Fachbereich Mathematik
Ass.-Prof. Dr. Simon Blatt
Besprechung: 03.04.2017

Analysis III

4. Übungsblatt

Aufgabe 13

Zeigen Sie die folgende Erweiterung von Satz 1.3.9: Ist μ ein translationsinvariantes, Borel-reguläres äußeres Borel-Maß auf $\mathcal{P}(\mathbb{R}^n)$ mit $\mu([0,1)^n) = \alpha_0 < \infty$, so gilt $\mu = \alpha_0 \mathcal{L}^n$ auf $\mathcal{P}(\mathbb{R}^n)$.

Aufgabe 14

In dieser Aufgabe sollen einige grundlegende Eigenschaften des äußeren sphärischen Hausdorff-Maßes nachgewiesen werden. Zeigen Sie:

(a) $\mathcal{H}^s(T(A)) = \mathcal{H}^s(A)$ für alle Bewegungen $T\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ und alle $A \subset \mathbb{R}^n$;

(b) $\mathcal{H}^s(\lambda A) = \lambda^s \mathcal{H}^s(A)$ für alle $\lambda > 0$ und alle $A \subset \mathbb{R}^n$;

(c) $\mathcal{H}^s(f(A)) \leq L^s \mathcal{H}^s(A)$ für alle $A \subset \Omega$, $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ offen, mit einer zur Lipschitz-Konstante $L > 0$ Lipschitz-stetigen Funktion $f\colon \Omega \to \mathbb{R}^N$.

Aufgabe 15

Es seien $(A_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ und $(C_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ die durch

$$A_n := \left(\tfrac{1}{3}\right)^n A_0 \quad \text{für } n \geq 1 \qquad \text{mit} \qquad A_0 := \bigcup_{k=0}^{\infty} [2k, 2k+1]$$

und

$$C_n := [0,1] \cap \bigcap_{i=0}^{n} A_i \quad \text{für } n \geq 0$$

definierten Folgen von Teilmengen von $\mathbb{R}$. Für $n \geq 0$ besteht C_n aus 2^n paarweise disjunkten Intervallen der Länge 3^{-n}. Die Menge

$$C := \bigcap_{n=0}^{\infty} C_n$$

heißt *Cantor-Menge* und ist ein sehr wichtiges Beispiel in der Maßtheorie. Im Folgenden wollen wir diverse Eigenschaften dieser Menge untersuchen. Um eine bessere Vorstellung der Cantor-Menge zu bekommen, ist es hilfreich, die ersten Folgenglieder von $(C_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ zu zeichnen. Zeigen Sie:

(a) $C \neq \emptyset$;

(b) $C = \partial C$ (Hinweis: Zeigen Sie $C = \overline{C}$ und $\mathring{C} = \emptyset$);

(c) $C \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$;

(d) $\mathcal{L}^1(C) = 0$.

Aufgabe 16

Wir wollen nun die Hausdorff-Dimension der Cantor-Menge C bestimmen und verwenden dazu die Bezeichnungen aus der vorigen Aufgabe.

(a) Bestimmen Sie alle $s > 0$ so, dass $\mathcal{H}^s(C) < \infty$, indem Sie $\mathcal{H}^s_{3^{-n}}(C_n)$ für $n \in \mathbb{N}$ berechnen und eine von n unabhängige obere Schranke finden.

(b) Bestimmen Sie alle $s > 0$ so, dass $\mathcal{H}^s(C) > 0$. Benützen Sie Teilaufgabe (a) und die Stetigkeit des äußeren Maßes $\mathcal{H}^s_\delta$.

(c) Bestimmen Sie die Hausdorff-Dimension der Cantor-Menge.