UNIVERSITÄT SALZBURG

Fachbereich Mathematik
Prof. Dr. Verena Bögelein
Besprechung: 15.06.2016

Analysis III

13. Übungsblatt

Theorieaufgaben

1. Geben Sie eine präzise Formulierung des Satzes zur Charakterisierung messbarer Mengen bei Borel-regulären Maßen an.
2. Sei F ein metrischer Raum und μ ein Maß auf $\mathbb{R}^N$. Erklären Sie, wann eine Funktion $f\colon \mathbb{R}^N \supset D \to F$ μ-messbar ist.
3. Geben Sie eine präzise Formulierung des Satzes von Lusin an.

Rechen-/Beweisaufgaben

Aufgabe 46

a) Sei μ ein Borel-reguläres Maß auf $\mathbb{R}^N$. Zeigen Sie: Ist A überdeckt durch abzählbar viele offene Mengen endlichen Maßes, so gilt:

$$A \text{ ist } \mu-\text{messbar} \quad \Leftrightarrow \quad A = G \setminus C \ \text{ mit } G \text{ ist } G_\delta-\text{Menge}, C \text{ ist } \mu-\text{Nullmenge}$$

b) Zeigen Sie: Ist $\mathbb{R}^N$ selbst überdeckt durch abzählbar viele offene Mengen endlichen Maßes, so ist ein Borel-reguläres Maß auch offen regulär.

Aufgabe 47

Sei $A \subset \mathbb{R}^N$ $\mathcal{L}^N$-messbar und $f\colon A \to [-\infty, \infty] = \overline{\mathbb{R}}$. Zeigen Sie, dass die folgenden Bedingungen aus der $\mathcal{L}^N$-Messbarkeit von f äquivalent sind:

a) $\{x \in A : f(x) > r\}$ ist $\mathcal{L}^N$-messbar für alle $r \in \overline{\mathbb{R}}$,

b) $\{x \in A : f(x) \geq r\}$ ist $\mathcal{L}^N$-messbar für alle $r \in \overline{\mathbb{R}}$,

c) $\{x \in A : f(x) < r\}$ ist $\mathcal{L}^N$-messbar für alle $r \in \overline{\mathbb{R}}$,

d) $\{x \in A : f(x) \leq r\}$ ist $\mathcal{L}^N$-messbar für alle $r \in \overline{\mathbb{R}}$,

e) $f^{-1}(O)$ ist $\mathcal{L}^N$-messbar für alle offenen $O \subset \overline{\mathbb{R}}$.

Aufgabe 48

Sei $A \subset \mathbb{R}^N$ und $f\colon A \to [0,\infty]$ eine nicht negative messbare Funktion. Ziel dieser Aufgabe ist es zu zeigen, dass es eine Folge von Treppenfunktionen

$$T_m(x) := \sum_{i=1}^{m} r_{i,m}\chi_{A_{i,m}}, \qquad r_{i,m} \in \mathbb{R}, \quad A_{i,m} \text{ messbar},$$

gibt, die f punktweise approximiert, d.h. $T_m(x) \to f(x)$ bei $m \to \infty$ für alle $x \in A$. Dazu definieren wir für $i \in \mathbb{N}$ und $k = 1, ..., i2^i$ Mengen F_i und $E_{i,k}$ durch

$$F_i := \{x \in A : f(x) \geq i\} \text{ und } E_{i,k} := \left\{x \in A : \tfrac{k-1}{2^i} \leq f(x) < \tfrac{k}{2^i}\right\}.$$

Zeigen Sie, dass die Funktionenfolge $(f_i)_{i\in\mathbb{N}}$ definiert durch

$$f_i(x) := i\chi_{F_i}(x) + \sum_{k=1}^{i2^i} \frac{k-1}{2^i}\chi_{E_i,k}(x)$$

eine derartige Folge von Treppenfunktionen ist.

Aufgabe 49

Sei μ ein Borel-Maß auf $\mathbb{R}$,

a) Sei $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ differenzierbar. Zeigen Sie, dass f' μ-messbar ist.

b) Sei $g\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ monoton steigend. Zeigen Sie, dass g μ-messbar ist.