UNIVERSITÄT SALZBURG

Fachbereich Mathematik
Prof. Dr. Verena Bögelein
Besprechung: 16.11.2015

# Analysis II

## 4. Übungsblatt

## Theorieaufgaben

1. Erklären Sie den Begriff des uneigentlichen Riemann-Integrals.
2. Formulieren Sie den Satz von Taylor in der qualitativen Form und der Integralform.
3. Definieren Sie den Begriff der Taylor-Reihe und bringen Sie diesen mit Potenzreihen in Zusammenhang.

## Rechen-/Beweisaufgaben

### Aufgabe 22

Entscheiden Sie, ob die beiden uneigentlichen Integrale existieren und berechnen Sie diese gegebenfalls:

a) $\int\limits_0^\infty \sin x \,\mathrm{d}x,$

b) $\int\limits_0^\infty x^n e^{-\alpha x} \mathrm{d}x, \quad$ für $n \in \mathbb{N}$ und $\alpha > 0$.

### Aufgabe 23

Wir wollen zeigen, dass das uneigentliche Riemann-Integral

$$\int\limits_0^\infty \frac{\sin x}{x} \mathrm{d}x \tag{1}$$

existiert. Dafür definieren wir für $y > 0$ die Funktion

$$F(y) := \int\limits_0^y \frac{\sin x}{x} \mathrm{d}x.$$

a) Finden Sie eine Reihendarstellung der Funktion $F$, indem Sie die Reihendarstellung des Sinus benutzen und anschließend die Potenzreihe integrieren (Hinweis: Sie müssen begründen, dass Reihe und Integral vertauscht werden können).

b) Zeigen Sie, dass das Integral (1) existiert. (Hinweis: Zerlegen Sie das Intervall $(0, \infty)$ in Teilintervalle der Länge $\pi$ und benutzen Sie anschließend das Leibniz-Kriterium.)

c) Zeigen Sie, dass das Integral

$$\int_0^\infty \left|\frac{\sin x}{x}\right| \mathrm{d}x$$

nicht existiert. Hinweis: Betrachten Sie für $k \in \mathbb{N}$ das Integral $\int_\pi^{k\pi} \left|\frac{\sin x}{x}\right| \mathrm{d}x$, zerlegen Sie den Integrationsbereich in Teilintervalle der Länge $\pi$ und betrachten den Grenzwert $k \to \infty$.

Bemerkung: Man kann zeigen, dass $\int_0^\infty \frac{\sin x}{x} \mathrm{d}x = \frac{\pi}{2}$ gilt; dies ist aber nicht Teil der Aufgabe.

## Aufgabe 24

a) Bestimmen Sie von der Funktion $f\colon (-\pi/2, \pi/2) \to \mathbb{R}$, $x \mapsto \tan x$ das Taylor-Polynom 3. Ordnung an der Stelle $x_0 = 0$.

b) Bestimmen Sie von der Funktion $g\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $x \mapsto e^{\cos x}$ das Taylor-Polynom 2. Ordnung an der Stelle $x_0 = 0$.

c) Bestimmen Sie von der Funktion $h\colon (0, 2) \to \mathbb{R}$, $x \mapsto \frac{1}{2x - x^2}$ die Taylor-Reihe an der Stelle $x_0 = 1$.

## Aufgabe 25

Gegeben sei die Funktion $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $x \mapsto \frac{x}{e^x}$.

a) Zeigen Sie, dass für alle $k \in \mathbb{N}_0$ gilt:

$$f^{(k)}(x) = (-1)^k \frac{x - k}{e^x}.$$

b) Bestimmen Sie die Taylor-Reihe zu $f$ in $a \in \mathbb{R}$ mit Hilfe von Teilaufgabe a).

c) Bestimmen Sie die Taylor-Reihe zu $f$ in $a \in \mathbb{R}$ mit Hilfe der Reihendarstellung der Exponentialfunktion.

## Zusatzaufgabe

Wir betrachten die Funktion $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, die definiert ist durch

$$f(x) := \sum_{k=0}^\infty \frac{1}{(k!)^k} \cos(k!x).$$

Ziel dieser Aufgabe ist es zu zeigen, dass $f$ in keinem Punkt reell analytisch ist. Zeigen Sie zu diesem Zweck die folgenden Aussagen:

a) Für alle $n \in \mathbb{N}_0$ konvergiert $\sum_{k=0}^\infty (k!)^{n-k} \cos(k!x)$ bzw. $\sum_{k=0}^\infty (k!)^{n-k} \sin(k!x)$ für alle $x \in \mathbb{R}$.

b) $f$ ist differenzierbar mit $f'(x) = -\sum_{k=0}^\infty (k!)^{1-k} \sin(k!x)$.

c) Sei $a \in \mathbb{R}$. Ist $\frac{a}{\pi} \in \mathbb{Q}$, so wächst $f^{(4n)}(a)$ schneller als $(4n)!c^{4n}$ für alle $c > 0$, d.h. für hinreichend großes $n \in \mathbb{N}$ gilt

$$f^{(4n)}(a) > (4n)!c^{4n}.$$

d) Folgern Sie nun, dass $f$ in keinem Punkt reell analytisch ist.