UNIVERSITÄT SALZBURG

Fachbereich Mathematik
Ass.-Prof. Dr. Simon Blatt
Besprechung: 19.12.2016

Analysis II

9. Übungsblatt

Theorieaufgaben

1. Geben Sie die Definition des totalen Differentials an.
2. Geben Sie ein Kriterium für Differenzierbarkeit an. Anmerkung: eine Funktion wird als differenzierbar bezeichnet, wenn sie total differenzierbar ist.
3. Formulieren Sie den Satz über die Vertauschbarkeit der Reihenfolge bei höheren partiellen Ableitungen.

Rechen-/Beweisaufgaben

Aufgabe 32

Berechnen Sie die ersten partiellen Ableitungen, sofern diese existieren, von

a) $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}, f(x, y) := \sin(x)e^y + 3x^3y^5$

b) $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2, f(r, \theta) := (r\cos\theta, r\sin\theta)$

Sind die Funktionen differenzierbar ?

Aufgabe 33

Berechnen Sie die ersten partiellen Ableitungen, sofern diese existieren, von

a) $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}, f(x, y) := y\sqrt{2x^2 + y^2}$

b) $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$,

$$f(x, y) := \begin{cases} 0, & \text{falls}(x, y) = (0, 0) \\ \frac{x^3}{\sqrt{x^2+y^2}}, & \text{falls}(x, y) \neq (0, 0) \end{cases}$$

Sind die Funktionen differenzierbar ?

Aufgabe 34

Es sei $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ gegeben durch

$$f(x,y) := \begin{cases} 0, & \text{falls}(x,y) = (0,0) \\ \frac{x^3y - xy^3}{x^2+y^2}, & \text{falls}(x,y) \neq (0,0) \end{cases}$$

a) In welchen Punkten ist die Funktion partiell differenzierbar? Wo ist sie stetig partiell differenzierbar? Berechnen Sie gegebenenfalls alle ersten partiellen Ableitungen und stellen Sie fest, ob die Funktion differenzierbar ist.

b) In welchen Punkten ist die Funktion zweimal partiell differenzierbar? Ist die Funktion zweimal stetig differenzierbar? Berechnen Sie gegebenenfalls alle zweiten partiellen Ableitungen.

Aufgabe 35

Es sei $f : \mathrm{G} \to \mathbb{R}$ ($\mathrm{G} \subset \mathbb{R}^n$ offen) eine zweimal stetig partiell differenzierbare Funktion. Der *Laplace-Operator* ist definiert durch

$$\Delta := \frac{\partial^2}{\partial x_1^2} + \cdots + \frac{\partial^2}{\partial x_n^2}$$

wobei

$$\Delta f = \frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2} + \cdots + \frac{\partial^2 f}{\partial x_n^2}$$

ist. Zeigen Sie, dass für $f\colon \mathbb{R}^n \setminus \{0\} \to \mathbb{R}$ mit

$$f(x) := \begin{cases} \ln \|x\|_2, & n = 2 \\ \|x\|_2^{2-n}, & n > 2 \end{cases}$$

die Laplace-Gleichung $\Delta f = 0$ auf $\mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ gelöst wird.

Aufgabe 36

Es sei $f : \mathrm{G} \to \mathbb{R}$ ($\mathrm{G} \subseteq \mathbb{R}^n$ offen) eine differenzierbare Funktion. Zeigen Sie, dass der Gradient $\nabla f(x_0)$ in folgendem Sinn Betrag und Richtung des maximalen Anstieges von f im Punkt $x_0 \in G$ angibt:

$$Df(x_0)\frac{\nabla f(x)}{\|\nabla f(x_0)\|} = \|\nabla f(x_0)\| = \max_{v \in \mathbb{R}^n, \|v\|=1} Df(x_0)v.$$