UNIVERSITÄT SALZBURG

Fachbereich Mathematik
Ass.-Prof. Dr. Simon Blatt
Besprechung: 27.03.2017

Analysis III

3. Übungsblatt

Aufgabe 9

Begründen Sie, dass die Menge $A := \{x \in \mathbb{R}^n \colon \|x\|_\infty \in (1,2)\}$ Lebesgue-messbar ist und bestimmen Sie deren Lebesgue-Maß.

Aufgabe 10

Für $n \in \mathbb{N}$ sei A_n die Menge aller reellen Zahlen im Intervall $[0,1)$, deren Dezimalbruchentwicklung bis zur Stelle n keine 5 enthält. Es sei A die Menge aller reellen Zahlen im Intervall $[0,1)$, deren Dezimalbruchentwicklung keine 5 enthält, und B die Menge aller reellen Zahlen im Intervall $[0,1)$, deren Dezimalbruchentwicklung mindestens eine 5 enthält. Begründen Sie, dass die Mengen A_n, A, und B Lebesgue-messbar sind und berechnen Sie jeweils deren Lebesgue-Maß.

Aufgabe 11

Seien $a, b \in \mathbb{R}$ mit $a < b$ und $f \colon [a,b] \to \mathbb{R}$ eine stetige Funktion. Begründen Sie, dass der Graph $G_f := \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \colon y = f(x)\}$ von f bezüglich dem 2-dimensionalen Lebesgue-Maß messbar ist und zeigen Sie, dass $\mathcal{L}^2(G_f) = 0$.

Aufgabe 12

Eine Menge $M \subset \mathbb{R}^n$ heißt G_δ-Menge, wenn eine Folge $(\mathcal{O}_j)_{j\in\mathbb{N}}$ offener Teilmengen des $\mathbb{R}^n$ existiert so, dass $M = \bigcap_{j\in\mathbb{N}} \mathcal{O}_j$.

(a) Zeigen Sie, dass die endliche Vereinigung von G_δ-Mengen wieder eine G_δ-Menge ist.

(b) Zeigen Sie, dass es für jede Lebesgue-messbare Menge $A \subset \mathbb{R}^n$ eine G_δ-Menge $B \supset A$ mit $\mathcal{L}^n(B \setminus A) = 0$ gibt.