UNIVERSITÄT SALZBURG

Fachbereich Mathematik
Ass.-Prof. Dr. Simon Blatt
Besprechung: 14.11.2016

Analysis II

5. Übungsblatt

Theorieaufgaben

1. Wie lautet der Mittelwertsatz der Integralrechnung ?
2. Wie lautet die integrale Form des Restgliedes der Taylorapproximation ?
3. Geben Sie die Definition für das *Skalarprodukt* an.

Rechen-/Beweisaufgaben

Aufgabe 17

Sei $B([a,b])$ der Raum aller beschränkten Funktionen $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$. Zeigen Sie:

$$\|f\| := \sup_{x\in[a,b]} |f(x)|$$

ist eine Norm auf $B([a,b])$, d.h. dass $\|.\|$ die Axiome

(N1) $\|f\| \geq 0$ und $\|f\| = 0 \Leftrightarrow f(x) = 0 \quad \forall x \in [a,b]$

(N2) $\|\lambda f\| = |\lambda| \; \|f\| \; \forall \lambda \in \mathbb{R}, f \in B([a,b])$

(N3) $\|f+g\| \leq \|f\| + \|g\| \; \forall f, g \; \in B([a,b])$

erfüllt.

Aufgabe 18

Berechnen Sie die Taylorreihe zu f in a und bestimmen Sie den Konvergenzradius.

a) $f(x) = \cos x, \; a = 1$

b) $f(x) = \log x, \; a = 2$

c) $f(x) = \log \cos x, \; a = 0$

Aufgabe 19

Sei $C_N := \sum_{n=1}^{N} \frac{1}{n} - \log N$.

(a) Zeigen Sie: $0 \leq C_N \leq 1$ für alle $N > 0$. (Hinweis: Satz 1.4.3)

(b) Beweisen Sie, dass
$$C = \lim_{N\to\infty} C_N$$
existiert. (vgl. Stirlingsche Formel)

Aufgabe 20

Für welche Werte von α ist
$$\sum_{k=2}^{\infty} \frac{1}{k^\alpha (\log k)^3}$$
konvergent ?

Zusatzaufgabe

Falls Sie diese Aufgabe gelöst haben, können Sie sie über Doodle ankreuzen und damit ein Bonuskreuz sammeln. Ihnen entsteht in Ihrer Kreuzbilanz jedoch kein Nachteil, falls Sie die Aufgabe nicht bearbeiten konnten.

Kann eine Riemann-integrierbare Funktion an einer Stelle bzw. an endlich vielen Stellen oder sogar an abzählbar vielen Stellen geändert werden ohne, dass dabei die Integrierbarkeit zerstört oder der Wert des Integrals verändert wird? Begründen Sie Ihre Antwort !