UNIVERSITÄT SALZBURG

Fachbereich Mathematik
Prof. Dr. Verena Bögelein
Besprechung: 09.03.2016

Analysis III

1. Übungsblatt

Aufgabe 1

a) Seien E, F metrische Räume, $D \subset E$, $f\colon D \to F$ eine differenzierbare Funktion und $a \in D$. Zeigen Sie: Besitzt f eine lokal bei $f(a)$ definierte, in $f(a)$ differenzierbare Unkehrfunktion, so gilt:

$$(f^{-1})'(f(a)) = f'(a)^{-1} \in L(E, F).$$

b) Berechnen Sie die Ableitung von $g\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $x \mapsto \arctan(x)$.

Aufgabe 2

Sei $\emptyset \neq A \subset \mathbb{R}^n$ kompakt und $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge Lipschitz-stetiger Funktionen $f_n\colon A \to A$ mit Lipschitzkonstante $0 < L_n < 1$, d.h. für alle $n \in \mathbb{N}$ existiert $0 < L_n < 1$ mit

$$|f_n(x) - f_n(y)| \leq L_n |x - y|, \qquad \forall x, y \in A.$$

Weiter konvergiere die Funktionenfolge $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ punktweise gegen eine Funktion $f\colon A \to A$ bei $n \to \infty$. Zeigen Sie die folgenden Aussagen:

a) Jede Funktion f_n besitzt genau einen Fixpunkt a_n.

b) Es existiert eine Teilfolge $(n_k)_{k\in\mathbb{N}}$, sodass die Funktionenfolge $(f_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$ gleichmäßig gegen die Funktion f konvergiert.

c) Die Folge der Fixpunkte $(a_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$ besitzt eine konvergente Teilfolge.

d) Die Funktion f besitzt einen Fixpunkt.

Aufgabe 3

Für eine Matrix $M \in \mathrm{Mat}(3, \mathbb{R})$ definieren wir die Funktion $v\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ durch $x \mapsto Mx$. Zeigen Sie, dass zwei Funktionen $u, w\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ mit $\operatorname{rot} u = 0$ und $\operatorname{div} w = 0$ existieren, sodass $v = u + w$ gilt.

Aufgabe 4

Wir betrachten die Funktion

$$f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}, \qquad f(x,y) = 2x^4 - 3x^2y + y^2.$$

a) Bestimmen Sie alle kritischen Punkte von f.

b) Zeigen Sie, dass die Funktion f im kritischen Punkt $(0,0)$ keine lokale Minimalstelle besitzt.

c) Zeigen Sie, dass für jede Gerade durch $(0,0)$ die Einschränkung von f auf diese Gerade in $(0,0)$ ein lokales Minimum hat.

Zusatzaufgabe

Im folgenden Setting kann die Ableitung nicht mehr durch eine Matrix angegeben werden. Stattdessen muss man strikt mit der Definition der Ableitung aus der Vorlesung arbeiten. Seien $a, b \in \mathbb{R}$ mit $a < b$ und $I = [a,b]$ ein Intervall. Wir versehen den Vektorraum $C(I)$ der stetigen reellwertigen Funktionen auf I mit der Norm $\|.\|_\infty$. Sei zudem $k \in C(I \times I)$ und für $n \in \mathbb{N}$ der Operator $\mathcal{A}\colon C(I) \to C(I)$ definiert durch

$$(\mathcal{A}f)(x) := \int_I k(x,y) f(y)^n \, dy.$$

Berechnen Sie die Ableitungen $\mathcal{A}'(0)$, $\mathcal{A}'(1)$ und $\mathcal{A}'(f)$.