UNIVERSITÄT SALZBURG

Fachbereich Mathematik
Prof. Dr. Verena Bögelein
Besprechung: 16.03.2016

Analysis III

2. Übungsblatt

Theorieaufgaben

1. Geben Sie eine präzise Definition der totalen Ableitung m-ter Ordnung einer Funktion $f : E \supset D \to F$ an, wobei E und F normierte Räume sind.
2. Geben Sie eine präzise Formulierung des Satzes von Schwarz an.
3. Geben Sie eine präzise Formulierung des Satzes von Taylor in der qualitativen Form an.

Rechen-/Beweisaufgaben

Aufgabe 5

Wir betrachten die Funktion $f\colon \mathbb{R}^2 \to R$, die definiert wird durch

$$f(x,y) := \begin{cases} 0, & \text{für } (x,y) = (0,0) \\ \frac{x^3y - xy^3}{x^2+y^2}, & \text{sonst} . \end{cases}$$

a) Berechnen Sie die partiellen Ableitungen $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}$ und $\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}$ für $(x,y) \neq (0,0)$.

b) Berechnen Sie $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(0,0)$ und $\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(0,0)$.

Aufgabe 6

Seien E, F normierte Räume und $Q\colon E^m \to F$ eine m-lineare Abbildung. Zeigen Sie das die folgenden Aussagen äquivalent sind:

(i) Q ist stetig.

(ii) Q ist stetig in 0.

(iii) Q ist beschränkt, d.h. es existiert $C \geq 0$ mit $\|Q(x_1, ..., x_m)\|_F \leq C\|x_1\|_E \cdot ... \cdot \|x_m\|_E$ für alle $x_1, ..., x_m \in E$.

(iv) $\|Q\| := \sup\{\|Q(x_1, ..., x_m)\|_F : x_i \in E \text{ mit } \|x_i\|_E \leq 1 \text{ für } i = 1, ..., m\} < \infty$

Aufgabe 7

Berechnen Sie das n-te Taylor-Polynom im Punkt a für die folgenden Funktionen:

a) $f\colon (0,\infty) \times (0,\infty) \to \mathbb{R}$, $f(x,y) = \ln(1+x+y)$, mit $n = 3$ und $a = (1,1)$.

b) $g\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$, $g(x,y,z) = e^{zy}(\cos(x) + \sin(z))$, mit $n = 2$ und $a = (0,0,0)$.

Aufgabe 8

a) Wir betrachten das Polynom $p\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $p(x_1,x_2) = x_1x_2$. Bestimmen Sie mit Hilfe der Polarisationsformel die zugehörige 2-lineare Abbildung Q.

b) Sei $q\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definiert durch $q(x_1,x_2) = x_1^2x_2$. Bestimmen Sie die zugehörige 3-lineare Abbildung. (Hinweis: Sie müssen nicht die Polaristionsformel benutzen, sondern können mit Hilfe von a) die Form von Q folgern.)