UNIVERSITÄT SALZBURG

Fachbereich Mathematik
Prof. Dr. Verena Bögelein
Besprechung: 29.06.2016

Analysis III

15. Übungsblatt

Theorieaufgaben

1. Sei μ ein Maß auf $\mathbb{R}^N$. Geben Sie eine präzise Definition einer μ-Treppenfunktion auf $A \subset \mathbb{R}^N$ an.

2. Sei μ ein Maß auf $\mathbb{R}^N$, $A \subset \mathbb{R}^N$ μ-messbar und $f\colon A \to [-\infty, \infty]$. Erklären Sie, wann das Integral $\int_A f \,\mathrm{d}\mu$ existiert.

Rechen-/Beweisaufgaben

Aufgabe 54

Entscheiden Sie, welche der folgenden Familien reeller Zahlen $(a_i)_{i\in I}$ summierbar bzw. uneigentlich summierbar sind (mit Fallunterscheidung für verschiedene Parameter $\alpha \in \mathbb{R}$).

a) $a_i = \frac{1}{i^\alpha}$ für $i \in \mathbb{N}$ und $\alpha > 0$,

b) $a_i = (-1)^i \frac{1}{i^\alpha}$ für $i \in \mathbb{N}$ und $\alpha > 0$,

c) $a_i = \alpha^i$ für $i \in \mathbb{N}$ und $\alpha \in \mathbb{R}$.

Aufgabe 55

Berechnen Sie, sofern definiert, die Werte der folgenden Doppelreihen $\sum_{k,\ell=1}^\infty a_{k,\ell}$. (Der große Umordnungssatz besagt, dass der Wert im Falle der Definition der Reihe durch zeilenweise Summation $\sum_{k=1}^\infty (\sum_{\ell=1}^\infty a_{k,\ell})$ durch spaltenweise Summation $\sum_{\ell=0}^\infty (\sum_{k=1}^\infty a_{k,\ell})$, durch diagonalweise Summation $\sum_{m=1}^\infty (a_{1,m} + a_{2,m-1} + \ldots + a_{m,1})$ oder auch durch andere Zusammenfassungen berechnet werden kann.)

a) $$\sum_{k,\ell=1}^\infty \frac{1}{(k+\ell)(k+\ell-1)^2},$$

b) $$\sum_{k,\ell=1}^\infty \frac{k-\ell}{k^2+\ell^2},$$

c) Geben Sie eine Familie $(a_{k,\ell})_{k,\ell\in\mathbb{N}}$ an, so dass zeilenweise und spaltenweise Summation definiert ist, aber zu unterschiedlichen Ergebnissen führt (hier muss dann $\sum_{k,\ell=1}^\infty |a_{k,\ell}| = \infty$ gelten).

Aufgabe 56

Aus der Analysis II Übung wissen Sie bereits, dass die Funktion $f(x) = \frac{\sin x}{x}$ auf dem Intervall $(0, \infty)$ uneigentlich Riemann-integrierbar ist mit

$$\int\limits_0^\infty \frac{\sin x}{x} \mathrm{d}x = \frac{\pi}{2}.$$

Zeigen Sie, dass f auf $(0, \infty)$ nicht Lebesgue-integrierbar ist, indem Sie zeigen, dass $\int_0^\infty f_+ \mathrm{d}\mathcal{L}^1 = \infty = \int_0^\infty f_- \mathrm{d}\mathcal{L}^1$ gilt.

Aufgabe 57

Gegeben sei die Funktion $f \colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $(x, y) \mapsto e^{-x^2-y^2}$. Das Ziel dieser Aufgabe ist es, das Lebesgue-Integral auf dem Kreis $B_r(0)$ für $r > 0$ über die Definition des Lebesgue-Integrals zu berechnen. Wählen Sie dazu geeignete Niveaumengen in $B_r(0)$ und zeigen Sie somit die Existenz von Treppenfunktionen h_n und g_n mit $h_n \leq f$, $g_n \geq f$ und

$$\sum_{B_r(0)} g_n(x, y) \mathrm{d}\mathcal{L}^2(x, y) \to \pi\Big(1 - e^{-r^2}\Big), \qquad \sum_{B_r(0)} h_n(x, y) \mathrm{d}\mathcal{L}^2(x, y) \to \pi\Big(1 - e^{-r^2}\Big)$$

bei $n \to \infty$.