Fachbereich Mathematik
Univ.-Prof. Dr. Verena Bögelein
Sommersemester 2018

01. Blatt zur Übung Analysis II

(Besprechung am 12.03.2018)

Theorieaufgaben.

(1) Formulieren Sie den *Mittelwertsatz der Integralrechnung.*

(2) Formulieren Sie den *Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung.*

Beweisaufgaben.

Aufgabe 01.

(a) Sei $f\colon \mathbb{R} \supset D \to \mathbb{R}$ eine gleichmäßig stetige Funktion auf D und $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Cauchyfolge in D. Zeigen Sie, dass dann die Folge $(f(x_n))_{n\in\mathbb{N}}$ eine Cauchyfolge in $\mathbb{R}$ ist.

Bemerkung: Gleichmäßig stetige Funktionen bilden also Cauchyfolgen wieder auf Cauchyfolgen ab.

(b) Überzeugen Sie sich, dass die Aussage in (a) im Allgemeinen nicht für (punktweise) stetige Funktionen gilt, indem Sie ein Gegenbeispiel angeben.

(c) Beweisen Sie nun mithilfe von (a) folgende Aussage: Sei $(a,b) \subset \mathbb{R}$ ein beschränktes, offenes Intervall und $g\colon (a,b) \to \mathbb{R}$ eine (punktweise) stetige Funktion. Dann ist g genau dann gleichmäßig stetig auf (a,b), wenn sich g stetig auf $[a,b]$ fortsetzen lässt, d.h. es gibt eine (punktweise) stetige Funktion $\bar{g}\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ mit $\bar{g}\big|_{(a,b)} = g$.

Bemerkung: Man nennt $\bar{g}$ dann eine *stetige Fortsetzung* von g auf $[a,b]$.

Aufgabe 02. Berechnen Sie die folgenden bestimmten Integrale.

(a) $\displaystyle\int_{-1}^{2} \frac{3x+11}{x^2-x-6}\,dx,$

(b) $\displaystyle\int_{0}^{2} \frac{x}{\sqrt{x^2+2}}\,dx,$

(c) $\displaystyle\int_{-2}^{1} \arctan(x)\,dx.$

Aufgabe 03. Berechnen Sie folgende unbestimmte Integrale.

(a) $\displaystyle\int \frac{(3-\tan(4x))^3}{\cos^2(4x)}\,dx,$

(b) $\displaystyle\int e^x \sin(x)\,dx,$

(c) $\displaystyle\int \frac{x^4-5x^3+6x^2-18}{x^3-3x^2}\,dx.$

Aufgabe 04. In der Vorlesung ist das Integral über die Funktion $[-1,1] \ni x \mapsto \sqrt{1-x^2}$ berechnet worden, um den Flächeninhalt von Sektoren des Einheitskreises zu bestimmen. Analog kann man auch den Flächeninhalt von Sektoren an Hyperbeln erhalten (eine Hyperbel wird durch die Funktionsgleichung $y^2 = x^2 - 1$ beschrieben).

(a) Berechnen Sie dazu zunächst für $f\colon [1,\infty) \to \mathbb{R}$, $f(x) := \sqrt{x^2-1}$ das Integral

$$\int f(x)\,dx.$$

(b) Berechnen Sie jetzt den Inhalt des von der Hyperbel $y^2 = x^2 - 1$, der x-Achse, und der Geraden durch $(0,0)$ und einen Punkt (x_0, y_0) des Graphen der Hyperbel eingeschlossene Flächenstück, d.h. den Inhalt des in der Grafik rot schraffierten Bereichs.