UNIVERSITÄT SALZBURG

Fachbereich Mathematik
Ass.-Prof. Dr. Simon Blatt
Besprechung: 20.03.2017

Analysis III

2. Übungsblatt

Aufgabe 5

Zeigen Sie, dass das System der endlichen Vereinigungen halboffener reeller Intervalle

$$\mathcal{A} := \left\{ \bigcup_{i=1}^{n} [a_i, b_i) \colon 0 \leq a_i \leq b_i \leq 1 \text{ für alle } i \in \{1, \dots, n\}, \text{ wobei } n \in \mathbb{N} \right\}$$

eine Algebra auf $[0, 1)$ definiert.

Aufgabe 6

Aus der Vorlesung kennen Sie das 1-dimensionale äußere Lebesgue-Maß auf $\mathbb{R}$, definiert durch

$$\mathcal{L}^1(A) := \inf \left\{ \sum_{i=1}^{\infty} |I_i| \colon A \subset \bigcup_{i=1}^{\infty} I_i \text{ mit halboffenen Intervallen } I_i \subset \mathbb{R} \text{ für alle } i \in \mathbb{N} \right\}$$

für alle $A \subset \mathbb{R}$, wobei $|I_i| = b_i - a_i$ die Länge des Intervalls $I_i = [a_i, b_i)$ mit $a_i \leq b_i$ bezeichne. Bestimmen Sie $\mathcal{L}^1(\mathbb{Q})$ mithilfe einer geeigneten Konstruktion von halboffenen Intervallen, die $\mathbb{Q}$ überdecken.

Aufgabe 7

Sei Ω eine Menge. Für Teilmengen $A, B \in \mathcal{P}(\Omega)$ von Ω bezeichne $A \Delta B := (A \setminus B) \cup (B \setminus A)$ die sogenannte symmetrische Differenz von A und B. Sei $\mathcal{A} \subset \mathcal{P}(\Omega)$ eine Algebra über Ω. Zeigen Sie, dass $(\mathcal{A}, +, \cdot) := (\mathcal{A}, \Delta, \cap)$ ein kommutativer Ring im algebraischen Sinn ist. Bestimmen Sie das $\mathbf{0}$-Element. Begründen Sie, warum das $\mathbf{1}$-Element existiert und geben Sie dieses an. Berechnen Sie schließlich $A+A$, A^2, und $A + \mathbf{1}$.

Aufgabe 8

Sei Ω eine Menge und $\mathcal{E} \subset \mathcal{P}(\Omega)$ eine beliebige Teilmenge der Potenzmenge von Ω. Das Mengensystem

$$\sigma(\mathcal{E}) := \bigcap_{\substack{\mathcal{A} \ \sigma\text{-Algebra über } \Omega, \\ \mathcal{E} \subset \mathcal{A}}} \mathcal{A} \qquad (*)$$

heißt die von $\mathcal{E}$ erzeugte σ-Algebra. Per Definition ist $\mathcal{E} \subset \sigma(\mathcal{E})$ und es gilt $\sigma(\mathcal{E}) \subset \mathcal{F}$, falls $\mathcal{F}$ eine σ-Algebra mit $\mathcal{E} \subset \mathcal{F}$ ist. In diesem Sinne ist $\sigma(\mathcal{E})$ die kleinste σ-Algebra, die $\mathcal{E}$ enthält.

(a) Begründen Sie, dass für eine beliebige Indexmenge I und eine Familie $(\mathcal{A}_i)_{i \in I}$ von σ-Algebren über Ω gilt, dass

$$\bigcap_{i \in I} \mathcal{A}_i$$

eine σ-Algebra über Ω ist. (Dies zeigt, dass das in $(*)$ definierte Mengensystem tatsächlich eine σ-Algebra ist.)

(b) Geben Sie $\sigma(\mathcal{E}_1)$ für $\Omega_1 := \{1, 3, 4, 7\}$ und $\mathcal{E}_1 := \{\{1, 3\}, \{3, 4\}, \{7\}\}$ an.

(c) Es sei μ ein Maß auf der vom Mengensystem $\mathcal{E}_2 := \{\{1\}, \{1, 2\}\}$ erzeugten σ-Algebra über $\Omega_2 := \{1, 2, 3\}$ mit $\mu(\{1\}) = 1$, $\mu(\{1, 2\}) = 2$, und $\mu(\Omega) = 3$. Bestimmen Sie μ.