UNIVERSITÄT SALZBURG

Fachbereich Mathematik
Prof. Dr. Verena Bögelein
Besprechung: 18.05.2016

Analysis III

9. Übungsblatt

Rechen-/Beweisaufgaben

Aufgabe 32

Es sei $I_0 = [0,1]$ und $I_k := \frac{1}{3}I_{k-1} \cup \frac{1}{3}(I_{k-1}+2)$ für $k \in \mathbb{N}$. Dann nennt man $C := \bigcap_{k\in\mathbb{N}} I_k$ die Cantor-Menge. Ziel dieser Aufgabe ist es das Lebesgue-Maß dieser Menge zu bestimmen.

a) Zeichnen Sie die Mengen I_k für $k = 0, 1, 2$.

b) Zeigen Sie, dass die in der Definition von I_k vorkommende Vereinigung disjunkt ist, und dass $I_k \subset I_{k-1}$ gilt.

c) Beweisen Sie mithilfe einer Induktion, dass

$$I_n = \bigcup_{a\in L_n} [a, a + 3^{-n}] \quad \text{für} \quad L_n = \left\{ \sum_{k=1}^{n} a_k 3^{-k} : a_k \in \{0,2\} \right\}$$

gilt.

d) Zeigen Sie, dass $\mathcal{L}(I_k) = (\frac{2}{3})^k$ für alle $k \in \mathbb{N}_0$ gilt und berechnen Sie $\mathcal{L}(C)$.

Aufgabe 33

In dieser Aufgabe wollen wir einige Eigenschaften der sogenannten Cantor-Funktion $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ kennenlernen und bezeichnen mit C die Cantor-Menge. Für $x \in C$, d.h. wir können x darstellen durch $x = \sum_{k=1}^{\infty} a_k/3^k$ mit $a_k \in \{0,2\}$ (vgl. Aufgabe 32), definieren wir

$$f(x) = f\left(\sum_{k=1}^{\infty} \frac{a_k}{3^k}\right) := \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{2^k} \cdot \frac{a_k}{2}.$$

Für $x < 0$ setzten wir $f(x) := 0$ und für $x > 1$ sei $f(x) := f(1)$. Schließlich definieren wir für $x \in [0,1] \setminus C$

$$f(x) := \sup\{f(y) : y \in C, y < x\}.$$

a) Zeigen Sie, dass $f(1/3) = f(2/3)$, $f(1/9) = f(2/9)$ und $f(7/9) = f(8/9)$ gilt und berechnen Sie diese Funktionswerte.

b) Zeigen Sie, dass $f'(x) = 0$ für $x \notin C$ gilt.

c) Zeigen Sie, dass f monoton wachsend auf [0,1] ist.

d) Zeigen Sie, dass f surjektiv auf [0,1] ist. (Hinweis: Sie dürfen benutzen, dass es für $x \in [0,1]$ eine Folge $(b_k)_{k\in\mathbb{N}}$ gibt, mit $b_k \in \{0,1\}$ und $x = \sum_{k=1}^{\infty} b_k/2^k$, siehe Analysis I, Aufgabe 11.)

e) Zeigen Sie, dass f stetig auf [0,1] ist.