Fachbereich Mathematik
Assoz.-Prof. Dr. Simon Blatt
30.03.2020

Analysis II

4. Übungsblatt

Theorieaufgaben

1. Erklären Sie die Begriffe *punktweise Konvergenz* und *gleichmäßige Konvergenz* von Funktionenfolgen und geben Sie jeweils ein Beispiel an.
2. Wie lautet die Formel von Taylor und wozu kann diese verwendet werden? Welche Voraussetzung muss die Funktion f erfüllen? Welches sind die wesentlichen Beweisschritte?

Rechen-/Beweisaufgaben

Aufgabe 1

Sei $\alpha > 0$. Die Funktionenfolge $(f_n)_{n\geq 0}$ sei definiert durch

$$\begin{aligned} f_n : [0,\infty) &\to \mathbb{R} \\ x &\mapsto x^\alpha e^{-nx} \end{aligned}$$

(a) Für welche $x \in [0,\infty)$ ist die Reihe $\sum_{n\geq 0} f_n(x)$ konvergent? Bestimmen Sie die Grenzfunktion:

$$\begin{aligned} s : D &\to \mathbb{R} \\ x &\mapsto \sum_{n=0}^{\infty} f_n(x) \end{aligned}$$

(b) Für welche Werte von α ist s stetig?
(c) Für welche Werte von α ist die Konvergenz gleichmäßig?
(d) Berechnen Sie $a_n := max\{|f_n(x)|; x \in D\}$.
(e) Für welche Werte von α ist das Konvergenzkriterium von Weierstraß (Forster, S. 263, Satz 2) anwendbar? Was folgt daraus?

Aufgabe 2

Berechnen Sie für die Funktionenfolgen $f_n : D \to \mathbb{R}$ in (a), (b), (c) jeweils:

$$\int\limits_D f_n(x)dx, \qquad \lim_{n\to\infty} \int\limits_D f_n(x)dx, \qquad f(x) := \lim_{n\to\infty} f_n(x), \qquad \int\limits_D f(x)dx.$$

Gilt $f_n \to f$ gleichmäßig für $x \in D$?
(a) Sei $a > 0,\ \alpha \in \mathbb{R},\ D = [0,a],\ f_n(x) := \frac{n^\alpha}{1+n^2x^2}$,
(b) $\alpha \in \mathbb{R},\ D = [0,\infty[,\ f_n(x) := \frac{n^\alpha}{n^2+x^2}$,
(c) $D = [0,1],\ f_n(x) := x^n$.

Aufgabe 3

Berechnen Sie das Taylorpolynom 2. Ordnung der Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} : x \mapsto e^{-\cos(3x)}$ an der Stelle $x = \frac{\pi}{2}$ und kontrollieren Sie das Ergebnis mittels bekannter Reihen.

Aufgabe 4

Berechnen Sie die Zahl $\sqrt[3]{1003}$ näherungsweise durch Taylorapproximation der Ordnung 4 und geben Sie eine Fehlerschranke an.

Aufgabe 5

Wieviele Terme der Taylorentwicklung um 0 müssen summiert werden, um die Funktion cos im Intervall $[-10, 10]$ bis auf 0.002 zu approximieren? Wie genau kann man damit $\int_0^3 \cos(x^2)\mathrm{dx}$ berechnen?