Fachbereich Mathematik
Ass.-Prof. Dr. Simon Blatt
Besprechung: 19.06.2017

Analysis III

11. Übungsblatt

Aufgabe 40

Sei die Funktion $F\colon [0,\infty) \to \mathbb{R}$ gegeben durch

$$F(t) = \int_0^1 \frac{x^t - 1}{\log(x)} \, \mathcal{L}^1(dx) \quad \text{für alle } t \geq 0.$$

(a) Zeigen Sie, dass $|F(t)| < \infty$ für alle $t \geq 0$.

(b) Zeigen Sie, dass F auf $(0,\infty)$ differenzierbar ist und berechnen Sie $F'(t)$ für alle $t > 0$.

(c) Bestimmen Sie die integralfreie Darstellung der Funktion F.

Aufgabe 41

Wir betrachten die Funktionen $f\colon [0,1] \times [0,\infty) \to \mathbb{R}$ und $g\colon [0,1]^2 \to \mathbb{R}$, gegeben durch

$$f(x,y) = (2 - xy)xye^{-xy} \quad \text{für alle } (x,y) \in [0,1] \times [0,\infty)$$

bzw.

$$g(x,y) = \frac{x-y}{(x+y)^3} \quad \text{für alle } (x,y) \in [0,1]^2.$$

Begründen Sie, warum Sie zur Berechnung der Lebesgue-Integrale

$$\int_{[0,1]\times[0,\infty)} f \, d\mathcal{L}^2 \quad \text{bzw.} \quad \int_{[0,1]^2} g \, d\mathcal{L}^2$$

den Satz von Fubini jeweils nicht benützen können.

Aufgabe 42

Berechnen Sie die folgenden Integrale:

(a) $\displaystyle\int_A e^{-(x^2+y^2)} \frac{xy}{x^2+y^2} \, \mathcal{L}^2(d(x,y))$ mit $A = \big\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \colon x^2 + y^2 \leq 4,\ x,y \geq 0\big\}$;

(b) $\displaystyle\int_{\mathbb{R}^3} \chi_B \, d\mathcal{L}^3$ mit $B = \big\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \colon 0 \leq y \leq \sqrt{3}x,\ 0 \leq z \leq 2,\ 1 \leq x^2 + y^2 \leq 4\big\}$.

Aufgabe 43

Gegeben sei die Menge $A = \{x \in \mathbb{R}^2 \colon \|x\|^2 < e^{2/3},\ x_1 > 0\}$, wobei $\|\cdot\|$ die euklidische Norm auf $\mathbb{R}^2$ bezeichne. Berechnen Sie das Integral

$$\int_A x_1 \log\left(\|x\|^2\right) \mathcal{L}^2(dx)$$

mithilfe der Transformation $T(\zeta,\eta) = (e^\zeta \cos(\eta), e^\zeta \sin(\eta))$.