Fachbereich Mathematik
Prof. Dr. Verena Bögelein
Besprechung: 23.03.2016

Analysis III

3. Übungsblatt

Theorieaufgaben

1. Erklären Sie ein hinreichendes Kriterium zur Bestimmung von Extremalstellen einer Funktion $f\colon E \supset D \to \mathbb{R}$ mit Hilfe der Hessematrix, wobei E ein endlichdimensionaler normierter Raum ist.

2. Geben Sie eine präzise Formulierung des Satzes von der Inversen an.

3. Erklären Sie, wann eine Funktion $f\colon D \to F$ reell analytisch ist (E, F sind normierte Räume und $D \subset E$ ist offen).

Rechen-/Beweisaufgaben

Aufgabe 9

Sei A eine reellwertige, symmetrische $n\times n$–Matrix. Zeigen Sie die folgende Aussage: A ist genau dann positiv definit, wenn A nur positive Eigenwerte besitzt.

Aufgabe 10

Untersuchen Sie die folgenden Funktionen auf lokale und globale Extrema:

a) $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $(x, y) \mapsto x^3 + y^3 - 3xy$;

b) $g\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $(x, y) \mapsto 2x^3 + xy^2 + 5x^2 + y^2$.

Aufgabe 11

Um numerisch Nullstellen einer Funktion zu finden, benutzt man oft das Newton-Verfahren. Die Idee des Verfahrens ist es, die Funktion f in einem Startpunkt x_0 zu linearisieren und die Nullstelle der Tangente in x_0 als Näherung der tatsächlichen Nullstelle zu verwenden. Durch Iteration des Verfahrens erhofft man sich, eine gegen die Nullstelle konvergente Folge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ zu finden. Für eine Funktion $f \in C^2([a, b])$ mit $f' \neq 0$ auf $\in [a, b]$ definiert man

$$x_{n+1} := x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}$$

wobei der Startpunkt $x_0 \in [a, b]$ beliebig gewählt wird. Ob die Folge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ gegen eine Nullstelle konvergiert hängt dabei, wie wir im Folgenden sehen werden, auch von der Wahl des Startpunktes x_0 ab.

a) Zeigen Sie: Ist $f(x_*) = 0$ für ein $x_* \in [a, b]$, so gilt

$$|x_{n+1} - x_*| \leq M|x_n - x_*|^2 \qquad \text{mit} \quad M := \frac{\max_{x\in[a,b]} |f''(x)|}{\min_{x\in[a,b]} |f'(x)|}.$$

(Hinweis: Benutzen Sie den Mittelwertsatz)

b) Aus der obigen Formel können wir ablesen, dass die Folge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ gegen die Nullstelle x_* konvergiert, falls der Startwert x_0 bereits nahe genug bei x_* liegt. Zeigen Sie, dass

$$|x_n - x_*| \leq \left(\tfrac{1}{2}\right)^{2^n-1} |x_0 - x_*|$$

gilt für alle $n \in \mathbb{N}$, falls $|x_* - x_0| < \frac{1}{2M}$.

c) Im Allgemeinen muss das Newton-Verfahren aber nicht konvergieren. Wir betrachten dazu die Funktion

$$f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \qquad x \mapsto x^3 - 2x + 2.$$

Finden Sie einen Startwert $x_0 \in \mathbb{R}$, sodass das Newton-Verfahren nicht konvergiert.

d) Finden Sie mit Hilfe des Newton-Verfahrens eine Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ mit Folgengliedern in $\mathbb{Q}$, sodass $a_n \to \sqrt{2}$ bei $n \to \infty$.

Aufgabe 12

Zeigen Sie, dass die Funktion $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ mit $f(x, y) = (x^3 + 3xe^y, y - x^2)$ ein C^1-Diffeomorphismus von $\mathbb{R}^2$ nach $\mathbb{R}^2$ ist.