UNIVERSITÄT SALZBURG

Fachbereich Mathematik
Prof. Dr. Verena Bögelein
Besprechung: 20.04.2016

Analysis III

6. Übungsblatt

Theorieaufgaben

1. Sei G ein normierter Raum und $\alpha < \beta$. Erklären Sie, wann eine Funktion $g : [\alpha, \beta] \to G$ beschränkte Variation besitzt.

2. Geben Sie eine präzise Definition einer Kurve und deren Länge in einem normierten Raum E an.

Rechen-/Beweisaufgaben

Aufgabe 20

a) Sei $\alpha < \beta$, G ein normierter Raum und $c\colon [\alpha, \beta] \to G$ stetig differenzierbar. Zeigen Sie, dass c rektifizierbar ist und

$$L(c) = \int_\alpha^\beta \|c'(x)\|_G \mathrm{d}x$$

gilt.

b) Sei $r, h > 0$. Berechnen Sie die Länge der Kurve $c\colon [0, 2\pi] \to \mathbb{R}^3$ mit

$$c(t) = \left(r \cos t, r \sin t, \tfrac{h}{2\pi} t\right)$$

c) Berechnen Sie die Länge der Kurve $c\colon [0, 2] \to \mathbb{R}$ mit

$$c(t) = \begin{cases} t^2 & \text{für } t \in [0, 1) \\ -\ln t & \text{für } t \in [1, 2]. \end{cases}$$

Aufgabe 21

Berechnen Sie die folgenden Riemann-Stieltjes Integrale $\int_\alpha^\beta f \mathrm{d}g$ für die folgenden Wahlen von $[\alpha, \beta]$, $f\colon [\alpha, \beta] \to \mathbb{R}$ und $g\colon [\alpha, \beta] \to \mathbb{R}$:

a) $[\alpha, \beta] = [1, 2]$, $f(x) = 3x^2 + 1$ und $g(x) = \log x$,

b) $[\alpha, \beta] = [1, 2]$, $f(x) = \log x$ und $g(x) = 3x^2 + 1$,

c) $[\alpha, \beta] = [0, 2]$, $f(x) = 1$ und $g(x) = \chi_{[0,1]}$,

d) $[\alpha, \beta] = [0, 2]$, $f(x) = x$ und $g(x) = \chi_{[0,1]}$.

Aufgabe 22

Für $n \in \mathbb{N}$ betrachten wir die Funktionenfolge $f_n \colon [-1, 1] \to \mathbb{R}$, $x \mapsto \sqrt{x^2 + \frac{1}{n}}$ und die Funktion $g \colon [-1, 1] \to \mathbb{R}$, $x \mapsto \cos x$. Untersuchen Sie, ob der Grenzwert

$$\lim_{n\to\infty} \int_{-1}^{1} f_n \, \mathrm{d}g$$

existiert und berechnen Sie diesen gegebenenfalls.

Aufgabe 23

Für $n \in \mathbb{N}$ betrachten wir die Funktionenfolge $f_n \colon [0, 1] \to \mathbb{R}$, $x \mapsto \sin(nx)$. Untersuchen Sie, ob der Grenzwert

$$\lim_{n\to\infty} \int_{0}^{1} f_n \, \mathrm{d}f_n$$

existiert und berechnen Sie diesen gegebenenfalls.