UNIVERSITÄT SALZBURG

Fachbereich Mathematik
Prof. Dr. Verena Bögelein
Besprechung: 11.05.2016

Analysis III

8. Übungsblatt

Theorieaufgaben

1. Geben Sie eine präzise Definition des Lebesgue-Maßes $\mathcal{L}^N$ auf $\mathbb{R}^N$ an.
2. Erklären Sie wichtige Eigenschaften des Lebesgue-Maßes (vgl. Satz 4.3).

Rechen-/Beweisaufgaben

Aufgabe 28

Entscheiden Sie, ob die folgenden Abbildungen äußere Maße sind:

a) $\mu\colon \mathcal{P}(\mathbb{R}) \to [0,\infty]$ mit

$$\mu(A) := \begin{cases} 0 & \text{falls } A \text{ endlich ist,} \\ \infty & \text{falls } A \text{ nicht endlich ist.} \end{cases}$$

b) $\mu\colon \mathcal{P}(\mathbb{R}) \to [0,\infty]$ mit

$$\mu(A) := \begin{cases} 0 & \text{falls } A \text{ höchstens abzählbar ist,} \\ \infty & \text{falls } A \text{ überabzählbar ist.} \end{cases}$$

c) $\mu\colon \mathcal{P}(\mathbb{R}^n) \to [0,\infty]$ mit $\mu(\emptyset) = 0$ und

$$\mu(A) := \operatorname{diam}(A) = \sup\{|x-y| : x, y \in A\}$$

für $A \neq \emptyset$.

Aufgabe 29

In dieser Aufgabe berechnen wir das Lebesgue-Maß von $\mathbb{Q}$. Konstruieren Sie dazu eine Folge von kompakten Intervallen $([a_i, b_i])_{i\in\mathbb{N}}$ mit $\mathbb{Q} \subset \bigcup_{i\in\mathbb{N}}[a_i, b_i]$ und $\sum_{i=1}^{\infty} |b_i - a_i| < \varepsilon$. Bestimmen Sie anschließend $\mathcal{L}^1(\mathbb{Q})$.

Aufgabe 30

Bestimmen Sie das zweidimensionale Lebesgue-Maß der folgenden Mengen:

a) $M_1 := ([3,5] \times [1,2]) \cup ([3,4] \times [2,3])$,

b) $M_2 := ([1,4] \times [3,7]) \setminus ([2,3] \times [4,6])$,

c) $M_3 := \bigcup_{k=0}^{\infty} \left(\left[\frac{2^k - 1}{2^k}, \frac{2^{k+1} - 1}{2^{k+1}} \right] \times \left[0, \frac{1}{2^{k+1}} \right] \right)$.

Aufgabe 31

Bestimmen Sie das zweidimensionale Lebesgue-Maß der Menge

$$M := \left\{ x = (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 : x_1 \in [0,1], x_1 = x_2 \right\},$$

ohne Sätze der Vorlesung zu nutzen, d.h. finden Sie eine geeignete Überdeckung der Menge.