UNIVERSITÄT SALZBURG

Fachbereich Mathematik
Ass.-Prof. Dr. Simon Blatt
Besprechung: 13.03.2017

Analysis III

1. Übungsblatt

Aufgabe 1

Sei Ω eine Menge und für jedes $n \in \mathbb{N}$ sei $\mu_n \colon \mathcal{P}(\Omega) \to [0, \infty]$ ein äußeres Maß über Ω. Zeigen Sie, dass die Abbildungen $\mu, \tilde{\mu} \colon \mathcal{P}(\Omega) \to [0, \infty]$, gegeben durch

$$\mu(A) := \max\{\mu_1(A),\, \mu_2(A)\} \quad \text{bzw.} \quad \tilde{\mu}(A) := \sup\{\mu_n(A) \colon n \in \mathbb{N}\} \quad \text{für alle } A \in \mathcal{P}(\Omega),$$

jeweils ein äußeres Maß über Ω definieren.

Aufgabe 2

Sei Ω eine Menge und seien $s \in [0, \infty]$ sowie $a \in \Omega$ gegeben. Für $i \in \{1, 2, 3, 4\}$ definieren wir die Abbildungen $\mu_i \colon \mathcal{P}(\Omega) \to [0, \infty]$ durch $\mu_i(\emptyset) := 0$ für alle $i \in \{1, 2, 3, 4\}$ und

(a) $\mu_1(A) := s$ für alle $A \in \mathcal{P}(\Omega) \setminus \{\emptyset\}$;

(b) $\mu_2(A) := \begin{cases} 1 & \text{falls } a \in A, \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$ für alle $A \in \mathcal{P}(\Omega) \setminus \{\emptyset\}$;

(c) $\mu_3(A) := \begin{cases} 0 & \text{falls } a \in A, \\ 1 & \text{sonst} \end{cases}$ für alle $A \in \mathcal{P}(\Omega) \setminus \{\emptyset\}$;

(d) $\mu_4(A) := \begin{cases} \#A & \text{falls } A \text{ endlich}, \\ \infty & \text{sonst} \end{cases}$ für alle $A \in \mathcal{P}(\Omega) \setminus \{\emptyset\}$.

Dabei bezeichne $\#A$ die Kardinalität, d. h. die Anzahl der Elemente, der Menge A. Überprüfen Sie die voranstehenden Abbildungen jeweils auf Monotonie, endliche Subadditivität, und abzählbare Subadditivität.

Aufgabe 3

Sei $n \in \mathbb{N}$. Überprüfen Sie, ob die folgenden Abbildungen μ_i ($i \in \{1, 2, 3\}$) äußere Maße sind:

(a) $\mu_1 \colon \mathcal{P}(\mathbb{R}) \to [0, \infty]$, gegeben durch $\mu_1(A) := \begin{cases} 0 & \text{falls } A \in \mathcal{P}(\mathbb{R}) \text{ endlich}, \\ \infty & \text{sonst;} \end{cases}$

(b) $\mu_2 \colon \mathcal{P}(\mathbb{R}) \to [0, \infty]$, gegeben durch $\mu_2(A) := \begin{cases} 0 & \text{falls } A \in \mathcal{P}(\mathbb{R}) \text{ höchstens abzählbar}, \\ \infty & \text{sonst;} \end{cases}$

(c) $\mu_3 \colon \mathcal{P}(\mathbb{R}^n) \to [0, \infty]$, gegeben durch $\mu_3(\emptyset) := 0$ und $\mu_3(A) := \sup\{|x - y| \colon x, y \in A\}$ für alle $A \in \mathcal{P}(\mathbb{R}^n) \setminus \{\emptyset\}$.

Aufgabe 4

Seien Ω, Ω' Mengen. Überprüfen Sie, ob die folgenden Mengensysteme $\mathcal{A}_i$ ($i \in \{1,2,3,4,5\}$) σ-Algebren über Ω sind (machen Sie dabei, wo nötig, eine Fallunterscheidung bezüglich der Kardinalität von Ω):

(a) $\mathcal{A}_1 := \{A \in \mathcal{P}(\Omega)\colon A \text{ abzählbar}\}$;

(b) $\mathcal{A}_2 := \{A \in \mathcal{P}(\Omega)\colon A \text{ endlich oder } \Omega \setminus A \text{ endlich}\}$;

(c) $\mathcal{A}_3 := \{A \in \mathcal{P}(\Omega)\colon A \text{ abzählbar oder } \Omega \setminus A \text{ abzählbar}\}$;

(d) $\mathcal{A}_4 := \{(A \cap B) \cup (A' \cap (\Omega \setminus B))\colon A,\, A' \in \mathcal{A}\}$, wobei $B \in \mathcal{P}(\Omega)$ eine fixierte Menge und $\mathcal{A}$ eine vorgegebene σ-Algebra über Ω sind;

(e) $\mathcal{A}_5 := T^{-1}(\mathcal{A}') := \{T^{-1}(A')\colon A' \in \mathcal{A}'\} \subset \mathcal{P}(\Omega)$, wobei $T\colon \Omega \to \Omega'$ eine Abbildung und $\mathcal{A}'$ eine vorgegebene σ-Algebra über Ω' sind. Sie dürfen dabei (ohne Beweis) die folgenden Regeln ("Operationstreue") verwenden:

- $(\cdot)$ $T^{-1}\Big(\bigcup_{j\in\mathbb{N}} A'_j\Big) = \bigcup_{j\in\mathbb{N}} T^{-1}(A'_j)$;
- $(\cdot)$ $T^{-1}\Big(\bigcap_{j\in\mathbb{N}} A'_j\Big) = \bigcap_{j\in\mathbb{N}} T^{-1}(A'_j)$;
- $(\cdot)$ $T^{-1}(\mathscr{C}_{\Omega'} A') = \mathscr{C}_{\Omega} T^{-1}(A')$.