UNIVERSITÄT SALZBURG

Fachbereich Mathematik
Prof. Dr. Verena Bögelein
Besprechung: 12.10.2015

Analysis II

1. Übungsblatt

Aufgabe 1

Wir betrachten die Funktion $f\colon D \to \mathbb{R}$, gegeben durch $f(x) := \log\left(\frac{x+1}{6-|x|}\right)$, auf ihrer maximalen Definitionsmenge $D \subset \mathbb{R}$. Weiters bezeichnen wir den Graphen G_f der Funktion f mit $G_f := \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \colon y = f(x)\}$.

(a) Bestimmen Sie D.

(b) Bestimmen Sie die Schnittpunkte von G_f mit den Mengen $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \colon x = 0\}$ bzw. $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \colon y = 0\}$.

(c) Ermitteln Sie das Verhalten von f an den Rändern von $(-1,6)$.

(d) Zeigen Sie, dass $f'(x) > 0$ für alle $x \in (-1,6) \setminus \{0\}$ und berechnen Sie $\lim_{x\searrow 0} f'(x)$ und $\lim_{x\nearrow 0} f'(x)$.

(e) Untersuchen Sie, für welchen Wert von x die Funktion $x \mapsto (x+1)(6-x)$ ein lokales Extremum annimmt. Begründen Sie dann (ohne Verwendung von f'') anhand der Funktion f', dass f im Intervall $(0,6)$ genau einen Wendepunkt besitzt und geben Sie dessen Koordinaten an.

(f) Berechnen Sie $f(5)$ und $f'(2.5)$ und skizzieren Sie G_f unter Verwendung aller bisherigen Ergebnisse.

(g) Zeigen Sie, dass die Einschränkung $g := f\big|_{(-1,0]}$ der Funktion f auf $(-1,0]$ eine Umkehrfunktion g^{-1} besitzt, und zeigen Sie, dass gilt: $g^{-1}(x) = -1 - \frac{5e^x}{e^x-1}$. Was ist der Definitionsbereich von g^{-1}?

(h) Zeichnen Sie den Graphen $G_{g^{-1}}$ in das Koordinatensystem aus Aufgabe (f) ein.

Aufgabe 2

Für $k \in \mathbb{R}_{>0}$ betrachten wir die Funktionen $f_k\colon D_k \to \mathbb{R}$, gegeben durch $f_k(x) := \frac{kx}{x^2-k^2}$, jeweils auf deren maximaler Definitionsmenge $D_k \subset \mathbb{R}$. Der Graph der Funktion f_k wird mit $G_k := G_{f_k}$ bezeichnet.

(a) Bestimmen Sie D_k und untersuchen Sie G_k auf Symmetrie und Schnittpunkte mit den Koordinatenachsen.

(b) Geben Sie das Verhalten von f_k an den Rändern von D_k an.

(c) Berechnen Sie f_k' und untersuchen Sie das Monotonieverhalten von f_k.

(d) Zeigen Sie, dass der Ursprung $(0,0)$ der einzige Wendepunkt von f_k ist und geben Sie eine Gleichung der Tangente t_k an G_k im Wendepunkt an.

(e) Bestimmen Sie die Koordinaten aller weiteren Punkte von G_k, in denen die Tangenten parallel zu t_k verlaufen.

(f) Skizzieren Sie G_2 unter Verwendung aller bisherigen Ergebnisse.

(g) Gegeben sei die Integralfunktion $F\colon (2,\infty) \to \mathbb{R}$ mit $F(x) := \int_3^x f_2(t)\,dt$. Begründen Sie, dass F umkehrbar ist, ermitteln Sie eine integralfreie Darstellung von F, und bestätigen Sie, dass für die Umkehrfunktion F^{-1} gilt: $F^{-1}(x) = \sqrt{5e^x + 4}$.

(h) Zudem sei die Funktion $h\colon [0,2) \to \mathbb{R}$ mit $h(x) := \frac{1}{x-2}$ gegeben (der Graph wird mit G_h bezeichnet). Weisen Sie nach, dass $h(x) < f_2(x)$ für alle $0 \le x < 2$ gilt, und berechnen Sie den Inhalt des Flächenstücks, das im Quadranten $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \colon x \ge 0, y \le 0\}$ zwischen G_2 und G_h liegt.

Aufgabe 3

Berechnen Sie die folgenden Grenzwerte:

(a) $\lim_{x\to\infty} \frac{\sin(x)+5x}{\cos(x)+5x}$

(b) $\lim_{x\to\infty} \frac{e^{5x}}{x^3}$

(c) $\lim_{x\to 1} \frac{x^x - x}{1-x+\log(x)}$

(d) $\lim_{x\to\infty} x \log\left(\frac{x+1}{x-1}\right)$

(e) $\lim_{x\to 0} \left(\frac{1}{\log(1+x)} - \frac{1}{x}\right)$

Aufgabe 4

Zeigen Sie unter Zuhilfenahme des Mittelwertsatzes der Differentialrechnung die Ungleichung

$$\log(1+x) \le \frac{x}{\sqrt{1+x}} \quad \text{für } x > 0.$$

Hinweis: Betrachten Sie dazu die Funktion $f(t) = \log(1+t) - \frac{t}{\sqrt{1+t}}$ im Intervall $[0,x]$.

Aufgabe 5

(a) Sei $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ differenzierbar und konvex, und sei $p\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ zwei mal differenzierbar mit

$$2p'(x) + xp''(x) \le 0 \quad \forall x \in (0,\infty).$$

Zeigen Sie, dass die Funktion $h\colon (0,\infty) \to \mathbb{R}$, gegeben durch $h(x) := f(x) - xp(x)$ konvex ist.

Neben dem Begriff der konvexen *Funktion* gibt es den Konvexitätsbegriff auch für *Mengen*: Man nennt eine Menge M konvex, wenn für alle Elemente a, $b \in M$ und alle $\lambda \in [0,1]$ auch $\lambda a + (1-\lambda)b \in M$ ist (anschaulich gesprochen bedeutet das gerade, dass die Verbindungsstrecke zwischen zwei beliebigen Punkten aus M wieder in M liegt). Beispiele für konvexe Mengen sind etwa einelementige Mengen, Strecken und Geraden, Kreisscheiben, oder auch die leere Menge (Letztere ist per Definition konvex). Als Nächstes soll ein Zusammenhang zwischen einer konvexen Funktion und einer dazu assoziierten konvexen Menge gezeigt werden.

(b) Sei $\emptyset \ne I \subset \mathbb{R}$ ein Intervall und $f\colon I \to \mathbb{R}$ eine Funktion. Man definiert durch

$$E(f) := \{(x,\alpha) \in I \times \mathbb{R} \colon f(x) \le \alpha\}$$

den sogenannten Epigraph $E(f)$ von f. Zeigen Sie, dass gilt:

$$f \text{ konvex} \;\Leftrightarrow\; E(f) \text{ konvex}.$$