UNIVERSITÄT SALZBURG

Fachbereich Mathematik
Ass.-Prof. Dr. Simon Blatt
Besprechung: 12.06.2017

Analysis III

10. Übungsblatt

Aufgabe 36

Für $t > 0$ definieren wir die beiden Funktionen

$$F(t) = \int_{(0,\infty)} e^{-tx^2} \cos(x^2)\, \mathcal{L}^1(dx) \quad \text{und} \quad G(t) = \int_{(0,\infty)} e^{-tx^2} \sin(x^2)\, \mathcal{L}^1(dx).$$

(a) Zeigen Sie durch Transformation auf ebene Polarkoordinaten, dass

$$F(t)^2 - G(t)^2 = \frac{\pi t}{4(1+t^2)} \quad \text{und} \quad 2F(t)G(t) = \frac{\pi}{4(1+t^2)}$$

für $t > 0$.

(b) Bestimmen Sie $F(t)$ und $G(t)$ explizit, d. h. leiten Sie aus (a) eine integralfreie Darstellung für F bzw. G her.

(c) Zeigen Sie durch den Grenzübergang $t \to 0$, dass

$$\int_0^\infty \cos(x^2)\, dx = \int_0^\infty \sin(x^2)\, dx = \sqrt{\frac{\pi}{8}}$$

gilt. Begründen Sie dabei, dass die Integrale nicht als Lebesgue-Integrale, aber als uneigentliche Riemann-Integrale, existieren.

Aufgabe 37

Sei $\Omega = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \colon x^2 + y^2 + z^2 \le 1,\ x \ge 0,\ y \ge 0,\ z \ge 0\}$. Berechnen Sie die folgenden Integrale unter Verwendung von Kugelkoordinaten:

(a) $\displaystyle\int_\Omega \frac{z}{(x^2+y^2+z^2)^2+1}\, d\mathcal{L}^3(x,y,z)$;

(b) $\displaystyle\int_\Omega xyz\, d\mathcal{L}^3(x,y,z)$;

(c) $\displaystyle\int_\Omega d\mathcal{L}^3(x,y,z)$.

Aufgabe 38

Die Betafunktion $\beta\colon (0,\infty)^2 \to \mathbb{R}$ und die Gammafunktion $\Gamma\colon (0,\infty) \to \mathbb{R}$ sind definiert als

$$\beta(x,y) = \int\limits_{(0,1)} t^{x-1}(1-t)^{y-1}\,\mathcal{L}^1(dt) \qquad \text{und} \qquad \Gamma(x) = \int\limits_{(0,\infty)} e^{-t}t^{x-1}\,\mathcal{L}^1(dt).$$

(a) Zeigen Sie, dass $\beta(x,y)$ als Lebesgue-Integral existiert für alle $x, y > 0$. (Analoges lässt sich für $\Gamma(x)$ für $x > 0$ nachweisen; dies ist aber nicht verlangt.)

(b) Zeigen Sie mittels Substitution und dem Satz von Fubini, dass

$$\Gamma(x)\Gamma(y) = \beta(x,y)\Gamma(x+y)$$

für alle $x, y > 0$.

(c) Zeigen Sie, dass

$$\Gamma(x) = \lim_{n\to\infty} \frac{n^x n!}{x(x+1)\cdots(x+n)}.$$

Aufgabe 39

Sei $f\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{C}$ integrierbar und $\langle\cdot|\cdot\rangle$ das euklidische Skalarprodukt auf $\mathbb{R}^n$. Die Fourier-Transformierte $\hat{f}$ von f ist definiert als

$$\hat{f}(x) = (2\pi)^{-n/2} \int\limits_{\mathbb{R}^n} f(t)e^{i\langle x|t\rangle}\,\mathcal{L}^n(dt)$$

für alle $x \in \mathbb{R}^n$.

(a) Zeigen Sie die Invarianz der Funktion φ, definiert durch $\varphi(x) = (2\pi)^{-n/2}e^{-\|x\|^2/2}$ für alle $x \in \mathbb{R}^n$, unter Fouriertransformation. (Hinweis: Zeigen und benützen Sie, dass

$$\frac{\partial}{\partial\xi} \int\limits_{\mathbb{R}} e^{-(\tau+i\xi)^2/2}\,\mathcal{L}^1(d\tau) = 0$$

für alle $\xi \in \mathbb{R}$.)

(b) Sei A eine invertierbare, symmetrische, positiv definite $(n\times n)$ - Matrix mit reellen Einträgen. Bestimmen Sie den Wert des Integrals

$$\int\limits_{\mathbb{R}^n} e^{-\langle x|Ax\rangle}\,\mathcal{L}^n(dx).$$

(Hinweis: Hauptachsentransformation.)