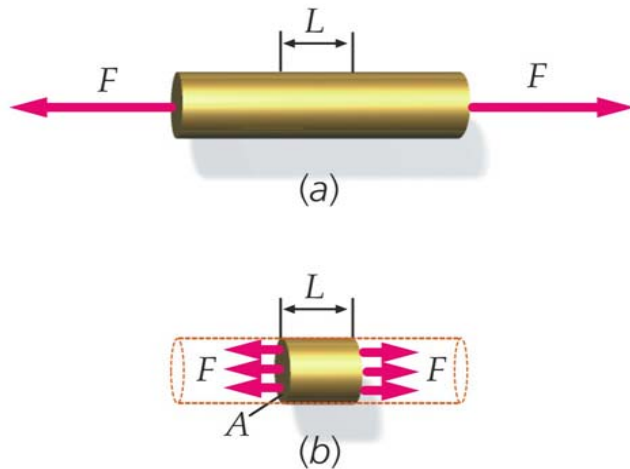


Liegt der Schwerpunkt unterhalb des Drehpunkts, dann ist das Gleichgewicht stabil

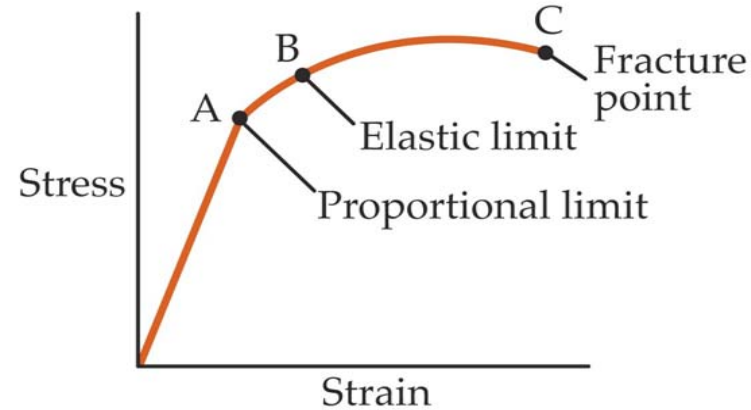
## 12.7 Unbestimmbare Probleme (Indeterminate problems)

Bislang Gleichgewichtsbetrachtungen für starre Körper,  
aber reale Körper lassen sich verformen  $\Rightarrow$   
mehr Informationen notwendig für Gleichgewichtsberechnungen

## 12.8 Spannung und Dehnung (Stress and strain)



Spannungs-Dehnungs-Diagramm eines typischen Metallstabs



Metallstab mit Zugkraft  $F$  an dessen  
beiden Enden.  
relative Längenänderung oder Dehnung (Strain):

$$\varepsilon = \frac{\Delta L}{L}$$

Spannung (stress): die auf die Einheitsfläche  
bezogene Kraft:

$$\sigma = \frac{F}{A}$$

Nimmt der Körper seine ursprüngliche Form wieder an,  
nachdem die Kräfte nicht mehr wirken, dann nennt man  
den Körper elastisch.

Hooke'sches Gesetz: linearer Zusammenhang zwischen der Spannung und der Dehnung.

Das Verhältnis von Spannung zu Dehnung im Proportionalitätsbereich ist eine materialabhängige Konstante  $E = \frac{\sigma}{\varepsilon}$  genannt

Dehnungsmodul, Elastizitätsmodul,  $E$ -Modul, im Englischen Young's modulus  $Y$

⇒ Hooke'sches Gesetz:  $\sigma = E\varepsilon$

$$Y = \frac{\text{stress}}{\text{strain}} = \frac{F/A}{\Delta L/L} \quad 12-9$$

TABLE 12-1

Young's Modulus  $Y$  and Strengths of Various Materials<sup>†</sup>

Material	$Y$ , GN/m <sup>2</sup> ‡	Tensile strength, MN/m <sup>2</sup>	Compressive strength, MN/m <sup>2</sup>
Aluminum	70	90	
Bone			
Tensile	16	200	
Compressive	9		270
Brass	90	370	
Concrete	23	2	17
Copper	110	230	
Iron (wrought)	190	390	
Lead	16	12	
Steel	200	520	520

<sup>†</sup> These values are representative. Actual values for particular samples may differ.

<sup>‡</sup> 1 GN = 10<sup>3</sup> MN = 1 × 10<sup>9</sup> N.

### YOUNG'S MODULUS DEFINED

Bizepsmuskel	
$A / \text{cm}^2$	12
$F / \text{N}$	300
$\sigma / \text{N m}^{-1}$	250000

Stab komprimiert statt gedehnt ⇒  
wirkende Spannung = Druckspannung

Bei vielen Materialien  $E_{\text{Druck}} = E_{\text{Zug}}$

Wert der Spannung (Zug, Druck)  
bei Zerstörung des Materials:  
Zugfestigkeit bzw. Druckfestigkeit



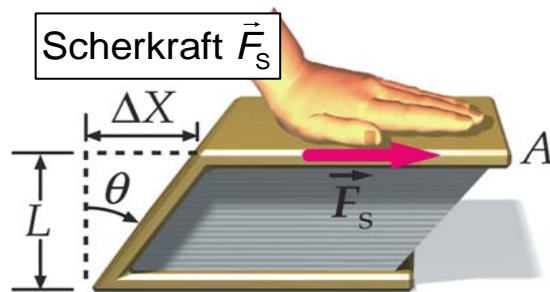
Eine Zugspannung bewirkt nicht nur eine Längenzunahme in Richtung der wirkenden Kraft, und gleichzeitig eine Querkontraktion  $\frac{\Delta d}{d}$  der Dicke des Stabes senkrecht zur Richtung der wirkenden Kraft.

Nach dem Hooke'schen Gesetz ist  $\frac{\Delta d}{d}$  proportional zu  $\frac{\Delta L}{L} \Rightarrow$  Proportionalitätskonstante Poisson'sche Zahl  $\mu = -\frac{\Delta d/d}{\Delta L/L}$

Stab mit quadratischem Querschnitt und Kantenlänge  $d$  unter Zug- oder Druckbelastung  $\Rightarrow$  Volumsänderung  $\Delta V$

$$\Rightarrow \Delta V = (d + \Delta d)^2 (L + \Delta L) - d^2 L = (d^2 + 2d\Delta d + (\Delta d)^2)(L + \Delta L) - d^2 L = d^2 L + 2dL\Delta d + (\Delta d)^2 L + d^2 \Delta L + 2\Delta d \Delta L + (\Delta d)^2 \Delta L - d^2 L$$

$$\Rightarrow \Delta V \approx 2dL\Delta d + d^2 \Delta L \Rightarrow \frac{\Delta V}{V} = \frac{2dL\Delta d + d^2 \Delta L}{d^2 L} = 2\frac{\Delta d}{d} + \frac{\Delta L}{L} = \frac{\Delta L}{L}(1 - 2\mu)$$



$$M_s = \frac{\text{shear stress}}{\text{shear strain}} = \frac{F_s/A}{\Delta X/L} = \frac{F_s/A}{\tan \theta} \quad 12-12$$

TABLE 12-2

Approximate Values of the Shear Modulus  $M_s$  of Various Materials

Material	$M_s$ , GN/m <sup>2</sup>
Aluminum	30
Brass	36
Copper	42
Iron	70
Lead	5.6
Steel	84
Tungsten	150

Die Scherspannung  $\tau = \frac{F_s}{A}$  bewirkt eine Verformung mit dem Scherwinkel  $\theta \Rightarrow$

$$\text{Scherung } \gamma = \frac{\Delta x}{L} = \tan \theta$$

Für kleine Scherwinkel  $\theta$  ist  $\frac{\tau}{\gamma}$  eine Materialkonstante:

$$\text{Schubmodul oder Torsionsmodul } G = \frac{\tau}{\gamma} = \frac{F_s/A}{\Delta x/L} = \frac{F_s/A}{\tan \theta}$$

$\Rightarrow$  Hooke'sches Gesetz für Torsionsspannung  $\tau = G\gamma$

Für kleine Winkel  $\theta$  ist  $\tan \theta \approx \theta \Rightarrow \tau = G\theta$  (siehe Teil 11.2)



## Beispiel 12.7: Sicherheit eines Fahrstuhls

Fahrstuhl, hängt an einem Seil mit Durchmesser  $2r = 3 \text{ cm}$ , Seillänge  $L = 300 \text{ m}$ , Masse Seil + Kabine  $m = 1000 \text{ kg}$ ,  
Dehnung des Seils um  $3 \text{ cm}$  unbedenklich,  
maximale Beschleunigung  $a = 1.5 \text{ m s}^{-2}$   
Gesucht: ist der Fahrstuhl sicher?

$$\text{aus Gl. (12.9)} \quad E = \frac{F_n/A}{\Delta L/L} \Rightarrow \Delta L = \frac{F_n/A}{E/L} = \frac{F_n L}{AE}$$

$$\text{aus zweites Newton'sches Axiom } F_n - mg = ma_y \Rightarrow F_n = ma_y + mg = m(a_y + g) \Rightarrow$$

$$F_{n,\max} = (1000 \text{ kg})(1.5 \text{ m s}^{-2} + 9.81 \text{ m s}^{-2}) = 11310 \text{ N}$$

$$\text{mit } E = 200 \times 10^9 \text{ N m}^{-2} \text{ und } A = \pi r^2 \Rightarrow \Delta L = \frac{F_n L}{AE} = \frac{(11310 \text{ N})(300 \text{ m})}{\pi (1.5 \times 10^{-2} \text{ m})^2 (200 \times 10^9 \text{ N m}^{-2})} = 2.4 \text{ cm}$$