UNIVERSITÄT SALZBURG

Fachbereich Mathematik
Ass.-Prof. Dr. Simon Blatt
Besprechung: 24.10.2016

Analysis II

3. Übungsblatt

Theorieaufgaben

1. Geben Sie die Definition des Riemann-Integrals an.
2. Formulieren Sie die Regel über die Gebietsadditivität des Integrals.
3. Formulieren Sie den Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung (erster Teil).

Rechen-/Beweisaufgaben

Aufgabe 9

Berechnen Sie die folgenden Integrale:

(a) $\displaystyle\int e^x \cdot \sin x \, dx$ (b) $\displaystyle\int \frac{e^x - 1}{e^x + 1} \, dx$ (c) $\displaystyle\int \frac{2x^2 - 2}{(x-1)(x^2 - 2x + 1)} \, dx$

Aufgabe 10

Berechnen Sie das Integral $\displaystyle\int_a^b x^2 dx$ mittels einer Riemann'schen Summe.

Hinweis: Wählen Sie eine äquidistante Zerlegung des Intervalls $[a, b]$ über $x_i := a + ih$ mit $i = 0, \ldots, n$ und $h = \frac{b-a}{n}$ und benützen Sie die Stützstellen $\xi_i := x_{i-1}$ mit $i = 1, \ldots, n$. Setzen Sie zur Vereinfachung zunächst $a = 0$ und verallgemeinern Sie Ihr Ergebnis anschließend indem Sie die Gebietsadditivität des Integrals benützen.

Aufgabe 11

Berechnen Sie das Integral $\displaystyle\int_a^b x^k dx$ $(0 < a < b,\ k \in \mathbb{N})$ mittels einer Riemann'schen Summe.

Hinweis: Nutzen Sie dafür eine Zerlegung des Intervalls $[a, b]$ über $x_i := aq^i$ mit $i = 0, \ldots, n$ und $q = \sqrt[n]{\frac{b}{a}}$ und benützen Sie die Stützstellen $\xi_i := x_{i-1}$ mit $i = 1, \ldots, n$.

Aufgabe 12

a) Seien $F\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ x \mapsto \int_0^{\sin x} \sin\left(\mathrm{e}^t\right)\, dt$ und $G\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ x \mapsto \int_x^{\sin x} \sin\left(\mathrm{e}^t\right)\, dt$. Begründen Sie, dass sowohl F als auch G auf $\mathbb{R}$ differenzierbar sind, und bestimmen Sie $F'(x)$ bzw. $G'(x)$ für jedes $x \in \mathbb{R}$.

b) Ermitteln Sie alle lokalen Extremstellen der Funktion

$$f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ x \mapsto \int_0^x (1+4t)\mathrm{e}^{t^2}\, dt + x\mathrm{e}^{x^2}$$