UNIVERSITÄT SALZBURG

Fachbereich Mathematik
Prof. Dr. Verena Bögelein
Besprechung: 13.04.2016

Analysis III

4. Übungsblatt

Theorieaufgaben

1. Geben Sie eine präzise Formulierung des Satzes über implizite Funktionen an.
2. Erklären Sie, wann eine Funktion $f\colon D \to F$ Diffeomorphismus von D auf $f(D)$ ist (E, F sind normierte Räume und $D \subset E$ ist offen).

Rechen-/Beweisaufgaben

Aufgabe 13

In den beiden folgenden Aufgaben wollen wir den Satz über implizite Funktionen näher kennenlernen. Dazu betrachten wir Gleichungssysteme $g(x) = y$ von M Gleichungen $g_i(x) = y_i$, $i = 1, ..., M$, für N Unbekannte $x = (x_1, ..., x_N) = (x', x'')$ mit $L := N - M \geq 0$, $x' = (x_1, ..., x_L)$ und $x'' = (x_{L+1}, ..., x_N)$. Für stetig differenzierbare Funktionen $g\colon \mathbb{R}^N \supset D \to \mathbb{R}^M$ ist die Invertierbarkeit der partiellen Funktionalmatrix $\frac{\mathrm{d}g}{\mathrm{d}x''}(a)$ (d.h. mit den mit den Einträgen $\partial_{x_j} g_i(a)$ für $i = 1, ..., M$ und $j = L+1, ..., N$), die aus den letzten M Spalten der Funktionalmatrix von g gebildet wird, die entscheidende Voraussetzung des Satzes über implizite Funktionen. Mit $a = (a', a'')$, $a' = (a_1, ..., a_L)$ und $g(a) = b$ existieren dann Umgebungen U von a, U' von a' und V von b sowie eine stetig differenzierbare auflösende Funktion $h\colon U' \times V \to \mathbb{R}^M$ mit

$$g(x', x'') = y \ \text{ für } \ y \in V, (x', x'') \in U \quad \Leftrightarrow \quad x'' = h(x', y) \ \text{ mit } \ y \in V, x' \in U'.$$

Überprüfen Sie, an welchen Stellen $a \in \mathbb{R}^N$ bei den folgenden Gleichungssystemen eine Auflösung nach den letzten M Variablen $x'' = (x_{L+1}, ..., x_N)$ garantiert ist; geben Sie soweit möglich auflösende Funktionen nahe a an:

a) $x^2 + y^2 + x^3 - 3xy^2 = 0 \quad (N = 2, M = 1)$,

b) $x^2 + y^2 + z^2 = r^2$, mit $r \in \mathbb{R} \quad (N = 3, M = 1)$,

c) $x^2 + y^2 + z^2 = 1$, $x - y^3 = 0 \quad (N = 3, M = 2)$.

Aufgabe 14

Fortsetzung von Aufgabe 13:

d) $y \cos x + z \sin x = y_0,\ -y \sin x + z \cos x = z_0$ mit $y_0, z_0 \in \mathbb{R}$ $\quad (N = 3, M = 2)$,

e) $x_1^2 + ... + x_N^2 = 1,\ x_1 \cdot ... \cdot x_N = 0$ $\quad (N \geq 2, M = 2)$.

Aufgabe 15

Wir betrachten die Funktion $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $(x, y) \mapsto y^2 - x$. Untersuchen Sie, nach welcher Variable sich die Gleichung

$$f(x, y) = y^2 - x = 0$$

eindeutig differenzierbar auflösen lässt.

Aufgabe 16

Seien $v_1, ..., v_k$ Punkte im $\mathbb{R}^n$ und $a_1, ..., a_k \geq 0$ Gewichte mit $a_1 + ... + a_k > 0$. Zeigen Sie: Dann hat die Funktion

$$f(x) := \sum_{j=1}^{k} a_j \|x - v_j\|^2$$

der Summe der gewichteten Abstandsquadrate genau eine lokale Minimalstelle in $\mathbb{R}^n$. (Diese wird Schwerpunkt der Punkte $v_1, ..., v_k$ bezüglich der Gewichte $a_1, ..., a_k$ genannt.)

Aufgabe 17

Es sei $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ zwei mal differenzierbar. Wir definieren $g\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ durch

$$g(x) := f(x^2, \cos(\pi x)).$$

Bestimmen Sie mit Hilfe der partiellen Ableitungen von f das Taylorpolynom zweiter Ordnung von g im Punkt $x_0 = 1$.