UNIVERSITÄT SALZBURG

Fachbereich Mathematik
Univ.-Prof. Dr. Verena Bögelein
Sommersemester 2018

12. Blatt zur Übung Analysis II (Teil B)

(Besprechung am 18.06.2018)

Theorieaufgaben.

(1) Erklären Sie den Begriff der *totalen Differenzierbarkeit* und den Begriff der *stetigen Differenzierbarkeit* einer Funktion $f\colon E \supset D \to F$ zwischen normierten Räumen E, F.

(2) Erklären Sie den Zusammenhang zwischen *totaler Ableitung* und *Richtungsableitung* und geben Sie die Matrixdarstellung von $(Df)(x_0)$ im Fall $f\colon \mathbb{R}^n \supset D \to \mathbb{R}^m$ und $x_0 \in D$ an.

Beweisaufgaben.

Aufgabe 45. Sei $x = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ und $y = (y_1, \dots, y_m) \in \mathbb{R}^m$, wobei $m < n$ gelte. Wir betrachten nun die Abbildungen $g\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ und $h\colon \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}$, definiert via

$$g(x) := \begin{pmatrix} g_1(x) \\ g_2(x) \\ \dots \\ g_m(x) \end{pmatrix} := \begin{pmatrix} (x_1)^1 \\ (x_2)^2 \\ \dots \\ (x_m)^m \end{pmatrix}, \quad h(y) := \exp(\|y\|_2^2).$$

Berechnen Sie $Dg(0)$, $D(h \circ g)(0)$ und $(Dh)(g(0))$.

Aufgabe 46. Untersuchen Sie die folgenden Funktionen im Ursprung $(0,0)$ auf Stetigkeit, Richtungsdifferenzierbarkeit (in alle Richtungen) sowie auf totale Differenzierbarkeit und stetige Differenzierbarkeit:

(a) $f_1(x,y) := \begin{cases} \frac{3x^2y - y^3}{x^2+y^2}, & (x,y) \neq (0,0); \\ 0, & (x,y) = (0,0). \end{cases}$

(b) $f_2(x,y) := \begin{cases} \frac{xy^3}{x^2+y^4}, & (x,y) \neq (0,0); \\ 0, & (x,y) = (0,0). \end{cases}$

(c) $f_3(x,y) := \begin{cases} (x^2+y^2)\sin(\frac{1}{x^2+y^2}), & (x,y) \neq (0,0); \\ 0, & (x,y) = (0,0). \end{cases}$

Aufgabe 47. Sei $\emptyset \neq A \subset \mathbb{R}^n$ kompakt und $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge Lipschitz-stetiger Funktionen $f_n\colon A \to A$ mit Lipschitz-Konstanten $0 < L_n < 1$, also zu jedem $n \in \mathbb{N}$ gibt es $L_n \in (0,1)$, sodass für alle $x, y \in A$ gilt:

$$\|f_n(x) - f_n(y)\| \leq L_n \|x - y\|.$$

Desweiteren konvergiere die Funktionenfolge $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ punktweise gegen eine Funktion $f\colon A \to A$ bei $n \to \infty$. Beweisen Sie nun folgende Aussagen:

(a) Jede Funktion f_n hat genau einen Fixpunkt a_n.

(b) Es gibt eine Teilfolge $(f_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$, die gleichmäßig gegen f konvergiert.

(c) Die Folge der Fixpunkte $(a_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$ hat eine konvergente Teilfolge.

(d) Die Funktion f hat einen Fixpunkt a.

Aufgabe 48. Wir betrachten die Funktion $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, definiert durch

$$f(x,y) := \begin{cases} \frac{x^3y-xy^3}{x^2+y^2}, & (x,y)\neq(0,0); \\ 0, & (x,y)=(0,0); \end{cases}$$

und definieren die (gemischten) zweiten partiellen Ableitungen von f als

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}(x,y) := \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial y}(x,y)\right) \text{ bzw. } \frac{\partial^2 f}{\partial y\partial x} := \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial x}(x,y)\right),$$

sofern die iterierten partiellen Ableitungen existieren.

(a) Berechnen Sie $\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}(x,y)$ und $\frac{\partial^2 f}{\partial y\partial x}(x,y)$ zunächst für $(x,y)\neq(0,0)$.

(b) Berechnen Sie nun $\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}(0,0)$ und $\frac{\partial^2 f}{\partial y\partial x}(0,0)$. Was stellen Sie fest?