UNIVERSITÄT SALZBURG

Fachbereich Mathematik
Ass.-Prof. Dr. Simon Blatt
Besprechung: 15.05.2017

Analysis III

7. Übungsblatt

Aufgabe 25

Sei $f\colon \mathbb{R} \to \overline{\mathbb{R}}$ Lebesgue-integrierbar. Zeigen Sie, dass

$$\lim_{n\to\infty} \int_{[n,n+1)} f(x)\, \mathcal{L}^1(dx) = 0.$$

Aufgabe 26

Bestimmen Sie den Wert der Reihe

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n}$$

mithilfe des Integrals

$$\int_{[0,1]} \frac{1}{1+x}\, \mathcal{L}^1(dx).$$

(*Hinweis: Sie werden dabei eine Vertauschung zweier Grenzprozesse rechtfertigen müssen, wofür Sie die Sätze von der monotonen bzw. dominierten Konvergenz verwenden können. Die Aufgabe gilt als gelöst, falls Ihnen das Argument mithilfe von einem dieser Sätze gelingt. Zur Einübung dieser Hilfsmittel wird Ihnen aber nahegelegt, die Vertauschung jeweils einmal komplett mit beiden Sätzen zu begründen.*)

Aufgabe 27

Es sei die Funktionenfolge $f_n\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ für $n \in \mathbb{N}$ gegeben durch

$$\begin{cases} 0 & \text{für } x \in \mathbb{R} \setminus [n, n+1], \\ 2(n-x) & \text{für } x \in [n, n+\frac{1}{2}), \\ 2(x-(n+1)) & \text{für } x \in [n+\frac{1}{2}, n+1]. \end{cases}$$

Berechnen Sie

$$\liminf_{n\to\infty} \int_{\mathbb{R}} f_n(x)\mathcal{L}^1(dx) \qquad \text{und} \qquad \int_{\mathbb{R}} \liminf_{n\to\infty} f_n(x)\mathcal{L}^1(dx)$$

und bringen Sie Ihre Ergebnisse in Zusammenhang mit der Aussage des Lemmas von Fatou.

Aufgabe 28

Das Ziel dieser Aufgabe ist es, Integrale bezüglich dem eindimensionalen Lebesgue-Maß $\mathcal{L}^1$ und dem Zählmaß ξ zu berechnen.

(a) Sei die Funktion $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definiert durch

$$f(x_1, x_2) := \sum_{n=1}^{\infty} [g_n(x_1) - g_{n+1}(x_1)] g_n(x_2) \quad \text{für alle } (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2,$$

wobei für $n \in \mathbb{N}$ die Funktion $g_n\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ gegeben sei durch

$$g_n(y) := n(n+1)\chi_{\left[\frac{1}{n+1}, \frac{1}{n}\right]}(y) \quad \text{für alle } y \in \mathbb{R}.$$

Berechnen Sie die Integrale

$$\int\limits_{\mathbb{R}} \int\limits_{\mathbb{R}} f(x_1, x_2)\, \mathcal{L}^1(dx_1)\mathcal{L}^1(dx_2) \quad \text{und} \quad \int\limits_{\mathbb{R}} \int\limits_{\mathbb{R}} f(x_1, x_2)\, \mathcal{L}^1(dx_2)\mathcal{L}^1(dx_1).$$

(b) Sei die Funktion $f\colon \mathbb{N}^2 \to \mathbb{R}$ definiert durch

$$f(i, j) := \begin{cases} 2 - 2^{-i} & \text{für } i = j, \\ 2^{-i} - 2 & \text{für } i = j+1, \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$$

Berechnen Sie die Integrale

$$\int\limits_{\mathbb{N}} \int\limits_{\mathbb{N}} f(i, j)\, \xi(di)\xi(dj) \quad \text{und} \quad \int\limits_{\mathbb{N}} \int\limits_{\mathbb{N}} f(i, j)\, \xi(dj)\xi(di).$$

(c) Sei die Funktion $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definiert durch

$$f(x_1, x_2) := \begin{cases} 1 & \text{für } x_1 = x_2, \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$$

Berechnen Sie die Integrale

$$\int\limits_{[0,1]} \int\limits_{[0,1]} f(x_1, x_2)\, \mathcal{L}^1(dx_1)\xi(dx_2) \quad \text{und} \quad \int\limits_{[0,1]} \int\limits_{[0,1]} f(x_1, x_2)\, \xi(dx_2)\mathcal{L}^1(dx_1).$$