Fachbereich Mathematik
Ass.-Prof. Dr. Simon Blatt

Analysis III

Übungsaufgaben

Aufgabe 1

Sei $(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$ ein Maßraum und $f\colon \Omega \to [0,\infty]$ eine messbare Funktion. Zeigen Sie, dass durch

$$\mathcal{A} \ni A \mapsto \nu(A) = \int\limits_A f\, d\mu$$

ein Maß auf $(\Omega, \mathcal{A})$ definiert wird.

Aufgabe 2

Zeigen Sie mithilfe des Satzes über die dominierte Konvergenz, dass die Funktion $f\colon [0,\pi] \to \mathbb{R}$, definiert durch

$$f(x) := \frac{1}{2} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{4k+1}{k!} \cos\left((2k+\tfrac{1}{2})x\right)$$

für alle $x \in [0,\pi]$, integrierbar ist, und berechnen Sie das Integral $\int_{[0,\pi]} f\, d\mathcal{L}^1$.

Aufgabe 3

Berechnen Sie den Wert des Integrals $\int_A f_i\, d\mathcal{L}^2$ für die Menge

$$A = \left\{(x_1,x_2) \in \mathbb{R}^2 \colon 1 \le x_1 \le \sqrt{3},\ 0 \le x_2 \le x_1^2\right\}$$

und für die Funktionen

$$f_1(x_1,x_2) = x_1^3 e^{-x_1 x_2} \quad \text{bzw.} \quad f_2(x_1,x_2) = \frac{x_1}{x_1^2 + x_2^2}.$$

Aufgabe 4

Berechnen Sie

$$\int\limits_{B_1^3(0) \setminus B^3_{1/\sqrt[3]{2}}(0)} e^{\frac{x_3}{\|x\|}}\, \mathcal{L}^3(dx).$$

Aufgabe 5

Seien $A_i \subset A_{i+1} \subset \mathbb{R}^n$ mit $\bigcup_{i\in\mathbb{N}} A_i = \mathbb{R}^n$. Zeigen Sie, dass $f\colon \mathbb{R}^n \to \overline{\mathbb{R}}$ auf $\mathbb{R}^n$ integrierbar ist genau dann, wenn f auf A_i integrierbar ist für alle $i \in \mathbb{N}$ und $\sup_{i\in\mathbb{N}} \int_{A_i} |f|\, dx < \infty$.