UNIVERSITÄT SALZBURG

Fachbereich Mathematik
Prof. Dr. Verena Bögelein
Besprechung: 14.12.2015

Analysis II

7. Übungsblatt

Hinweis: Da die Übung am 07.12.2015 entfällt, beträgt die Bearbeitungszeit für diesen Übungszettel 2 Wochen. Die Aufgabenanzahl ist dementsprechend erhöht. Wir raten Ihnen daher, rechtzeitig anzufangen und den kompletten Bearbeitungszeitraum auszunützen. Unsere Empfehlung ist, die Aufgaben 35-39 in der ersten Woche zu bearbeiten und die verbleibenden Aufgaben (diese sind tendenziell etwas schwieriger) in der zweiten Woche (die für die Bearbeitung der Aufgaben 40-42 nötige Theorie ist vorher zum Teil noch nicht in der Vorlesung eingeführt worden). Die in der Übung am 14.12.2015 nicht besprochenen Aufgaben werden im Tutorium am 08.01.2016 um 08.15 Uhr im Hörsaal 436 vorgerechnet. Zudem erhalten Sie wie gewohnt Lösungsskizzen für diese Aufgaben. Da alle Aufgaben für den zweiten Übungstest am 15.01.2016 und für die Abschlussklausur zur Analysis II relevant sind, sollten Sie in jedem Fall die Musterlösungen nachvollziehen und idealerweise auch das Tutorium besuchen.

Theorieaufgaben

1. Erklären Sie die Begriffe der Metrik und der Norm.
2. Erklären Sie den Begriff des Skalarprodukts und die Cauchy-Schwarz-Ungleichung.
3. Erklären Sie die Begriffe des Inneren, Äußeren, Randes und Abschlusses einer Menge. Beginnen Sie dafür mit der Definition der Begriffe innerer Punkt, äußerer Punkt und Randpunkt.
4. Erklären Sie den Begriff des topologischen Raumes.

Rechen-/Beweisaufgaben

Aufgabe 35

Es sei für $s > 2$ die Funktion g definiert durch

$$g(s) := \int_{2s}^{s^2} \frac{s[\cos(\log(s)) + \sin(\log(s))] + 3x}{x^2}\, dx.$$

Berechnen Sie $g'(4)$.

Aufgabe 36

Zeigen Sie:

(a) Ist $(X, \|\cdot\|)$ ein normierter Raum, so ist die Abbildung $d\colon X^2 \to \mathbb{R}_{\geq 0}$, definiert durch

$$d(x,y) := \|x-y\| \quad \text{für alle } x, y \in X,$$

eine translationsinvariante, absolut-homogene Metrik auf X.

(b) Ist umgekehrt $d\colon X^2 \to \mathbb{R}_{\geq 0}$ eine translationsinvariante, absolut-homogene Metrik auf einem Vektorraum X, so wird durch

$$\|x\| := d(x,0) \quad \text{für alle } x \in X$$

eine Norm auf X definiert.

Aufgabe 37

Auf dem Raum

$$\mathbb{K}^{\mathbb{N}} := \{x = (x_i)_{i\in\mathbb{N}} \colon x_i \in \mathbb{K} \text{ für alle } i \in \mathbb{N}\}$$

aller Folgen in $\mathbb{K}$ ist die p-Norm definiert durch

$$\|x\|_p := \begin{cases} \left[\sum_{i=1}^{\infty} |x_i|^p\right]^{\frac{1}{p}} & \text{falls } 1 \leq p < \infty, \\ \sup_{i\in\mathbb{N}} |x_i| & \text{falls } p = \infty. \end{cases}$$

Dazugehörig definiert man den Folgenraum aller p-summierbaren Folgen durch

$$\ell^p(\mathbb{K}) := \{x = (x_i)_{i\in\mathbb{N}} \in \mathbb{K}^{\mathbb{N}} \colon \|x\|_p < \infty\}.$$

Zeigen Sie, dass $\left(\ell^p(\mathbb{K}), \|\cdot\|_p\right)$ ein normierter $\mathbb{K}$-Vektorraum ist, dessen Elemente zudem die Hölder-Ungleichung erfüllen. Verwenden Sie dazu die folgende Anleitung:

(i) Weisen Sie zuerst die Vektorraum-Eigenschaften (siehe Aufgabe 10) für den Raum $\ell^p(\mathbb{K})$ nach.

(ii) Beweisen Sie dann für $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ und $x, y \in \mathbb{K}^{\mathbb{N}}$ mit $\|x\|_p + \|y\|_q < \infty$ die Hölder-Ungleichung

$$\sum_{i=1}^{\infty} |x_i y_i| \leq \|x\|_p \|y\|_q,$$

indem Sie die für $\sigma, \tau \geq 0$ und $r \in (0,1)$ gültige Ungleichung vom arithmetischen und geometrischen Mittel $\sigma^r \tau^{1-r} \leq r\sigma + (1-r)\tau$ (diese ist in der Analysis I Vorlesung bewiesen worden) mit geeigneten Wahlen für σ, τ und r benützen.

(iii) Zeigen Sie schließlich, dass die Abbildung $\|\cdot\|_p$ tatsächlich eine Norm auf dem Raum $\ell^p(\mathbb{K})$ ist.

Aufgabe 38

Sei $(X, \|\cdot\|)$ ein $\mathbb{R}$-Vektorraum. Zeigen Sie: Die Norm $\|\cdot\|$ wird durch ein Skalarprodukt induziert genau dann, wenn für alle $x, y \in X$ die sogenannte Parallelogrammgleichung

$$\|x+y\|^2 + \|x-y\|^2 = 2\|x\|^2 + 2\|y\|^2$$

gilt. (Hinweis: Definieren Sie für den Beweis der Rückrichtung das Skalarprodukt als

$$x \cdot y := \tfrac{1}{4}\left(\|x+y\|^2 - \|x-y\|^2\right) \quad \text{für } x, y \in X.$$

Bemerkung: Allgemeiner würde sich die Aussage auch analog mit etwas aufwändigeren Rechnungen für normierte $\mathbb{C}$-Vektorräume zeigen lassen, dies ist jedoch nicht verlangt. Das Skalarprodukt für die Begründung der Rückrichtung wäre in diesem Fall als

$$x \cdot y := \tfrac{1}{4}\left(\|x+y\|^2 - \|x-y\|^2\right) + \tfrac{i}{4}\left(\|x+iy\|^2 - \|x-iy\|^2\right) \quad \text{für } x, y \in X$$

zu definieren.)

Aufgabe 39

(a) Sei (X, d) ein metrischer Raum. Zeigen Sie, dass die Abbildung $d' \colon X \times X \to \mathbb{R}$, definiert durch

$$d'(x,y) := \frac{d(x,y)}{1 + d(x,y)} \quad \text{für alle } x, y \in X,$$

eine Metrik auf X definiert.

(b) Sei $\overline{\mathbb{R}} := \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$. Wir definieren $p(x) := \frac{x}{1+|x|}$ für $x \in \mathbb{R}$ und $p(\infty) := -p(-\infty) := 1$. Zeigen Sie, dass die Abbildung $d \colon \overline{\mathbb{R}} \times \overline{\mathbb{R}} \to \mathbb{R}$, definiert durch $d(x,y) := |p(x) - p(y)|$ für alle $x, y \in \overline{\mathbb{R}}$, eine Metrik auf $\overline{\mathbb{R}}$ ist.

Aufgabe 40

(a) Sei X eine 3-elementige Menge. Bestimmen Sie alle Topologien auf X.

(b) Sei X eine unendliche Menge (eine Menge heißt unendlich, wenn sie nicht endlich ist). Prüfen Sie, ob die folgenden Mengensysteme $\mathcal{M}$ bzw. $\mathcal{M}'$ Topologien auf X sind:

$$\mathcal{M} := \{X \setminus M \colon M \text{ höchstens abzählbar}\} \cup \{\emptyset\},$$
$$\mathcal{M}' := \{X \setminus M \colon M \text{ unendlich}\} \cup \{X\}.$$

(c) Aus der Vorlesung wissen Sie, dass es Topologien gibt, die von einer Metrik induziert werden. In dieser Aufgabe soll gezeigt werden, dass nicht jede Topologie von einer Metrik induziert wird. Sei dazu X eine mindestens 2-elementige Menge. Zeigen Sie, dass die sogenannte Klumpen- bzw. indiskrete Topologie $\{\emptyset, X\}$ nicht metrisierbar ist.

Aufgabe 41

Wir definieren die Mengen M_1, $M_2 \subset \mathbb{R}^2$ und M_3, M_4, $M_5 \subset \mathbb{R}^3$ durch

$$\begin{aligned}
M_1 &:= B_r(0) := \{x \in \mathbb{R}^2 \colon |x| < r\} \text{ für } r > 0,\\
M_2 &:= S_1(0) \cup \{(0,0)\} = \{x \in \mathbb{R}^2 \colon |x| \in \{0,1\}\},\\
M_3 &:= \mathbb{Q}^3,\\
M_4 &:= \mathbb{Z}^3,\\
M_5 &:= \big(A \cup (\mathbb{R}^2 \times \{0\})\big) \setminus \big((0,0) \times \mathbb{R}\big),
\end{aligned}$$

wobei $A := \{x \in \mathbb{R}^3 \colon |x| \leq 1\}$ sei und $|\cdot|$ die 2- bzw. 3-dimensionale euklidische Norm bezeichne.

(a) Bestimmen Sie für $1 \leq i \leq 5$ das Innere $\overset{\circ}{M_i}$, den Abschluss $\overline{M_i}$, den Rand ∂M_i, die Menge der Häufungspunkte M_i', und die Menge der isolierten Punkte $M_i \setminus M_i'$. Sie sollen Ihre Antworten kurz begründen, ein detaillierter Beweis wird jedoch nicht verlangt.

(b) Welche der Mengen M_i $(1 \leq i \leq 5)$ sind offen bzw. abgeschlossen in $\mathbb{R}^n$ ($n = 2$ für $i \in \{1,2\}$, $n = 3$ für $i \in \{3,4,5\}$)?

(c) Welche der Mengen M_i $(1 \leq i \leq 5)$ sind dicht, nirgends dicht bzw. diskret in $\mathbb{R}^n$ ($n = 2$ für $i \in \{1,2\}$, $n = 3$ für $i \in \{3,4,5\}$)?

Aufgabe 42

Sei (X,d) ein metrischer Raum und $M \subset X$ eine beliebige Teilmenge.

(a) Zeigen Sie:

(i) $\overset{\circ}{M} = M \setminus \partial M$;

(ii) $\overline{M} = M \cup \partial M$;

(iii) $\overline{M} = M \cup M'$, wobei M' die Menge der Häufungspunkte von M bezeichne;

(iv) $\partial M = \overline{M} \setminus \overset{\circ}{M} = \partial(X \setminus M)$;

(v) $\mathrm{int}(\mathrm{int}(M)) = \mathrm{int}(M)$, wobei $\mathrm{int}(M) := \overset{\circ}{M}$ das Innere der Menge M bezeichne;

(vi) $\overline{\overline{M}} = \overline{M}$;

(vii) $\partial(\partial M) \subset \partial M$.

(b) Zeigen Sie durch Angabe einer Menge in $\mathbb{R}^n$, deren Rand innere Punkte hat, dass die letzte Inklusion (vii) in Aufgabe 41(a) im Allgemeinen keine Gleichheit ist.