UNIVERSITÄT SALZBURG

Fachbereich Mathematik
Univ.-Prof. Dr. Verena Bögelein
Sommersemester 2018

03. Blatt zur Übung Analysis II

(Besprechung am 09.04.2018)

Theorieaufgaben.

(1) Formulieren Sie den *Satz von Taylor* mit der *Integraldarstellung des Restglieds.*

(2) Definieren Sie, was man unter einer *reell-analytischen* Funktion $f\colon \mathbb{R} \supset I \to \mathbb{R}$ versteht.

Beweisaufgaben.

Aufgabe 09.

(a) Untersuchen Sie mithilfe der Konvergenzkriterien aus der Vorlesung das folgenden Integral auf Konvergenz bzw. Divergenz.

$$\int_0^\infty \sin(x^2)\,dx.$$

Hinweis: Substituieren Sie $t = x^2$.

(b) Bestimmen Sie alle $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, für die das uneigentliche Integral

$$\int_1^\infty \frac{1}{x^\alpha \log(x)^\beta}\,dx$$

konvergiert.

Hinweis: Auch hier kann eine Substitution weiterhelfen.

(c) Zeigen Sie, dass das uneigentliche Integral

$$\int_0^\infty \frac{\sin(x)}{x}\,dx$$

existiert.

Hinweis: Teilen Sie das Integral auf und schätzen Sie eines der Teilintegrale direkt nach oben ab. Wenden Sie auf das andere Teilintegral partielle Integration an und behandeln Sie das dabei entstandene Integral mit dem Majorantenkriterium.

Aufgabe 10. Berechnen Sie von folgenden Funktionen das Taylorpolynom zweiter Ordnung in den jeweils angegebenen Entwicklungspunkten x_0:

(a) $f_1(x) := \frac{\sin(x^2)}{e^x}$ in $x_0 = 1$,

(b) $f_2(x) := \sqrt{x + \frac{1}{x}}$ in $x_0 = 2$,

(c) $f_3(x) := x^2 - 3x + 1$ in $x_0 = -1$,

(d) $f_4(x) := \frac{1}{2x - x^2}$ in $x_0 = -2$.

Aufgabe 11. Ziel dieser Aufgabe ist es, eine Reihendarstellung des *artanh* zu erhalten. Gehen Sie dazu wie folgt vor:

(a) Zeigen Sie zunächst, dass $\operatorname{artanh}(x) = \frac{1}{2}\log\left(\frac{1+x}{1-x}\right)$ für $|x| < 1$ gilt.

(b) Beweisen Sie nun, dass für $|x| < 1$ gilt: $f'(x) = \sum_{k=0}^{\infty} x^{2k}$.

(c) Schließen Sie daraus, dass $\operatorname{artanh}(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^{2k+1}}{2k+1}$ für $|x| < 1$.

Aufgabe 12. Gegeben sei die Funktion $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $x \mapsto \frac{x}{e^x}$.

(a) Zeigen Sie, dass für alle $k \in \mathbb{N}_0$ gilt:

$$f^{(k)}(x) = (-1)^k \frac{x-k}{e^x}.$$

(b) Bestimmen Sie mithilfe von (a) die Taylorreihe zu f im Punkt $a \in \mathbb{R}$.

(c) Bestimmen Sie nun mithilfe der Reihendarstellung der Exponentialfunktion die Taylorreihe zu f im Punkt $a \in \mathbb{R}$.

Aufgabe 13. Wir betrachten die Funktion $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, definiert durch

$$f(x) := \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\cos(k!x)}{(k!)^k}.$$

Wir wollen nun zeigen, dass f in keinem Punkt des Definitionsbereichs reell-analytisch ist. Zeigen Sie zu diesem Zweck die folgenden Aussagen:

(a) Die Reihen $\sum_{k=0}^{\infty} (k!)^{n-k} \cos(k!x)$ und $\sum_{k=0}^{\infty} (k!)^{n-k} \sin(k!x)$ konvergieren für alle $n \in \mathbb{N}_0$ auf ganz $\mathbb{R}$.

(b) f ist differenzierbar mit $f'(x) = -\sum_{k=0}^{\infty} (k!)^{1-k} \sin(k!x)$.

Hinweis: Schätzen sie den Ausdruck $\left|\frac{f(x+h)-f(x)}{h} + \sum_{k=0}^{\infty} (k!)^{1-k} \sin(k!x)\right|$ mithilfe der Taylorentwicklung von $\cos(k!(x+h))$ geeignet nach oben ab und betrachten Sie anschließend den Grenzübergang $h \to 0$.

(c) Ist $a \in 2\pi\mathbb{Q}$, so gibt es zu jedem $c > 0$ ein $n = n(c) \in \mathbb{N}$, sodass $f^{(4n)}(a) > (4n)!c^{4n}$.

(d) f ist in keinem Punkt $x \in \mathbb{R}$ reell-analytisch.

Hinweis: Sie dürfen dazu ohne Beweis benutzen, dass auch die Umkehrung von Satz 3.4 aus der Vorlesung richtig ist.

Hinweis: Aufgabe 13 kann auch gekreuzt werden, wenn eine Teilaufgabe fehlen sollte.

Wir wünschen Ihnen schöne Osterferien!
