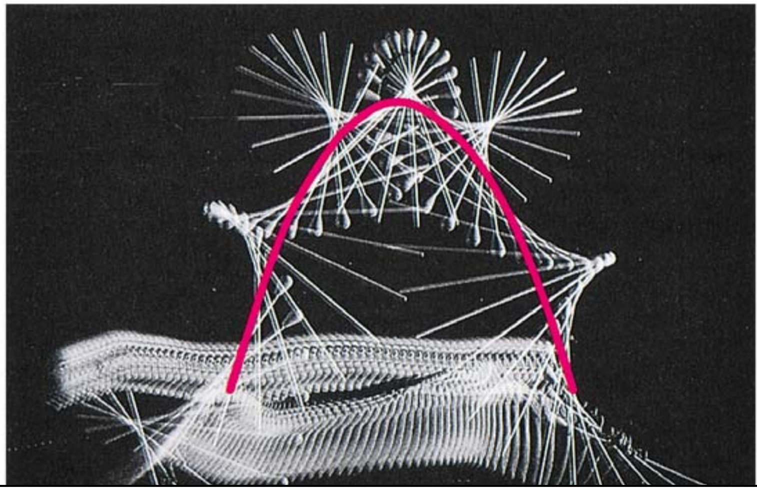
Tipler-Mosca

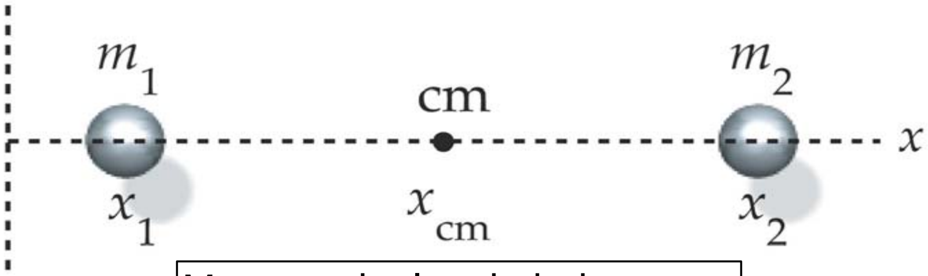
8. Teilchensysteme und die Erhaltung des linearen Impulses (Systems of particles and conservation of linear momentum)



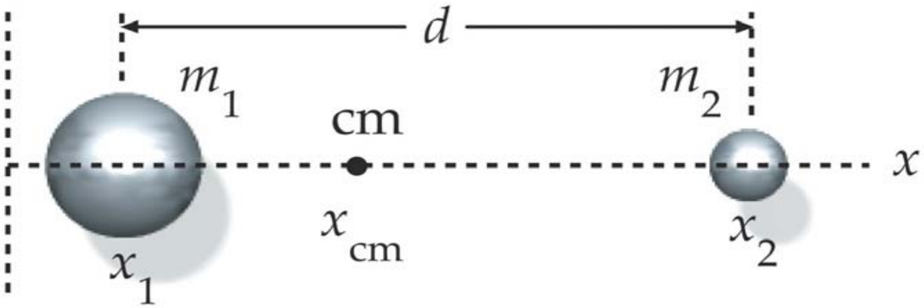
In jedem System gibt es einen Punkt, der sich so bewegt, als wäre die gesamte Masse des Systems in diesem Punkt vereint und als würden alle äußeren Kräfte auf das System auschschließlich in diesem Punkt angreifen $\Rightarrow$ Massenmittelpunkt

Dubbel

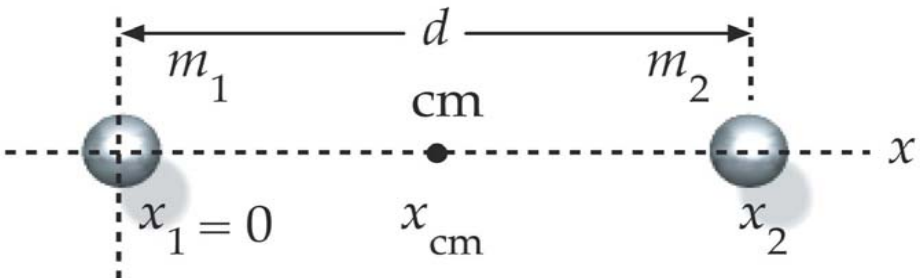
8.1 Der Massenmittelpunkt (The center of mass)



Massenmittelpunkt bei $m_1 = m_2$



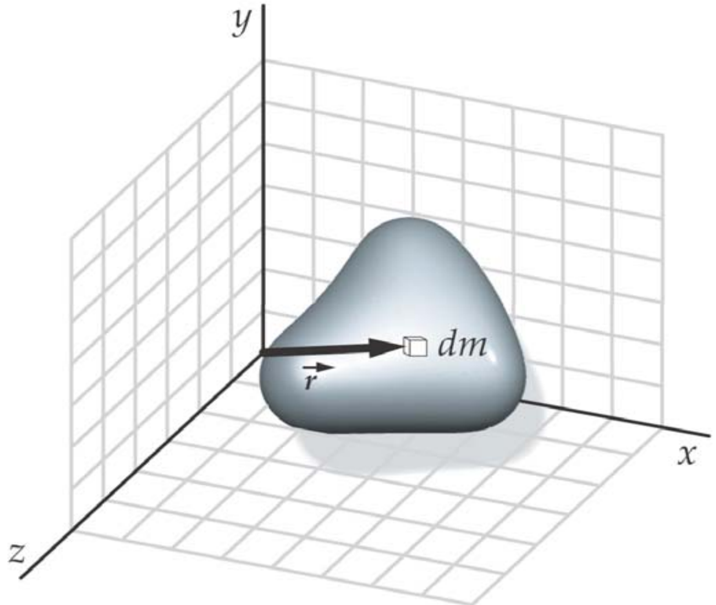
Massenmittelpunkt bei $m_1 \neq m_2$



Praktische Vorgangsweise bei Berechnungen des Massenmittelpunktes (center of mass CM)

$$M\vec{r}_{\mathrm{cm}} = m_1\vec{r}_1 + m_2\vec{r}_2 + \cdots = \sum_i m_i\vec{r}_i \qquad 8\text{-}5$$

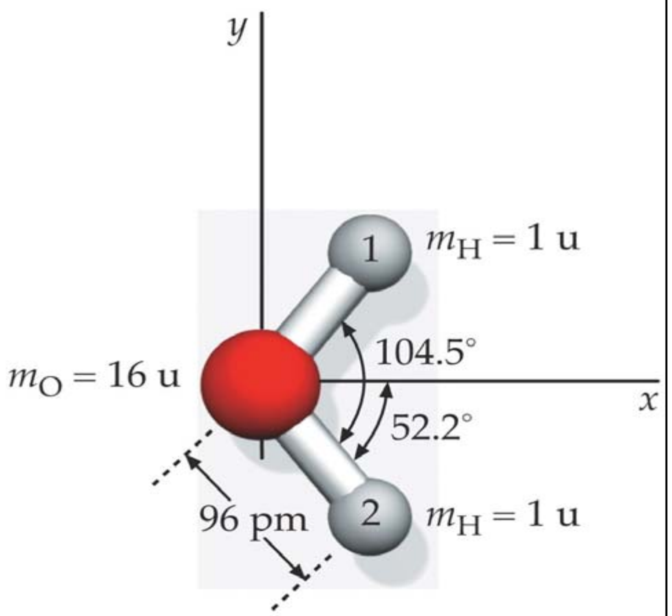
DEFINITION—CENTER OF MASS

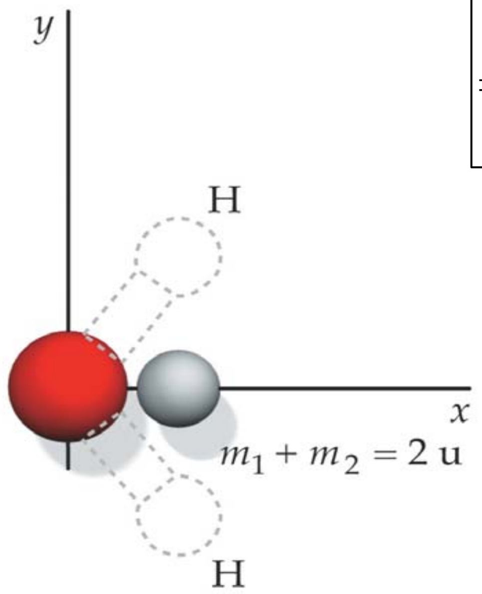


$$M\vec{r}_{\mathrm{cm}} = \int \vec{r}\, dm \qquad 8\text{-}6$$

CENTER OF MASS, CONTINUOUS OBJECT

Beispiel 8.1: Das Massenmittelpunkt des Wassermoleküls





Wassermolekül:

Sauerstoffatom: $m_O = 16$ amu   Wasserstoff: $m_H = 1$ amu $\Rightarrow\ m_{H_2O} = 18$ amu

$r_{\text{O-H}} = 96$ pm $\theta_{\text{H-0-H}} = 104.5°$

aus $x_{CM} = \dfrac{\sum_i m_i x_i}{m} \quad y_{CM} = \dfrac{\sum_i m_i y_i}{m} \quad \Rightarrow$

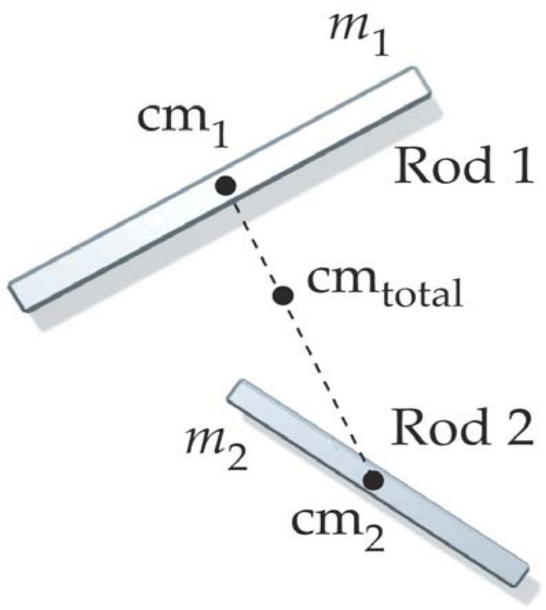
$$x_{CM} = \frac{m_H x_{H,1} + m_H x_{H,2} + m_O x_O}{m_{H_2O}} \quad y_{CM} = \frac{m_H y_{H,1} + m_H y_{H,2} + m_O y_O}{m_{H_2O}} \quad \Rightarrow$$

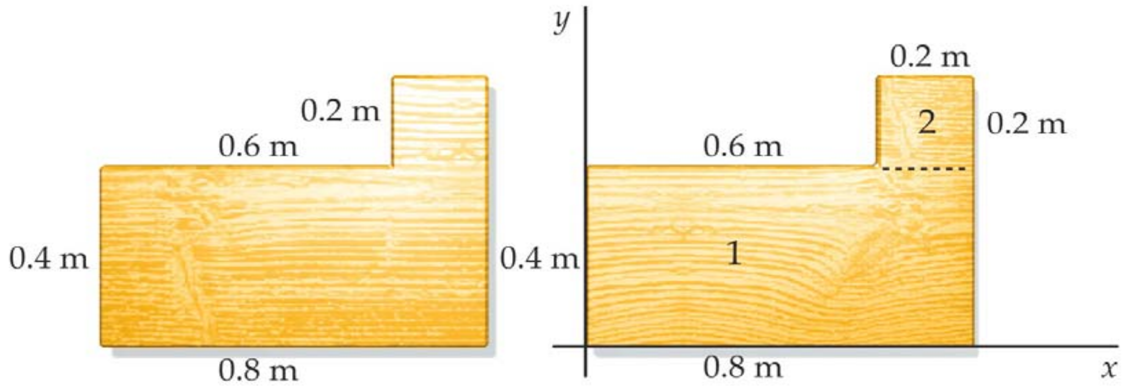
mit $x_O = 0 \quad y_O = 0 \quad x_{H,1} = r_{\text{O-H}} \cos\left(\dfrac{\theta_{\text{H-0-H}}}{2}\right) = x_{H,2} \quad y_{H,1} = r_{\text{O-H}} \sin\left(\dfrac{\theta_{\text{H-0-H}}}{2}\right) = -y_{H,2}$

$$\Rightarrow \quad x_{CM} = \frac{2 m_H r_{\text{O-H}} \cos\left(\dfrac{\theta_{\text{H-0-H}}}{2}\right)}{m_{H_2O}} \quad y_{CM} = 0$$

$$\Rightarrow \quad \vec{r}_{CM} = x_{CM}\vec{e}_x + y_{CM}\vec{e}_y$$

Beispiel 8.2: Massenmittelpunkt einer Sperrholzplatte





Den Massenmittelpunkt komplizierter Systeme kann man berechnen, indem man zunächst den Massenmittelpunkt für jeden Bestandteil des Systems bestimmt. Dann behandelt man das System so, als bestehe es nur aus Punktmassen am Ort der Teilmassenpunkten.

Sperrholzplatte:

besteht aus zwei symmetrische Teile: Teil 1 und Teil 2

Massen beider Teile proportional zu den Flächen $\Rightarrow \quad \frac{m}{A} = \text{konst}$

$\Rightarrow \quad m_1 \sim A_1 \quad m_2 \sim A_2 \quad m \sim A_1 + A_2$

aus $mx_{CM} = m_1 x_{CM,1} + m_2 x_{CM,2}$ und $my_{CM} = m_1 y_{CM,1} + m_2 y_{CM,2} \quad \Rightarrow$

$$x_{CM} = \frac{A_1}{A} x_{CM,1} + \frac{A_2}{A} x_{CM,2} \quad y_{CM} = \frac{A_1}{A} y_{CM,1} + \frac{A_2}{A} y_{CM,2}$$

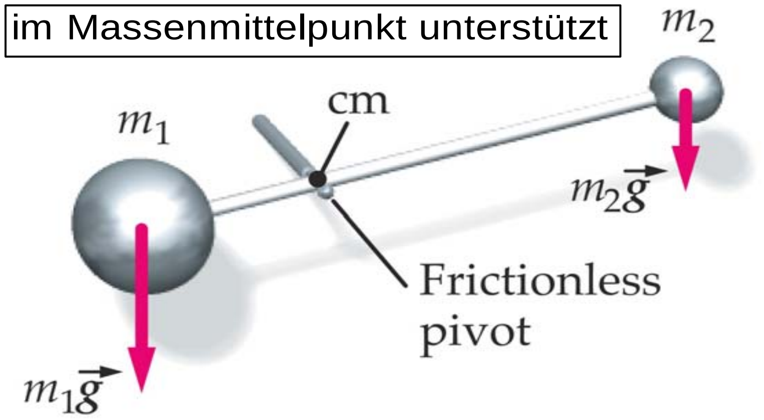
mit $x_{CM,1} = 0.4 \text{ m} \quad y_{CM,1} = 0.2 \text{ m} \quad x_{CM,2} = 0.7 \text{ m} \quad y_{CM,2} = 0.5 \text{ m}$ und

$A_1 = 0.32 \text{ m}^2 \quad A_2 = 0.04 \text{ m}^2 \quad \Rightarrow \quad A = 0.36 \text{ m}^2$

$$\Rightarrow \quad x_{CM} = \frac{0.32}{0.36}(0.4 \text{ m}) + \frac{0.04}{0.36}(0.7 \text{ m}) \quad y_{CM} = \frac{0.32}{0.36}(0.2 \text{ m}) + \frac{0.04}{0.36}(0.5 \text{ m})$$

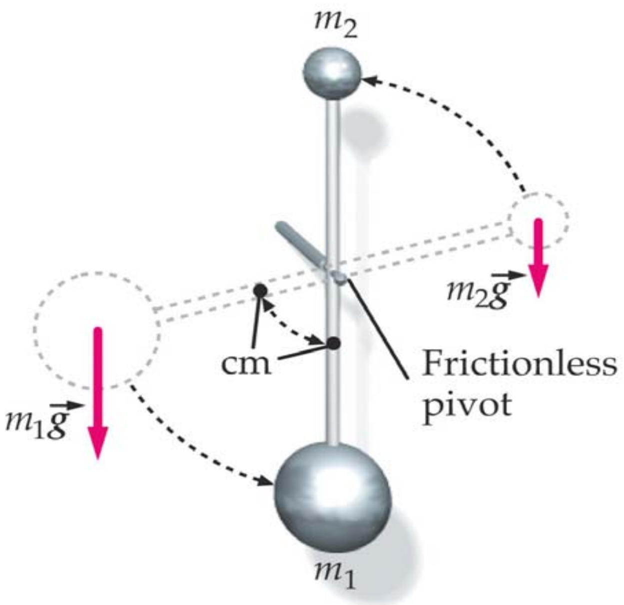
Potentielle Gravitationsenergie eines Systems

im Massenmittelpunkt unterstützt

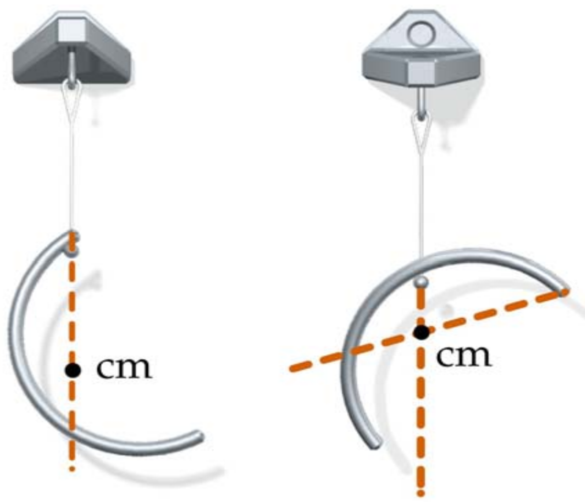


$$U = Mgh_{cm} \qquad 8\text{-}7$$

Die potentielle Gravitationsenergie E_{pot} eines Systems von Teilchen in einem konstanten Gravitationsfeld ist dieselbe, wie wenn die Gesamtmasse im Massenmittelpunkt vereinigt wäre.



an einem anderen Punkt unterstützt



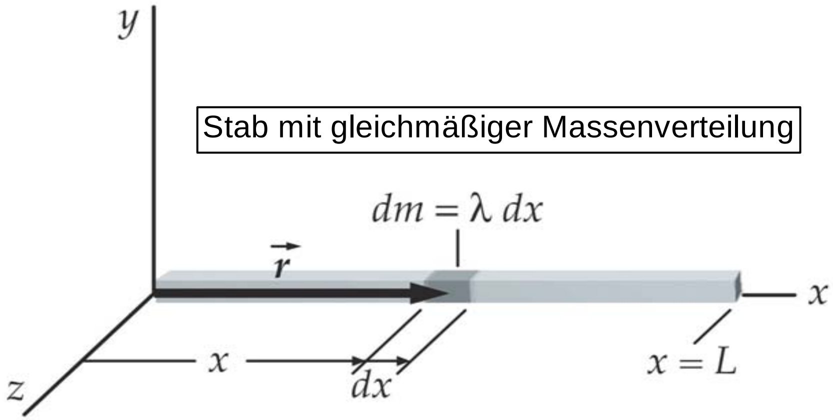
Bestimmung des Massenmittelpunktes durch Aufhängen

8.2 Bestimmung des Massenmittelpunkts durch Integration
(Finding the center of mass by integration)

$$M\vec{r}_{cm} = \int \vec{r}\,dm \qquad 8\text{-}6$$

CENTER OF MASS, CONTINUOUS OBJECT

Stab mit gleichmäßiger Massenverteilung



Massenelement dm der Länge dx in Entfernung x vom Ursprung $\Rightarrow$

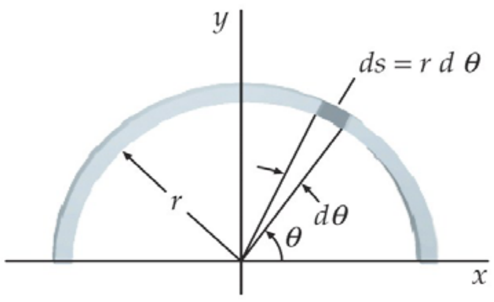
aus Gl. (8.6) mit $\vec{r} = x\vec{e}_x \quad \Rightarrow \quad M\vec{r}_{CM} = \int x\vec{e}_x\,dm$

Masse im Intervall $0 \le x \le L$ gleichmäßig verteilt $\Rightarrow$

mit $\lambda = \dfrac{dm}{dx} = \text{konst}$ Masse pro Einheitslänge $\Rightarrow \; dm = \lambda dx \quad \Rightarrow$

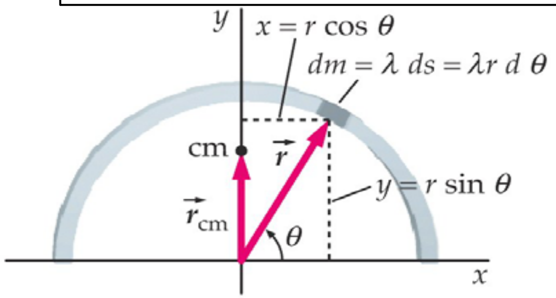
$$M\vec{r}_{CM} = \vec{e}_x \int_0^L x\lambda\,dx = \vec{e}_x\,\lambda\int_0^L x\,dx = \vec{e}_x\,\lambda \left.\frac{x^2}{2}\right|_0^L = \vec{e}_x\,\lambda\frac{L^2}{2}$$

da $\lambda = \dfrac{dm}{dx} = \dfrac{M}{L} \quad \Rightarrow \quad M = \lambda L \quad \Rightarrow \quad \vec{r}_{CM} = \vec{e}_x\dfrac{L}{2}$



(a)

Halbring mit gleichmäßiger Massenverteilung



(b)

Massenelement dm der Länge ds in Entfernung r vom Ursprung $\Rightarrow$

aus Gl. (8.6) mit $\vec{r} = x\vec{e}_x + y\vec{e}_y = r\cos\theta\vec{e}_x + r\sin\theta\vec{e}_y \quad \Rightarrow$

$$M\vec{r}_{CM} = \int r\left(\cos\theta\vec{e}_x + \sin\theta\vec{e}_y\right)dm$$

Masse im Intervall $0 \le \theta \le \pi$ gleichmäßig verteilt $\Rightarrow$

mit $\lambda = \dfrac{dm}{ds} = \text{konst}$ Masse pro Einheitslänge $\Rightarrow \; dm = \lambda ds = \lambda r\,d\theta \;\Rightarrow$

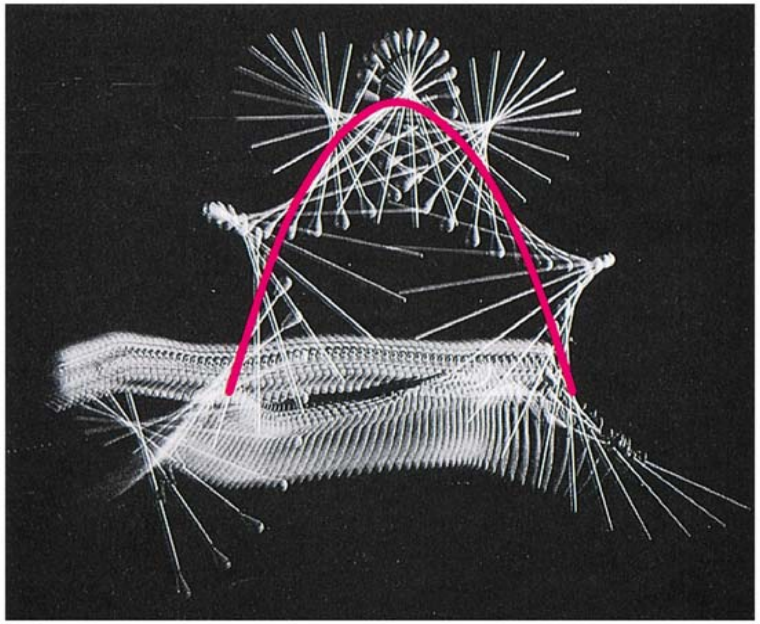
$$M\vec{r}_{CM} = \int_0^\pi r\left(\cos\theta\vec{e}_x + \sin\theta\vec{e}_y\right)\lambda r\,d\theta = r^2\lambda\int_0^\pi\left(\cos\theta\vec{e}_x + \sin\theta\vec{e}_y\right)d\theta =$$

$$= r^2\lambda\int_0^\pi \cos\theta\vec{e}_x\,d\theta + r^2\lambda\int_0^\pi \sin\theta\vec{e}_y\,d\theta = r^2\lambda\left(\vec{e}_x\sin\theta\Big|_0^\pi - \vec{e}_y\cos\theta\Big|_0^\pi\right) =$$

$$= r^2\lambda\left(\vec{e}_x(0-0) - \vec{e}_y(-1-1)\cos\theta\Big|_0^\pi\right) = 2r^2\lambda\vec{e}_y$$

da $\lambda = \dfrac{dm}{ds} = \dfrac{M}{r\pi} \quad \Rightarrow \quad M = \lambda r\pi \quad \Rightarrow \quad \vec{r}_{CM} = \dfrac{2r}{\pi}\vec{e}_y$

8.3 Bewegung des Massenmittelpunkts (Motion of the center of mass)



$$M\vec{v}_{cm} = m_1\vec{v}_1 + m_2\vec{v}_2 + \cdots = \sum_i m_i\vec{v}_i \qquad 8\text{-}8$$

$$M\vec{a}_{cm} = m_1\vec{a}_1 + m_2\vec{a}_2 + \cdots = \sum_i m_i\vec{a}_i \qquad 8\text{-}9$$

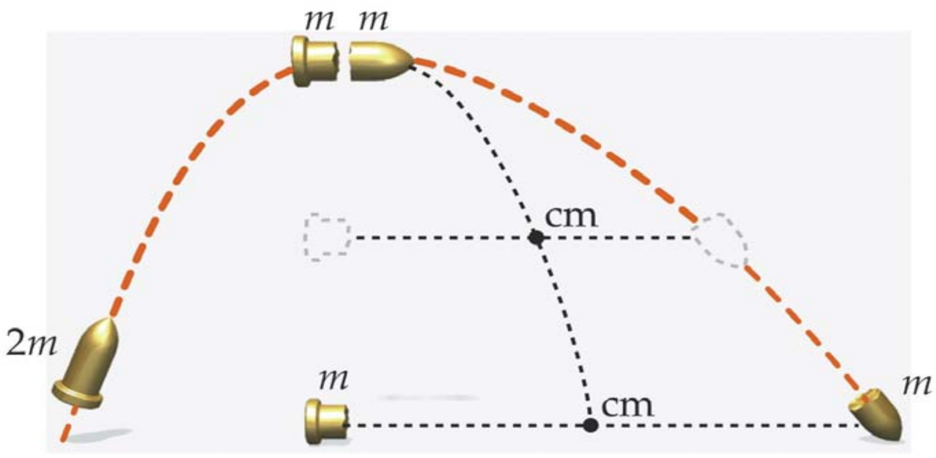
$$\vec{F}_{\text{net,ext}} = \sum_i \vec{F}_{\text{i,ext}} = M\vec{a}_{cm} \qquad 8\text{-}11$$

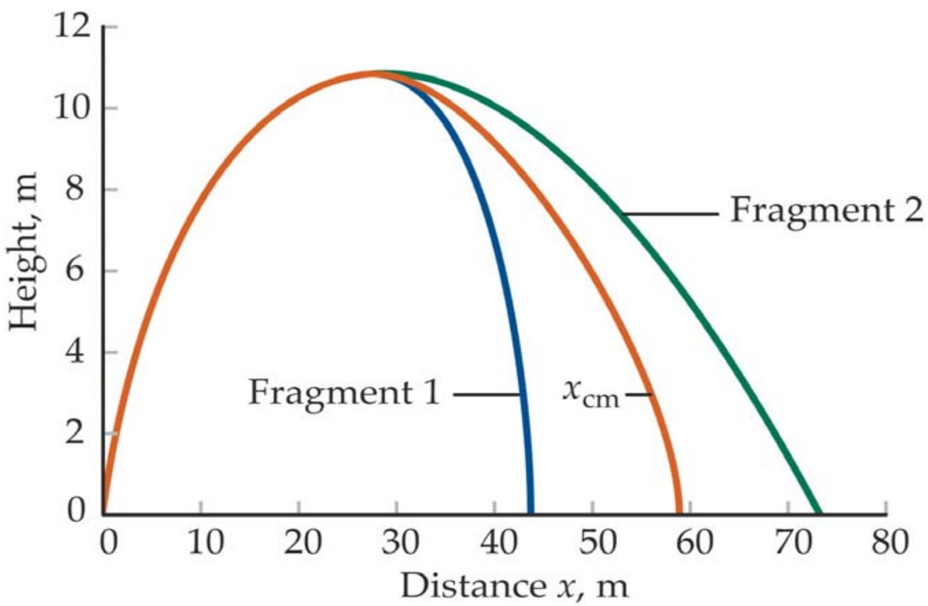
NEWTON'S SECOND LAW FOR A SYSTEM

The center of mass of a system moves like a particle of mass $M = \Sigma\, m_i$ under the influence of the net external force acting on the system.

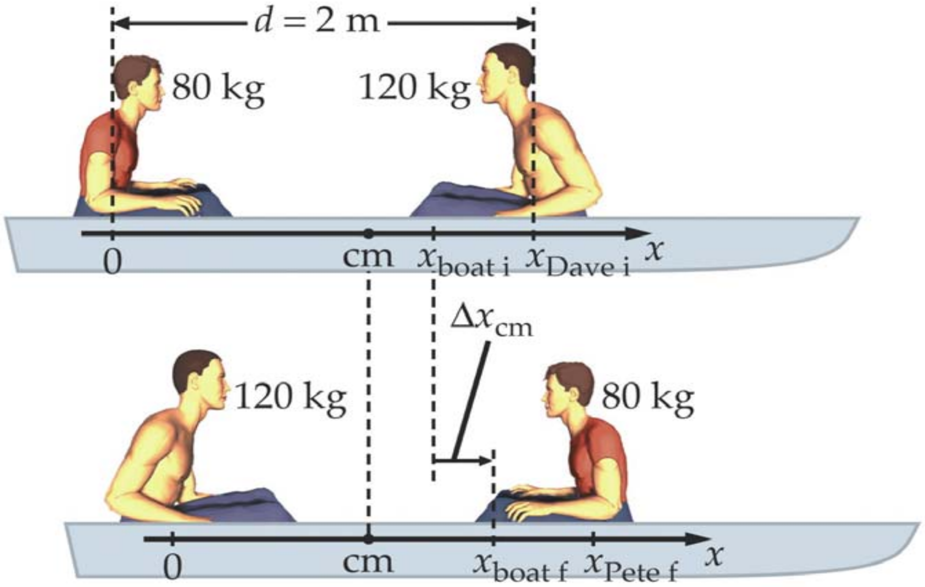
Auf ein System wirken nur externe Kräfte, da alle innere Kräfte für jedes Aktions-Reaktionspaar sich zu null summieren, d.h. $\sum_i \vec{F}_{i,\text{int}} = 0$.

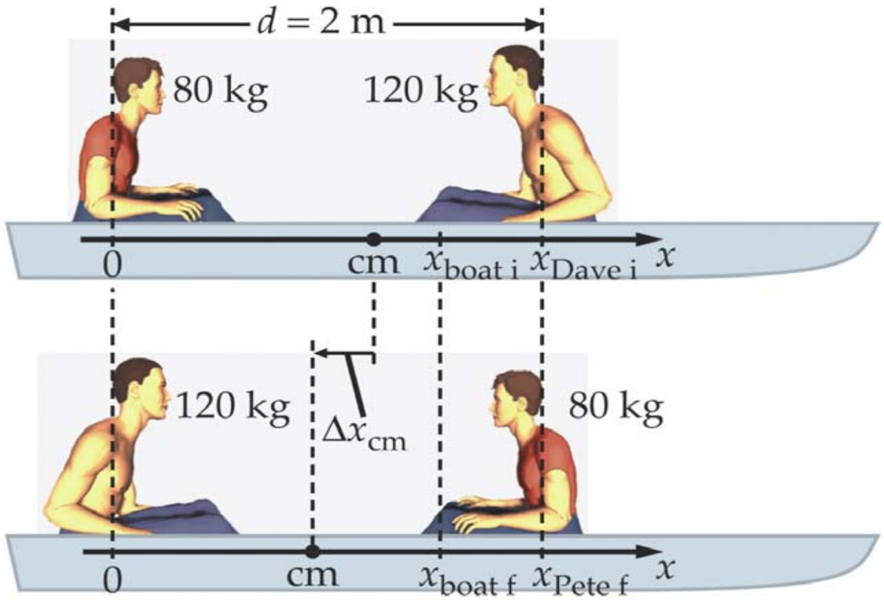
Beispiel 8.3: Ein explodierendes Geschoss



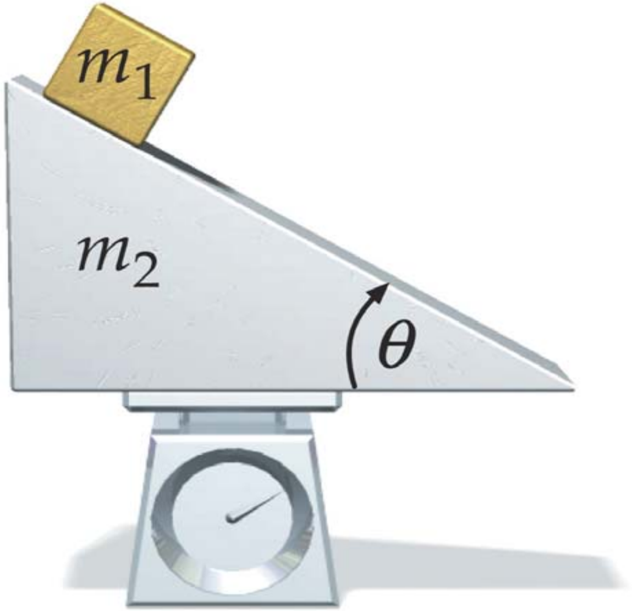


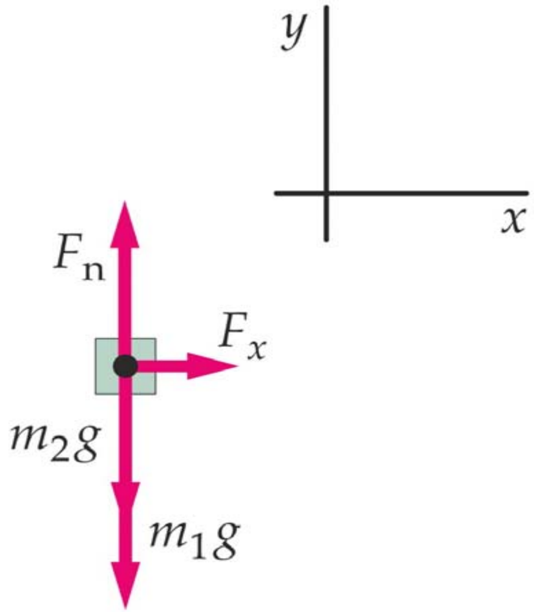
Beispiel 8.4: Plätze tauschen im Ruderboot





Beispiel 8.5: Ein rutschender Block





8.4 Impulserhaltung (Conservation of linear momentum)

$$\vec{p} = m\vec{v} \qquad 8\text{-}12$$

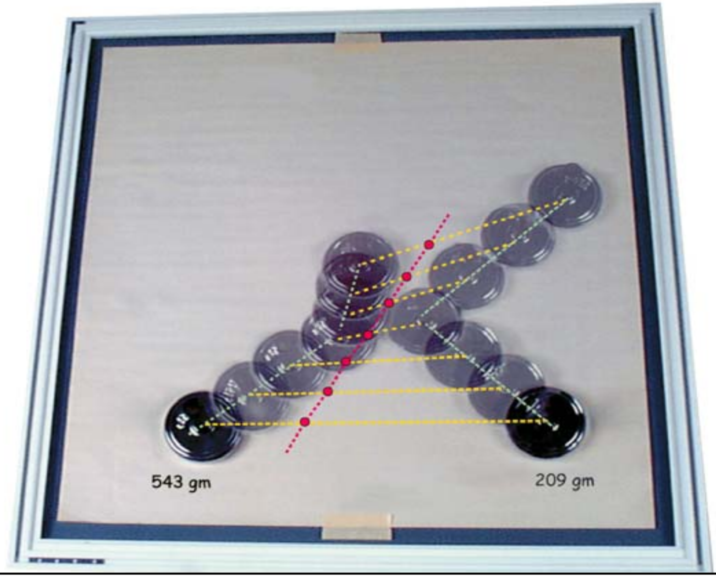
DEFINITION—MOMENTUM OF A PARTICLE

Der lineare Impuls

aus dem zweiten Newton'sche Axiom unter der Annahme $m = \text{konst} \quad \Rightarrow$

$$\frac{d\vec{p}}{dt} = \frac{d(m\vec{v})}{dt} = m\frac{d\vec{v}}{dt} = m\vec{a} = \vec{F}$$

Die auf ein Teilchen wirkende Kraft ist gleich der zeitlichen Änderung des Impulses von diesem Teilchen.



$$\vec{P}_{sys} = \sum_i m_i\vec{v}_i = M\vec{v}_{cm} \qquad 8\text{-}14$$

TOTAL MOMENTUM OF A SYSTEM

Die Geschwindigkeit des Massenmittelpunktes bleibt konstant und wird durch die internen Kräfte beim Stoß nicht geändert.

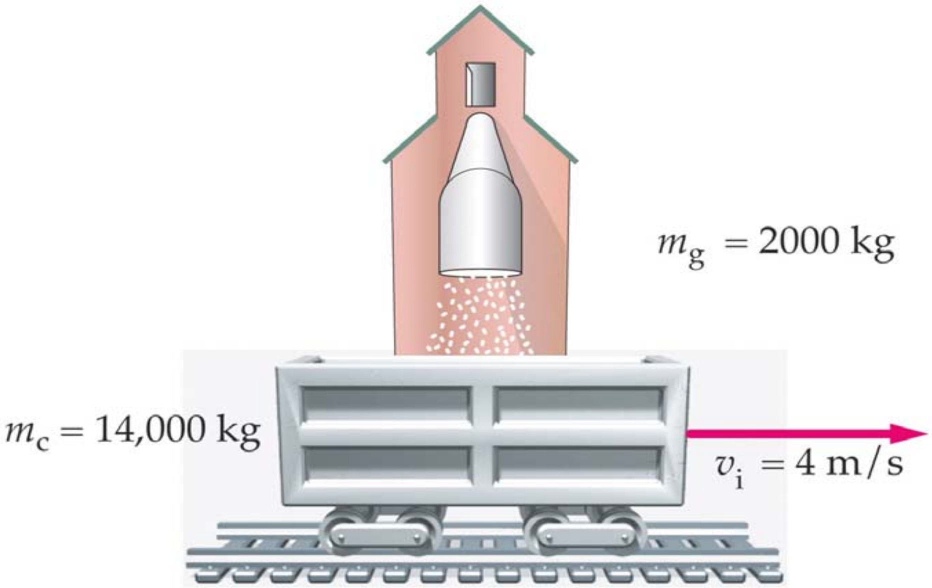
$$\vec{P}_{sys} = \sum_i m_i\vec{v}_i = M\vec{v}_{cm} = \text{constant} \qquad (\vec{F}_{net,ext} = 0) \qquad 8\text{-}16$$

CONSERVATION OF MOMENTUM

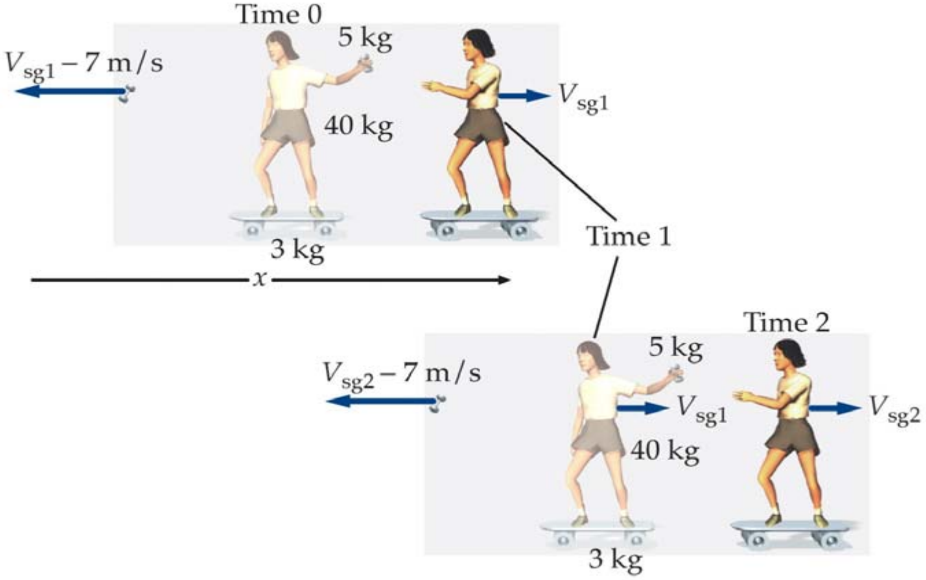
If the net external force on a system remains zero, the total momentum of the system remains constant.

Beispiel 8.6: Reparatur im Weltraum

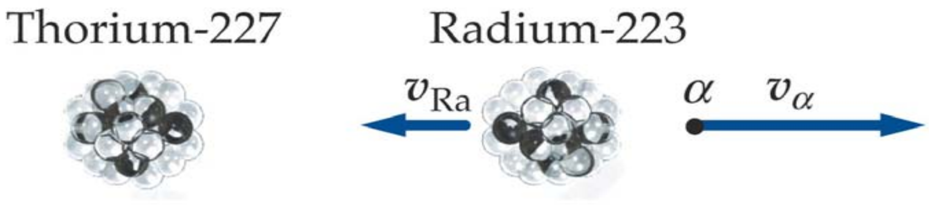
Beispiel 8.7: Waggon im Rangierbahnhof



Beispiel 8.8: Training mit dem Skateboard



Beispiel 8.9: Radioaktiver Zerfall



8.5 Kinetische Energie eines Systems von Teilchen (Kinetic energy of a system)

The kinetic energy of a system of particles can be written as the sum of two terms: (1) the kinetic energy associated with the motion of the center of mass, $\frac{1}{2}Mv_{cm}^2$, where M is the total mass of the system; and (2) the kinetic energy associated with the motion of the particles of the system relative to the center of mass, $\Sigma \frac{1}{2} m_i u_i^2$, where $\vec{u}_i$ is the velocity of the ith particle relative to the center of mass.

THEOREM FOR THE KINETIC ENERGY OF A SYSTEM

$$K = \sum_i \frac{1}{2} m_i v_{cm}^2 + \sum_i \frac{1}{2} m_i u_i^2 = \frac{1}{2} M v_{cm}^2 + K_{rel} \qquad \text{8-18}$$

KINETIC ENERGY OF A SYSTEM OF PARTICLES

8.6 Stöße (Collisions)

Bei einem Stoß bewegen sich zwei Körper aufeinander zu, wirken für eine sehr kurze Zeit stark aufeinander ein (elastischer Stoß, inelastischer Stoß) und entfernen sich wieder voneinander (Ausnahme: vollständig inelastischer Stoß)

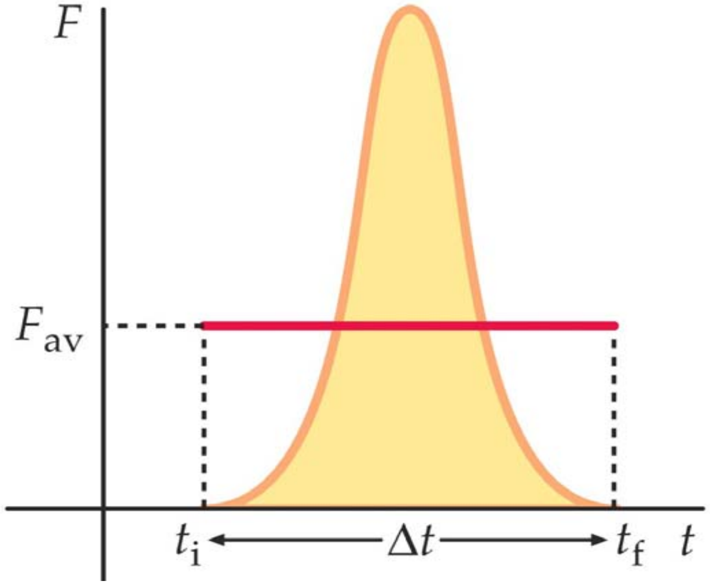
Kraftstoß und zeitliches Mittel der Kraft

$$\vec{I} = \int_{t_i}^{t_f} \vec{F}\, dt \qquad \text{8-19}$$

DEFINITION—IMPULSE

Definition des Kraftstoßes

Deutsche Ausgabe $\Delta\vec{p}$ Englische Ausgabe $\vec{I}$



$$\vec{I}_{\text{net}} = \int_{t_i}^{t_f} \vec{F}_{\text{net}}\, dt = \int_{t_i}^{t_f} \frac{d\vec{p}}{dt}\, dt = \vec{p}_f - \vec{p}_i = \Delta\vec{p} \qquad \text{8-20}$$

IMPULSE–MOMENTUM THEOREM FOR A PARTICLE

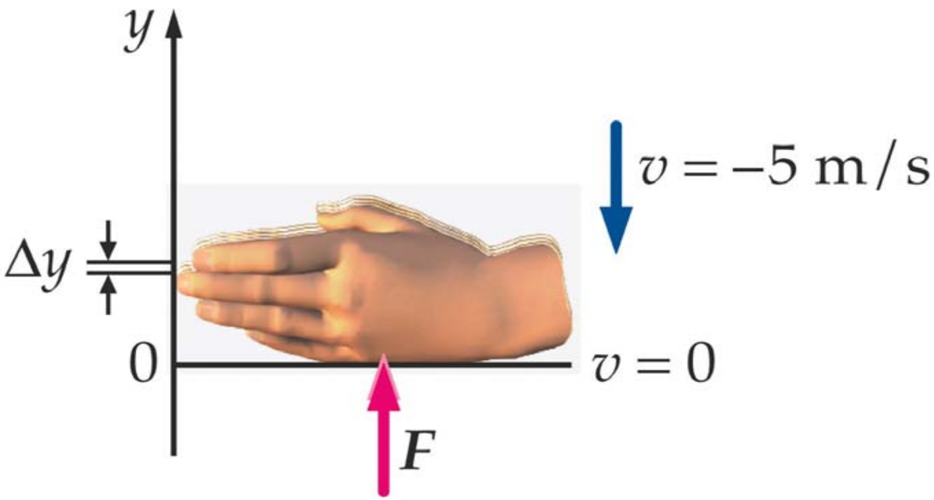
$$\vec{I}_{\text{net,ext}} = \int_{t_i}^{t_f} \vec{F}_{\text{net,ext}}\, dt = \Delta\vec{P}_{\text{sys}} \qquad \text{8-21}$$

IMPULSE–MOMENTUM THEOREM FOR A SYSTEM

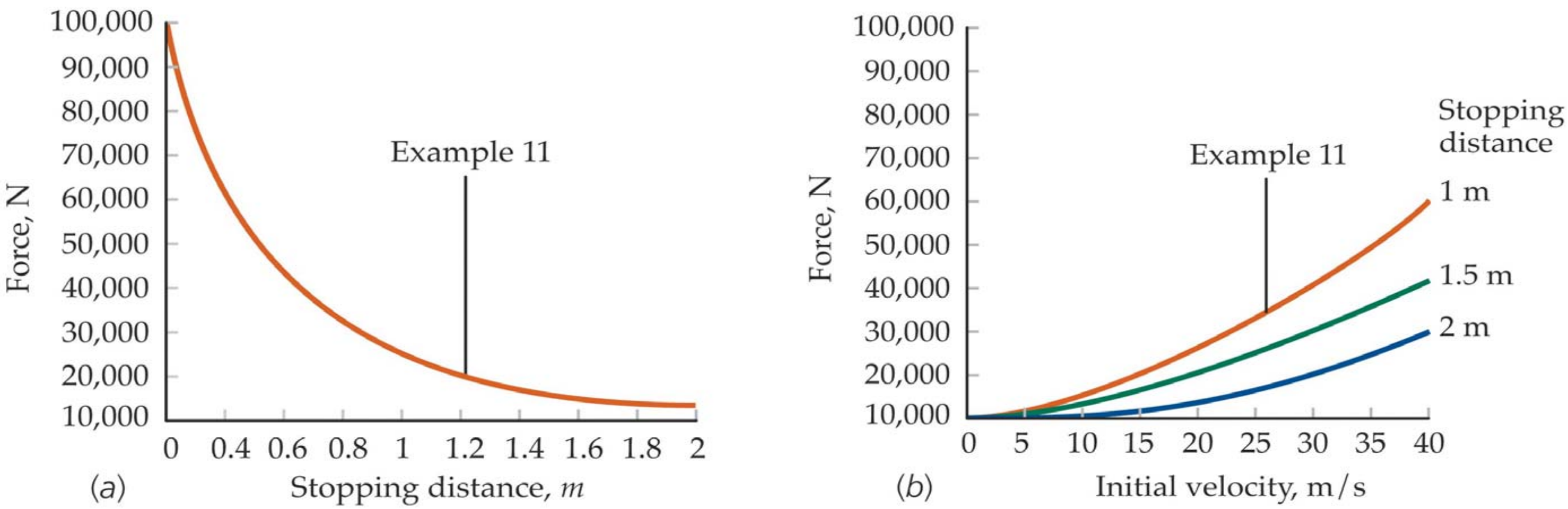
$$\vec{F}_{\text{av}} = \frac{1}{\Delta t}\int_{t_i}^{t_f} \vec{F}\, dt = \frac{\vec{I}}{\Delta t} \qquad \text{8-22}$$

DEFINITION—AVERAGE FORCE

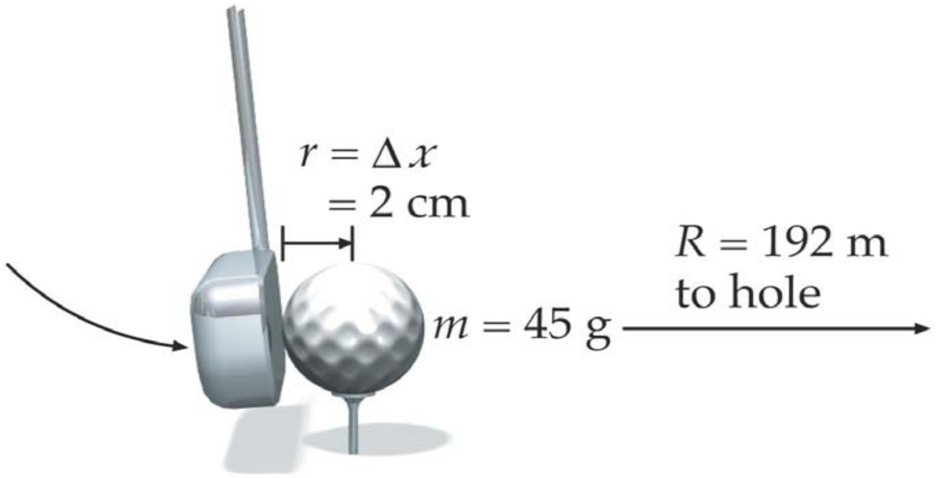
Beispiel 8.10: Der Karateschlag



Beispiel 8.11: Crashtest



Beispiel 8.12: Golfball



Stöße in einer Dimension

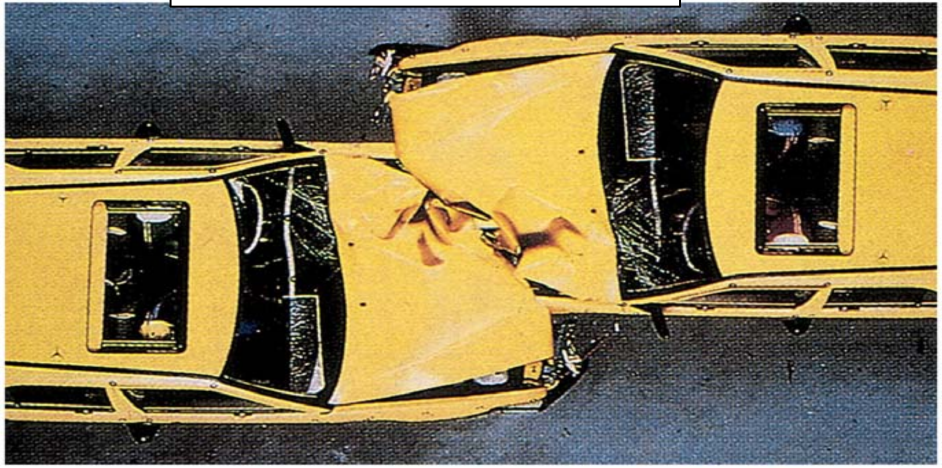
$$\boxed{m_1 v_{1,f} + m_2 v_{2,f} = m_1 v_{1,i} + m_2 v_{2,i}}$$

aus $E_{\text{kin}} = \frac{1}{2} m v^2 \quad \Rightarrow \quad$ mit $p = mv \quad \Rightarrow$

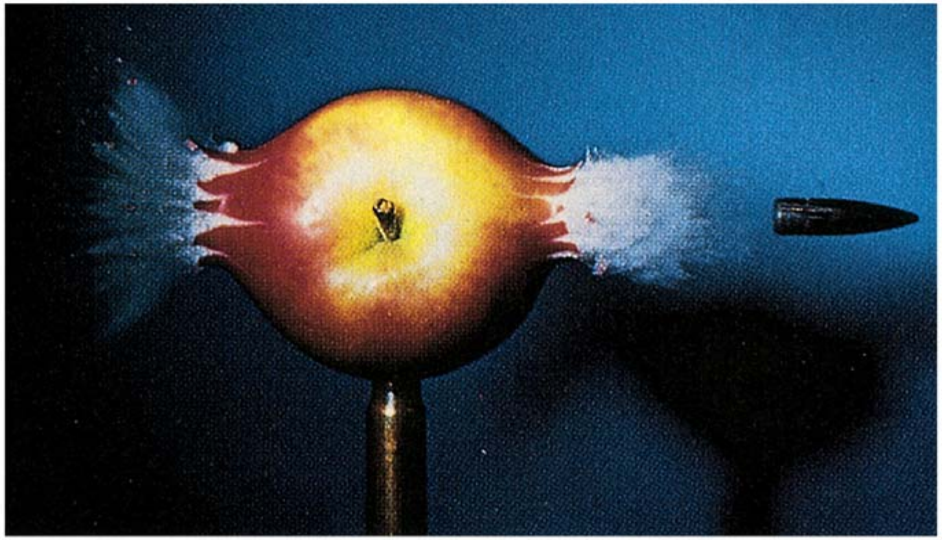
$$E_{\text{kin}} = \frac{1}{2} m v^2 = \frac{p^2}{2m}$$

Vollständig inelastische Stöße

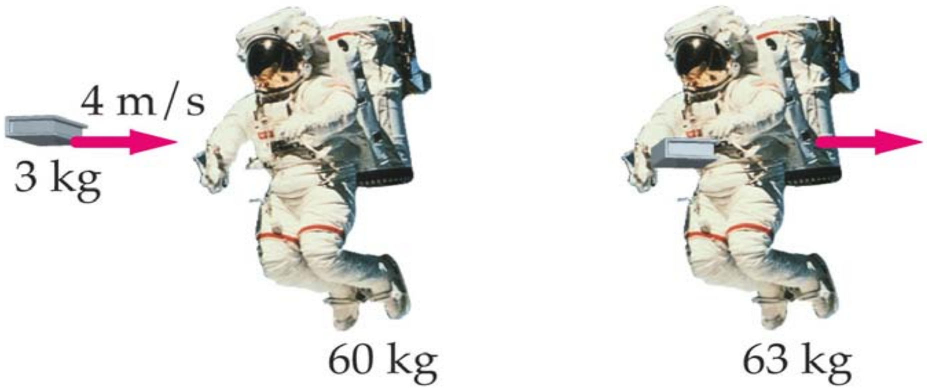
$$v_{1,f} = v_{2,f} = v_{\text{CM}}$$
$$\left(m_1 + m_2\right) v_{\text{CM}} = m_1 v_{1,i} + m_2 v_{2,i}$$



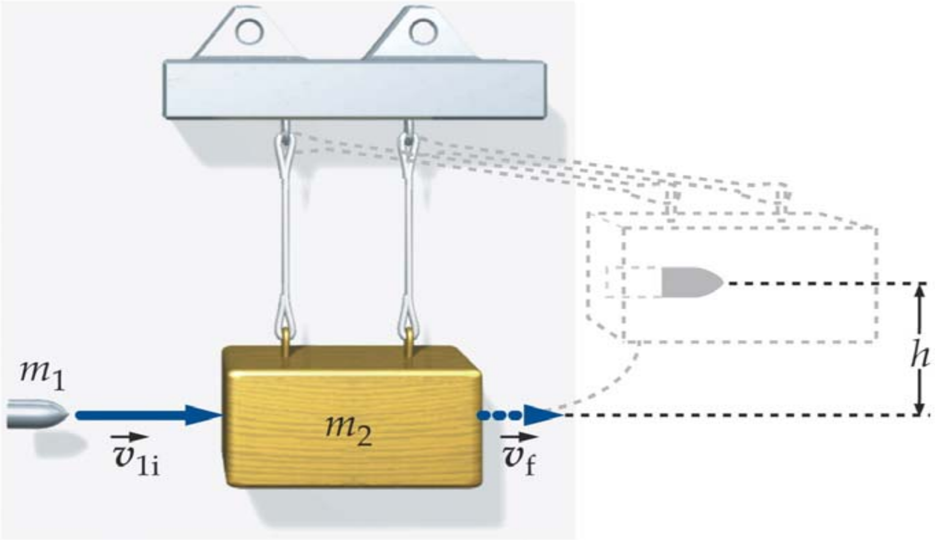
Inelastische Stöße



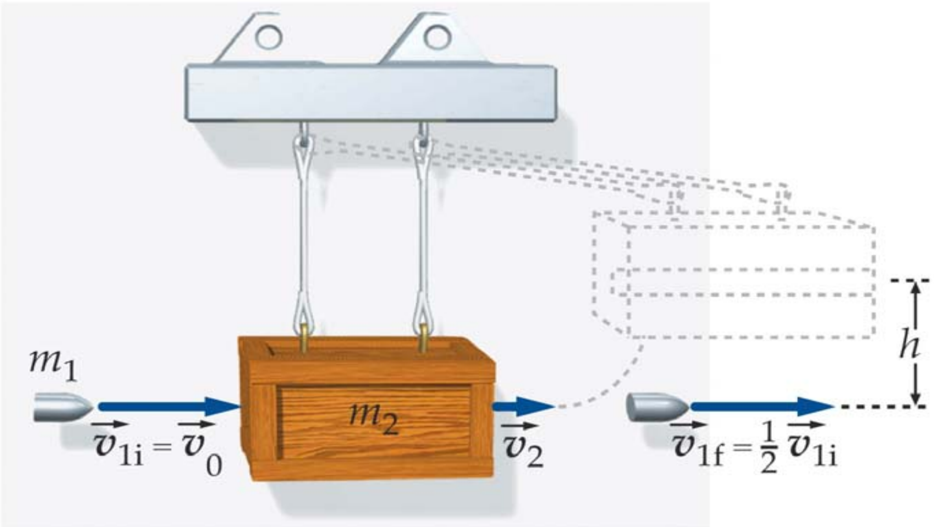
Beispiel 8.13: Auffangen im Weltall



Beispiel 8.14: Ein ballistisches Pendel



Beispiel 8.15: Schuss auf eine leere Kiste



Vollständig elastische Stöße

$$m_1 v_{1,f} + m_2 v_{2,f} = m_1 v_{1,i} + m_2 v_{2,i}$$
$$\frac{1}{2} m_1 v_{1,f}^2 + \frac{1}{2} m_2 v_{2,f}^2 = \frac{1}{2} m_1 v_{1,i}^2 + \frac{1}{2} m_2 v_{2,i}^2$$

aus $E_{\text{kin}} = \frac{1}{2} m v^2 \quad \Rightarrow \quad$ mit $p = mv \quad \Rightarrow$

$$E_{\text{kin}} = \frac{1}{2} m v^2 = \frac{p^2}{2m}$$

Annäherung und Trennung beim elastischen Stoß

aus $\frac{1}{2} m_1 v_{1,f}^2 + \frac{1}{2} m_2 v_{2,f}^2 = \frac{1}{2} m_1 v_{1,i}^2 + \frac{1}{2} m_2 v_{2,i}^2 \quad \Rightarrow \quad m_2 \left(v_{2,f}^2 - v_{2,i}^2\right) = -m_1 \left(v_{1,f}^2 - v_{1,i}^2\right) \quad \Rightarrow$

$$m_2 \left(v_{2,f} + v_{2,i}\right)\left(v_{2,f} - v_{2,i}\right) = -m_1 \left(v_{1,f} + v_{1,i}\right)\left(v_{1,f} - v_{1,i}\right)$$

aus $m_1 v_{1,f} + m_2 v_{2,f} = m_1 v_{1,i} + m_2 v_{2,i} \quad \Rightarrow \quad m_2 \left(v_{2,f} - v_{2,i}\right) = -m_1 \left(v_{1,f} - v_{1,i}\right) \quad \Rightarrow$

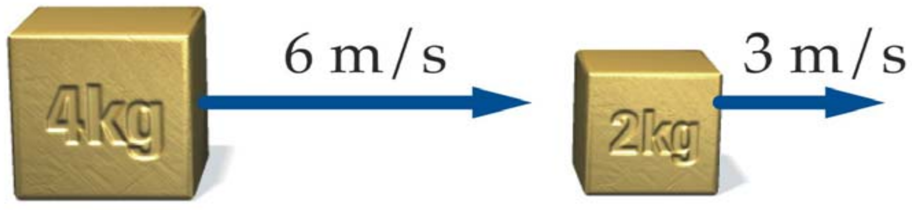
Division $\quad \Rightarrow \quad v_{2,f} + v_{2,i} = v_{1,f} + v_{1,i} \quad \Rightarrow \quad v_{2,f} - v_{1,f} = -\left(v_{2,i} - v_{1,i}\right)$

$$v_{2\text{f}} - v_{1\text{f}} = -(v_{2\text{i}} - v_{1\text{i}}) \qquad \text{8-31}$$

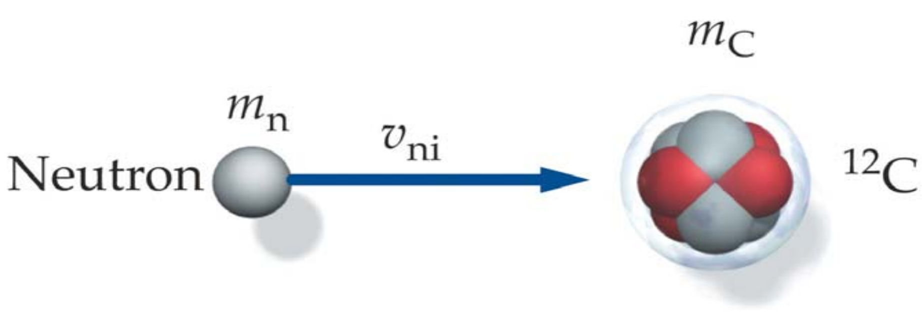
RELATIVE VELOCITIES IN AN ELASTIC COLLISION

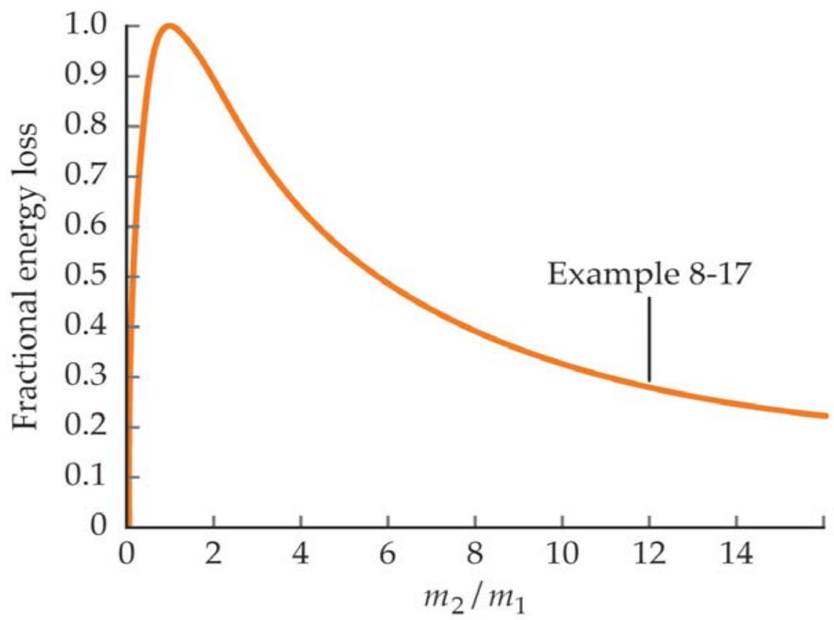
In elastic collisions, the speed of recession equals the speed of approach.

Beispiel 8.16: Elastischer Stoß von zwei Blöcken

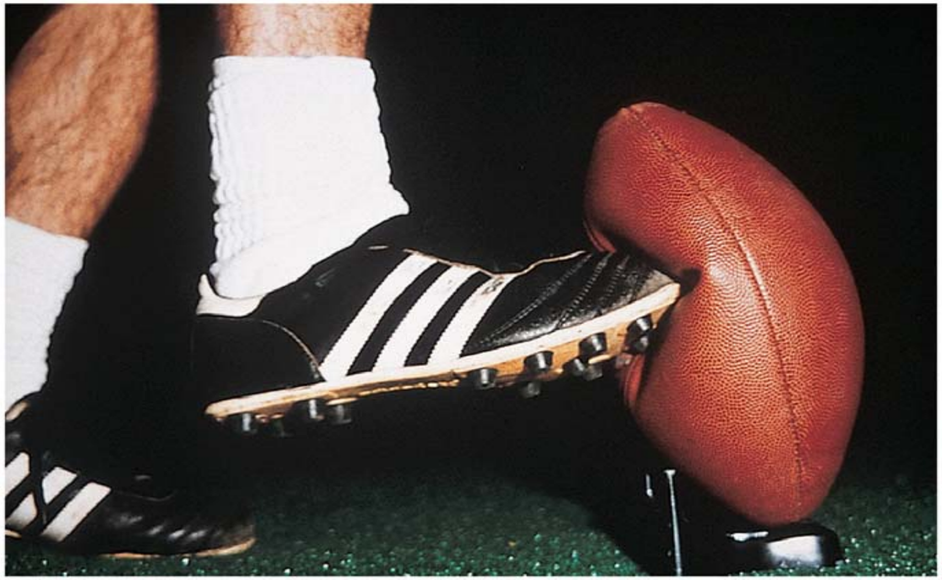


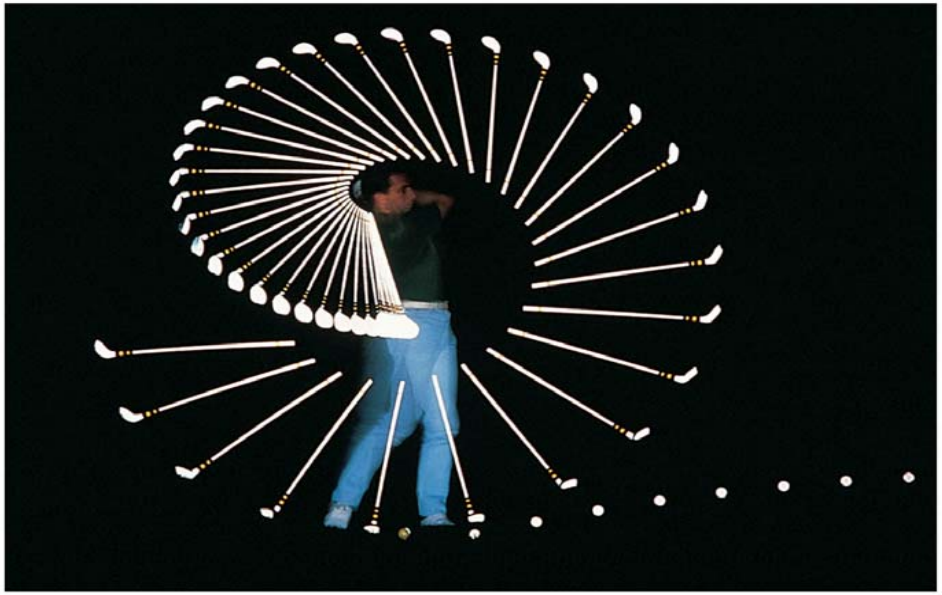
Beispiel 8.17: Elastischer Stoß von einem Neutron und einem Atomkern





Die Elastizitätszahl





$$e = \frac{v_{\text{rec}}}{v_{\text{app}}} = -\frac{v_{2\text{f}} - v_{1\text{f}}}{v_{2\text{i}} - v_{1\text{i}}} \qquad \text{8-33}$$

DEFINITION—COEFFICIENT OF RESTITUTION

$$e = \frac{\text{relative Rückstoßgeschwindigkeit}}{\text{relative Annäherungsgeschwindigkeit}}$$

Elastizitätszahl oder Elastizitätskoeffizient e:

Maß für die Elastizität eines Stoßes $\Rightarrow$

Für einen elastischen Stoß $e = 1$

Für einen vollständig inelastischen Stoß $e = 0$

Stöße in drei Dimensionen

$$\boxed{m_1\vec{v}_{1,f} + m_2\vec{v}_{2,f} = m_1\vec{v}_{1,i} + m_2\vec{v}_{2,i}}$$

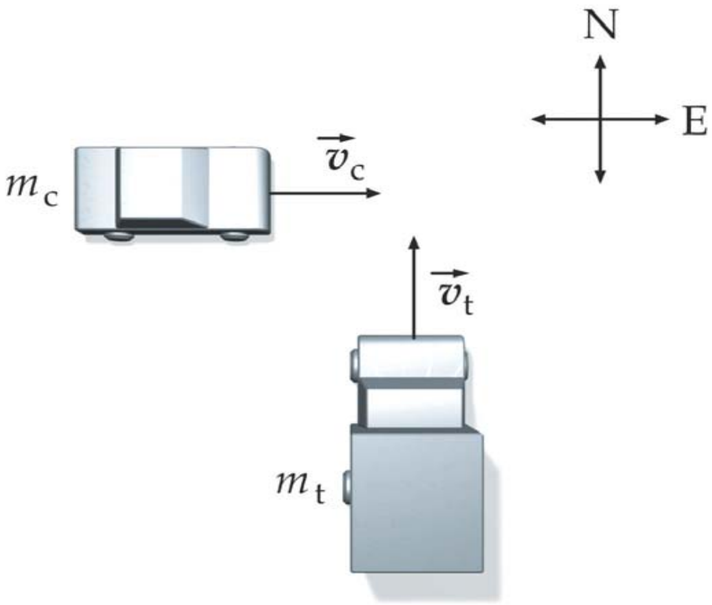
Vollständig inelastische Stöße in drei Dimensionen

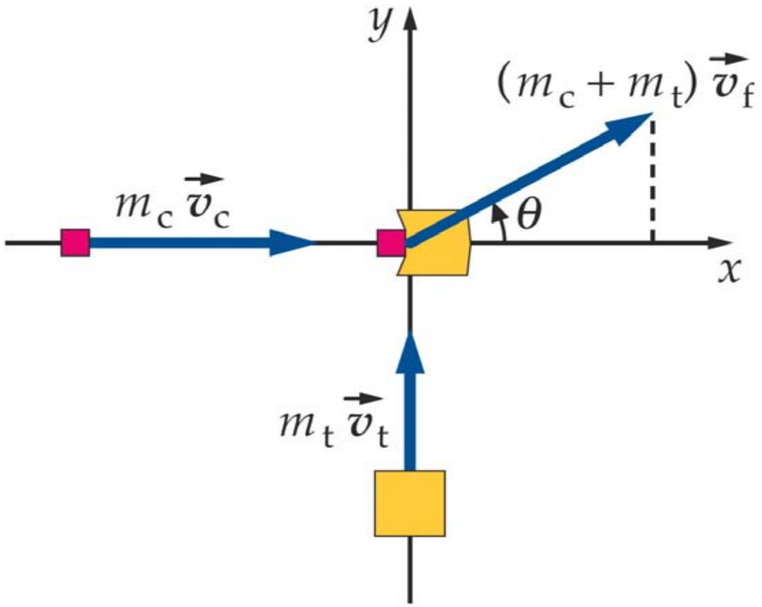
$$(m_1 + m_2)\vec{v}_f = m_1\vec{v}_{1,i} + m_2\vec{v}_{2,i}$$

wobei $\vec{v}_f = \vec{v}_{CM}$

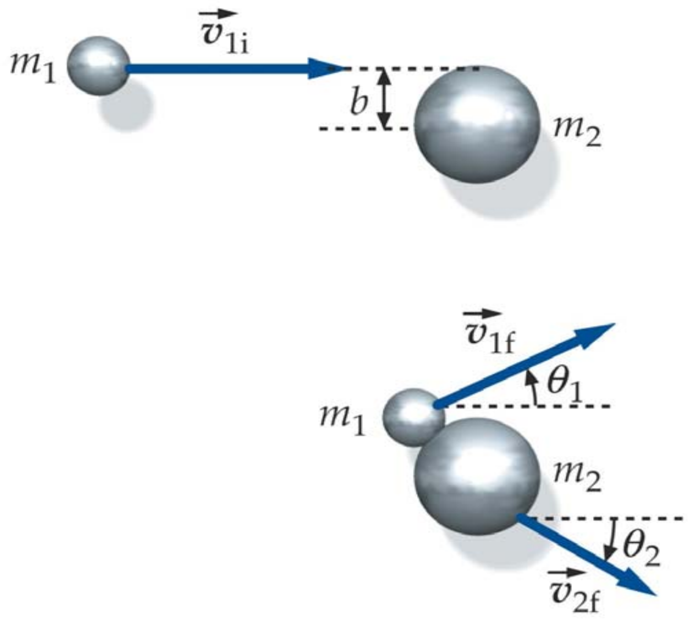
Die drei Geschwindigkeitsvektoren müssen in einer Ebene liegen

Beispiel 8.18: Zusammenstoß von PKW und LKW





Elastische Stöße in drei Dimensionen



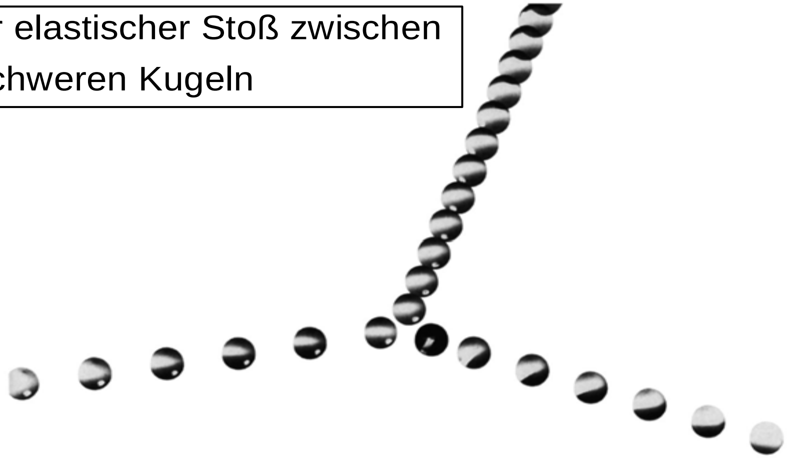
Nichtzentraler Stoß von m_1 mit $\vec{v}_{1,i} \neq 0$ auf m_2 mit $\vec{v}_{2,i} = 0$

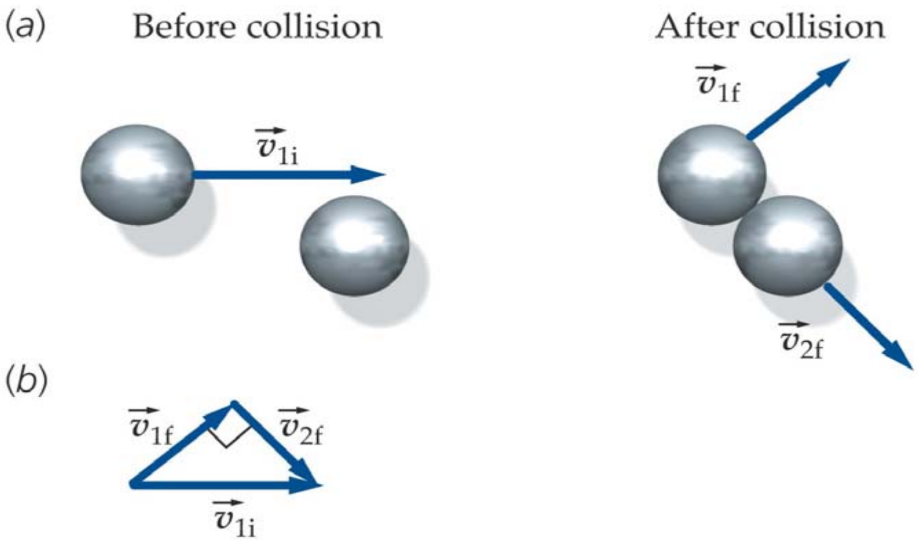
Abstand *b*: Stoßparameter

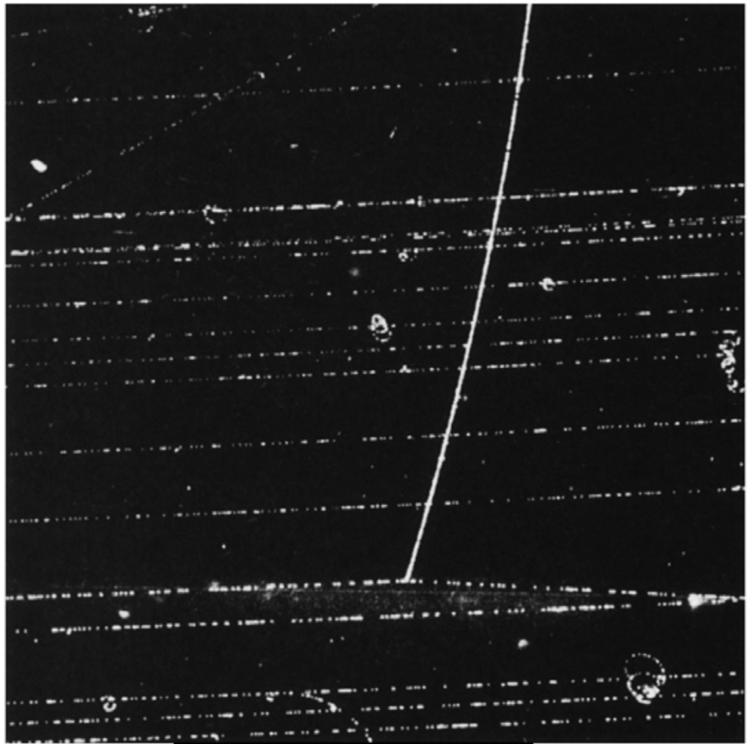
aus $m_1\vec{v}_{1,f} + m_2\vec{v}_{2,f} = m_1\vec{v}_{1,i} = \vec{p} \quad \Rightarrow$

$\vec{v}_{2,f}$ liegt in der Ebene gebildet von $\vec{v}_{1,i}$ und $\vec{v}_{1,f}$

Nichtzentraler elastischer Stoß zwischen zwei gleich schweren Kugeln







Proton-Proton-Stoß

Spezialfall:

Nichtzentraler Stoß von $m_1 = m$ mit $\vec{v}_{1,i} \neq 0$ auf $m_2 = m$ mit $\vec{v}_{2,i} = 0$

Abstand b: Stoßparameter

aus $m\vec{v}_{1,f} + m\vec{v}_{2,f} = m\vec{v}_{1,i} \quad \Rightarrow$

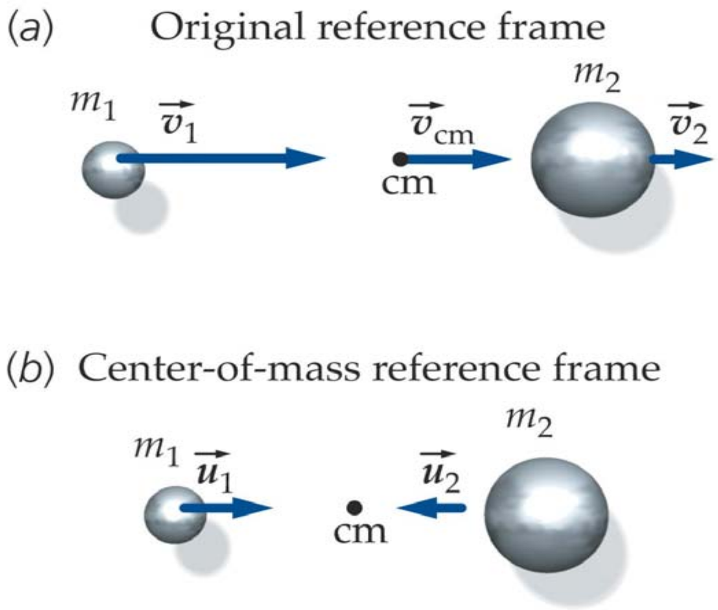
$\vec{v}_{1,i} = \vec{v}_{1,f} + \vec{v}_{2,f}$

aus $\frac{1}{2}mv_{1,i}^2 = \frac{1}{2}mv_{1,f}^2 + \frac{1}{2}mv_{2,f}^2 \quad \Rightarrow \quad v_{1,i}^2 = v_{1,f}^2 + v_{2,f}^2 \quad \Rightarrow$

$\vec{v}_{1,f} \perp \vec{v}_{2,f}$

8.7 Das Massenmittelpunktsystem als Bezugssystem (The center-of-mass reference frame)

Für viele Untersuchungen ist es praktisch, ein Koordinatensystem zu verwenden, dessen Ursprung im Massenmittelpunkt des Systems liegt: Massenmittelpunktsystem (oder Schwerpunktsystem).
Wenn ein Teilchen im ursprünglichen Bezugssystem die Geschwindigkeit v hat, dann ist seine Geschwindigkeit relativ zum Massenmittelpunkt $\vec{v}^{(CM)} = \vec{v} - \vec{v}_{CM} = \vec{u} \quad \Rightarrow$
Im Schwerpunktsystem ist die Geschwindigkeit des Massenmittelpunktes immer null.
Daher ist auch der Gesamtimpuls des Systems im Schwerpunktsystem null (Null-Impuls-Bezugssystem).



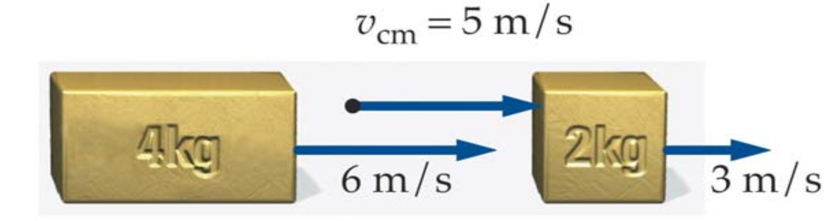
Zweikörperproblem:
Stoß von Masse m_1 mit $\vec{v}_1$ auf Masse m_2 mit $\vec{v}_2$
Geschwindigkeit des Massenmittelpunktes:

$$\vec{v}_{CM} = \frac{m_1\vec{v}_1 + m_2\vec{v}_2}{m_1 + m_2} \quad \Rightarrow$$

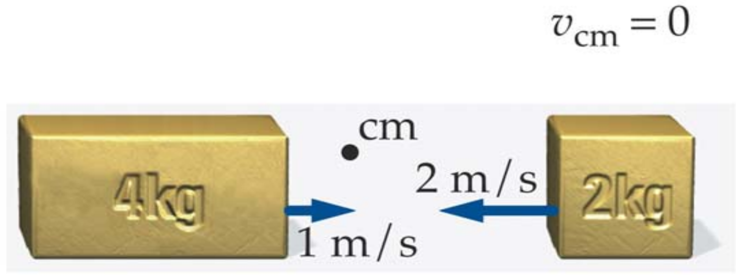
$$\vec{v}_1^{CM} = \vec{u}_1 = \vec{v}_1 - \vec{v}_{CM} \qquad \vec{v}_2^{CM} = \vec{u}_2 = \vec{v}_2 - \vec{v}_{CM}$$

Beispiel 8.19: Elastischer Stoß zweier Blöcke

Initial conditions

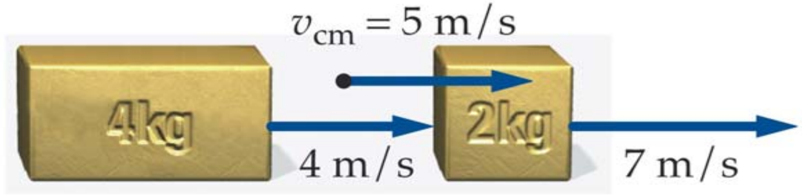


Transform to the center-of-mass frame by subtracting v_{cm}



Solve collision

Transform back to the original frame by adding v_{cm}



8.8 Systeme mit veränderlicher Masse: der Strahlantrieb (Systems with continuosly varying mass: rocket propulsion)

Herleitung des zweiten Newton'schen Axioms für Objekte mit sich kontinuierlich verändernder Masse:

Annahme: vollständig inelastischer Stoß $\Rightarrow$

Materiestrom trifft mit Geschwindigkeit $\vec{u}$ auf Körper mit Masse M und Geschwindigkeit $\vec{v}$ $\Rightarrow$

Während Zeitintervall Δt trifft ΔM auf M auf, gleichzeitig ändert sich $\vec{v}$ um $\Delta\vec{v}$

$\Rightarrow$ Kraftstoß: $\vec{F}_{\text{net ext}}\Delta t = \big((M+\Delta M)(\vec{v}+\Delta\vec{v})\big) - \big(M\vec{v}+\Delta M\vec{u}\big) = M\vec{v} + M\Delta\vec{v} + \Delta M\vec{v} + \Delta M\Delta\vec{v} - M\vec{v} - \Delta M\vec{u} \quad \Rightarrow$

$\Rightarrow \quad \vec{F}_{\text{net ext}}\Delta t = M\Delta\vec{v} + \Delta M\vec{v} + \Delta M\Delta\vec{v} - \Delta M\vec{u} \quad \Rightarrow$ Umstellung

$$\Rightarrow \quad \vec{F}_{\text{net ext}}\Delta t = M\Delta\vec{v} + \Delta M(\vec{v}-\vec{u}) + \Delta M\Delta\vec{v} \quad \Rightarrow$$

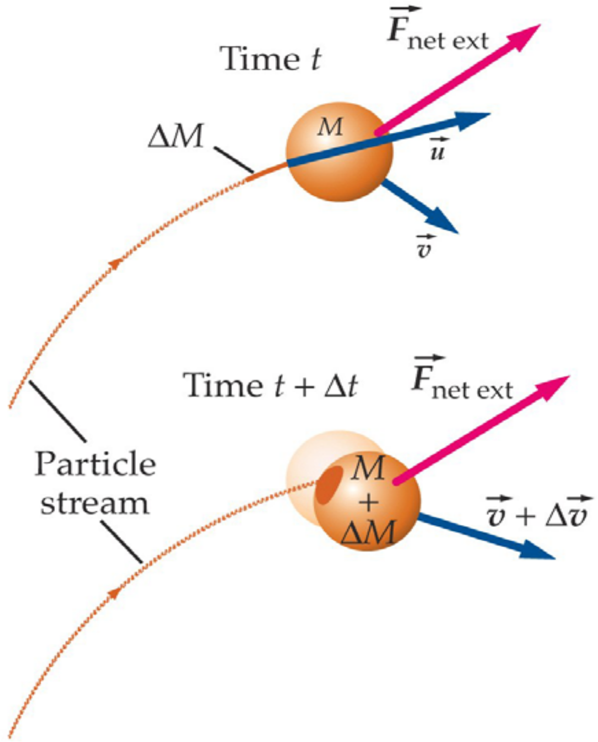
$$\Rightarrow \quad \vec{F}_{\text{net ext}} = M\frac{\Delta\vec{v}}{\Delta t} + \frac{\Delta M}{\Delta t}(\vec{v}-\vec{u}) + \frac{\Delta M}{\Delta t}\Delta\vec{v} \quad \Rightarrow$$

mit $\Delta t \to 0$ und somit $\Delta\vec{v} \to 0$

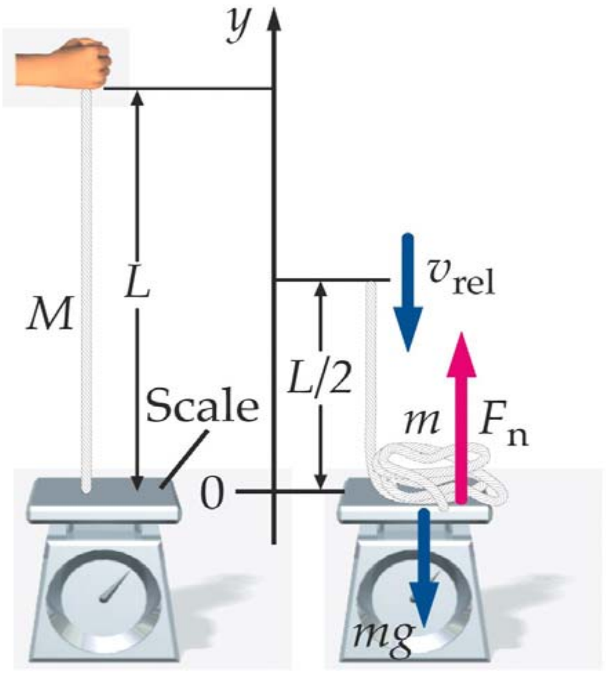
$$\Rightarrow \quad \vec{F}_{\text{net ext}} = M\frac{\mathrm{d}\vec{v}}{\mathrm{d}t} + \frac{\mathrm{d}M}{\mathrm{d}t}(\vec{v}-\vec{u}) = M\frac{\mathrm{d}\vec{v}}{\mathrm{d}t} - \frac{\mathrm{d}M}{\mathrm{d}t}\vec{v}_{\text{rel}} \quad \Rightarrow$$

$$\vec{F}_{\text{net ext}} + \frac{dM}{dt}\vec{v}_{\text{rel}} = M\frac{d\vec{v}}{dt} \qquad \text{8-37}$$

NEWTON'S SECOND LAW—CONTINUOUSLY VARIABLE MASS

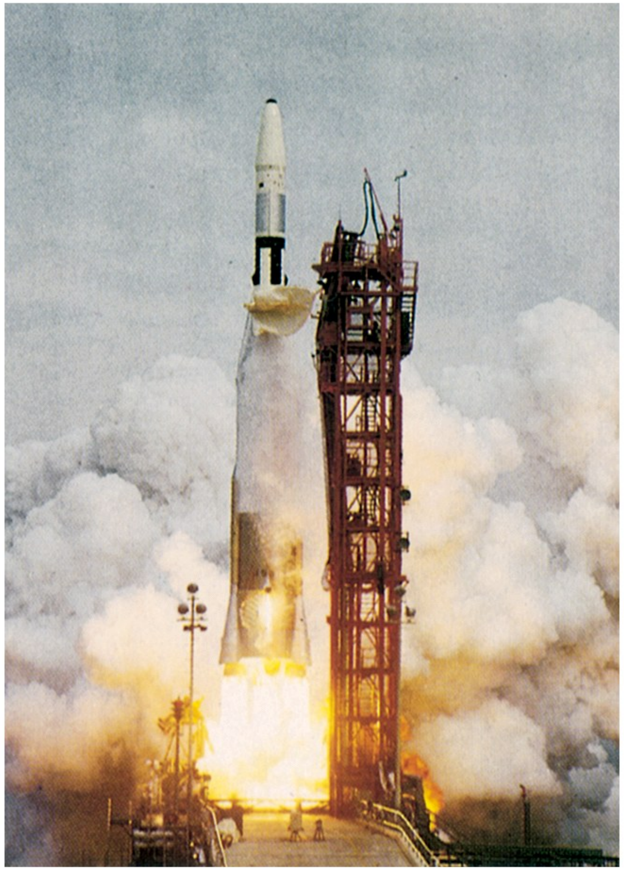


Beispiel 8.20: Ein fallendes Seil



Raketengleichung

aus Gl. (8.37) mit Masse der Rakete $M = M_0 - Rt$ und R Brennrate $\Rightarrow$



$$M\vec{g} - R\vec{u}_{\text{ex}} = M\frac{d\vec{v}}{dt} \qquad \text{8-39}$$

ROCKET EQUATION

$$\vec{F}_{\text{th}} = -R\vec{u}_{\text{ex}} = -\left|\frac{dM}{dt}\right|\vec{u}_{\text{ex}} \qquad \text{8-40}$$

Schubkraft oder Schub

DEFINITION—ROCKET THRUST

$$-Mg + Ru_{\text{ex}} = M\frac{dv_y}{dt} \qquad \text{8-41}$$

ROCKET EQUATION (VERTICAL COMPONENT)

$$\frac{dv_y}{dt} = \frac{Ru_{\text{ex}}}{M} - g = \frac{Ru_{\text{ex}}}{M_0 - Rt} - g \qquad \text{8-42}$$

ACCELERATION OF ROCKET (VERTICAL COMPONENT)

$$\text{aus } \int_0^{t_B} \frac{dv_y}{dt}\,dt = \int_0^{t_B} \left(\frac{Ru_{ex}}{M_0 - Rt} - g \right) dt \quad \Rightarrow$$

$$v_y = u_{ex} \ln\left(\frac{M_0}{M_0 - Rt} \right) - gt \qquad \text{8-43}$$

VELOCITY OF ROCKET (VERTICAL COMPONENT)

Beispiel 8.21: Eine Rakete hebt ab

Alonso-Finn

13. Teilchensysteme I: Linearer Impuls und Drehimpuls

13.1 Einführung
13.2 Bewegung des Schwerpunktes eines isolierten Systems von Teilchen
13.3 Bewegung des Schwerpunktes eines System von Teilchen unter dem Einfluß einer äußeren Kraft
13.4 Reduzirte Masse
13.5 Drehimpuls eines System von Teilchen
13.6 Innerer Drehimpuls und Bahndrehimpuls
13.7 Drehimpuls eines starren Körpers
13.8 Bewegungsgleichungen für die Rotation eines starren Körpers
13.9 Schwingungsbewegung eines starren Körpers
13.10 Kreiselbewegung
13.11 Gleichgewicht eiens Körpers

14. Systeme von Teilchen II: Energie

14.1 Einführung
14.2 Kinetische Energie eines Systems von Teilchen
14.3 Energieerhaltung eines Systems von Teilchen
14.4 Gesamtenergie eines System von Teilchen unter Einfluß einer äußeren Kraft
14.5 Innere Energie eines System von Teilchen
14.6 Kinetische Energie der Rotation eines starren Körpers
14.7 Rotationsenergie von Molekülen
14.8 Bindungsenergie eines System von Teilchen
14.9 Kollisionen
14.10 Bewegung in Fluiden