UNIVERSITÄT SALZBURG

Fachbereich Mathematik
Ass.-Prof. Dr. Simon Blatt
Besprechung: 08.05.2017

Analysis III

6. Übungsblatt

Aufgabe 21

Sei $(f_k)_{k\in\mathbb{N}}$ eine Folge messbarer Funktionen $f_k\colon \Omega \subset \mathbb{R}^n \to \overline{\mathbb{R}}$ mit messbarem Definitionsbereich Ω. Entscheiden Sie, ob die Menge

$$E := \left\{ x \in \Omega\colon \lim_{k\to\infty} f_k(x) \text{ existiert in } \overline{\mathbb{R}} \right\}$$

messbar ist und begründen Sie Ihre Antwort.

Aufgabe 22

Entscheiden Sie jeweils, ob die folgenden Funktionen f_i, $i \in \{1,2,3,4\}$, Borel-messbar sind, und begründen Sie Ihre Antwort.

(a) $f_1\colon [0,1] \to [0,1]$, $f_1 := F$ auf $[0,1]$ mit der Cantor-Funktion F aus Aufgabe 17.

(b) $f_2\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ monoton.

(c) $f_3\colon \mathbb{R} \to \{0,1\}$, $f_3 := \chi_{CV}$ auf $\mathbb{R}$, wobei V die Vitali-Menge bezeichne.

(d) $f_4\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f_4(x) := \sin\left(\frac{1}{x}\right)$ für $x \neq 0$ und $f_4(0) := 0$.

Aufgabe 23

Überprüfen Sie die folgenden Funktionen $g^{(i)}$, $i \in \{1,2,3,4\}$, jeweils auf Messbarkeit sowie $\mathcal{L}^1$-Integrierbarkeit, und berechnen Sie gegebenenfalls das Lebesgue-Integral

$$\int_{\mathbb{R}} g^{(i)}\, d\mathcal{L}^1.$$

(a) $g^{(1)}\colon \mathbb{R} \to [0,\infty]$, definiert durch

$$g^{(1)}(x) := \sum_{k=1}^{\infty} g_k^{(1)}(x) \quad \text{für alle } x \in \mathbb{R},$$

wobei $g_k^{(1)}\colon \mathbb{R} \to [0,1]$ für alle $k \in \mathbb{N}$ gegeben ist durch

$$g_k^{(1)}(x) := \chi_{\left[1-\frac{1}{k^2},1\right]}(x) \quad \text{für alle } x \in \mathbb{R}.$$

(b) $g^{(2)} \colon \mathbb{R} \to [0,1]$, definiert durch $g^{(2)}(x) := \sin(x)\chi_{[0,\pi]}(x)$ für alle $x \in \mathbb{R}$.

(c) $g^{(3)} \colon \mathbb{R} \to [0,1]$, definiert durch $g^{(3)}(x) := x^2\chi_{[0,1]\setminus\mathbb{Q}}(x)$ für alle $x \in \mathbb{R}$.

(d) $g^{(4)} \colon \mathbb{R} \to [-1,1]$, definiert durch $g^{(4)}(x) := \frac{\sin(x)}{x}\chi_{\mathbb{R}\setminus\{0\}}(x)+\chi_{\{0\}}(x)$ für alle $x \in \mathbb{R}$.

Aufgabe 24

Berechnen Sie die Grenzwerte

$$\lim_{n\to\infty} \int_{[0,n]} \left(1 - \tfrac{x}{n}\right)^n e^{x/2}\, d\mathcal{L}^1(x) \quad \text{und} \quad \lim_{n\to\infty} \int_{[0,n]} \left(1 + \tfrac{x}{n}\right)^n e^{-2x}\, d\mathcal{L}^1(x).$$

Verwenden Sie dazu einen geeigneten Konvergenzsatz (Vorsicht: Auch der Integrationsbereich hängt von n ab!) und die Ungleichung vom geometrischen und arithmetischen Mittel.