UNIVERSITÄT SALZBURG

Fachbereich Mathematik
Ass.-Prof. Dr. Simon Blatt
Besprechung: 09.01.2017

Analysis II

10. Übungsblatt

Theorieaufgaben

1. Formulieren Sie die Kettenregel für mehrdimensionale Ableitungen.
2. Formulieren Sie die verallgemeinerte Produktregel.
3. Geben Sie Kriterien für mehrdimensionale Minima und Maxima einer Funktion an.

Rechen-/Beweisaufgaben

Aufgabe 37

Es sei $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ zweimal stetig differenzierbar und $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}$ verschwinde identisch auf $\mathbb{R}^2$. Zeigen Sie, dass es Funktionen $g, h\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ gibt mit $f(x,y) = g(x) + h(y)$ für alle $x, y \in \mathbb{R}$.

Aufgabe 38

Bestimmen Sie das Taylor-Polynom n-ten Grades im Punkt a für die folgenden Funktionen:

(a) $f\colon (0,\infty)^2 \to \mathbb{R}$, $f(x,y) = \log(1 + x + y)$, wobei $n = 3$ und $a = (0,1)$;

(b) $g\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$, $g(x,y,z) = e^{yz}(\cos(x) + \sin(z))$, wobei $n = 2$ und $a = (0,0,0)$.

Aufgabe 39

Eine positiv definite Hesse-Matrix lässt sich ausnützen, um nachzuweisen, dass ein kritischer Punkt einer Funktion eine Minimalstelle ist. Verschwinden die höheren Ableitungen der Funktion jedoch alle bis zu einem gewissen Grad, so lässt sich mit diesem Kriterium nicht argumentieren. Das Ziel dieser Aufgabe ist, eine alternative Strategie zu entwickeln. Sei dazu $k \in \mathbb{N}$ ungerade, $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ ein Gebiet, $x_0 \in \Omega$, und $f \in C^{k+1}(\Omega; \mathbb{R})$ eine Funktion mit

- $\nabla f(x_0) = 0$ und $D^i f(x_0) = 0$ für alle $i \in \{2, ..., k\}$;
- $D^{k+1} f(x_0)\zeta^{k+1} > 0$ für alle $\zeta \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$.

Zeigen Sie, dass dann f in x_0 ein Minimum hat. Überlegen Sie sich zudem, wie sich ein analoges Kriterium für Maximalstellen von f formulieren lässt.

Aufgabe 40

Seien $f\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ und $g\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ gegeben durch

$$f(x,y,z) = 2\cos(z) + \sin(x)\sin(y) \qquad \text{bzw.} \qquad g(x,y,z) = \begin{pmatrix} x^2+y^2 \\ \cos(x^2)\cos(y^2) \\ e^{x+y+z} \end{pmatrix}.$$

Berechnen Sie die kritischen Werte von f und g. Geben Sie für $f|_{[0,2\pi)^3}$ zusätzlich an, bei welchen der berechneten kritischen Punkte es sich um Minima bzw. Maxima handelt.

Aufgabe 41

Das Ziel dieser Aufgabe ist es, den sog. *Schrankensatz* zu zeigen. Dafür definieren wir zunächst zwei Begriffe:

- Definition [*konvexe Menge*]: Eine Menge $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ heißt konvex, falls für zwei beliebige Punkte $x_1, x_2 \in \Omega$ auch deren gesamte Verbindungsstrecke $\{x_1 + t(x_2 - x_1)\colon t \in [0,1]\}$ in Ω liegt.
- Definition [*Operatornorm*]: Seien $(V, \|\cdot\|_V)$ und $(W, \|\cdot\|_W)$ normierte Räume und $A\colon V \to W$ eine Abbildung. Dann definiert man die Operatornorm von A als

$$\|A\|_{V\to W} := \sup_{v \in V\setminus\{0\}} \frac{\|Av\|_W}{\|v\|_V}.$$

Sei nun $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ ein konvexes Gebiet und $f \in C^1(\Omega; \mathbb{R}^m)$ eine Abbildung mit

$$\|Df(x)\|_{\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m} \le L$$

für alle $x \in \Omega$ und einem $L \ge 0$. Zeigen Sie, dass f Lipschitz-stetig auf Ω ist.

Viel Erfolg mit dem Übungszettel, frohe Weihnachten,
und einen guten Rutsch ins neue Jahr 2017!