UNIVERSITÄT SALZBURG

Fachbereich Mathematik
Univ.-Prof. Dr. Verena Bögelein
Wintersemester 2017/18

11. Blatt zur Übung Analysis I

(Besprechung am 18.12.2017)

Theorieaufgaben.

(1) Erklären Sie die Begriffe der *Umgebung* und der *punktierten Umgebung* eines Punktes x_0 und definieren Sie den Begriff des *Grenzwerts einer Funktion* auf zwei verschiedene Weisen.

(2) Erklären Sie den Begriff des *einseitigen Grenzwerts* und des *uneigentlichen Grenzwerts für Funktionen* sowie den Begriff des *Grenzübergangs aus einer Teilmenge* $D \subset \mathbb{C}$.

(3) Erklären Sie das *Folgenkriterium*, das *Monotoniekriterium* sowie das *Cauchy-Kriterium* für Grenzwerte von Funktionen.

Beweisaufgaben.

Aufgabe 37.
Sei $D \subseteq \mathbb{C}$ nichtleer und $x_0 \in D$. Zeigen Sie, dass die drei folgenden Aussagen äquivalent zueinander sind:

(i) Es gibt eine Folge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ in D mit $x_n \neq x_0$ für alle $n \in \mathbb{N}$ und $x_n \to x_0$ bei $n \to \infty$.

(ii) In jeder Umgebung U von x_0 liegen unendlich viele Punkte aus D.

(iii) In jeder Umgebung U von x_0 gibt es ein $x \in D \setminus \{x_0\}$.

Aufgabe 38.
Beweisen Sie folgende Aussagen über Grenzwerte der Exponential- und Logarithmusfunktion, indem Sie ausschließlich mit der Definition des Grenzwerts für Funktionen argumentieren:

(a) $\lim\limits_{x\to\infty} a^x = \begin{cases} \infty, & \text{wenn } a > 1, \\ 1, & \text{wenn } a = 1, \\ 0, & \text{wenn } 0 < a < 1, \end{cases}$

(b) $\lim\limits_{x\to-\infty} a^x = \begin{cases} 0, & \text{wenn } a > 1, \\ 1, & \text{wenn } a = 1, \\ \infty, & \text{wenn } 0 < a < 1, \end{cases}$

(c) $\lim\limits_{x\to\infty} \log(x) = \infty$,

(d) $\lim\limits_{x\downarrow 0} \log(x) = -\infty$.

Aufgabe 39.
Beweisen Sie folgende Aussagen über Grenzwerte von Potenz-, Exponential- und Logarithmusfunktionen: Für $b \in \mathbb{R}$ folgt aus $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = b$, dass

(a) $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)^t = b^t$, wenn b^t definiert ist und $f \geq 0$ im Fall $b = 0$ und $t \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{N}$,

(b) $\lim\limits_{x\to x_0} q^{f(x)} = q^b$ für $q > 0$,

(c) $\lim\limits_{x \to x_0} \log(f(x)) = \log(b)$, für $b > 0$.

Anleitung: Beweisen Sie die Dehnungsbeschränktheit der Funktionen $y \mapsto y^t$, $y \mapsto q^y$ und $y \mapsto \log(y)$ auf einer δ-Umgebung $B_\delta(b) \subset \mathbb{R}$ von b. Schreiben Sie dafür bei $y \mapsto y^t$ und $y \mapsto q^y$ die Differenz zweier Punkte in $B_\delta(b)$ geschickt um, sodass Sie die Bernoulli-Ungleichungen für reelle Zahlen aus der Vorlesung anwenden können, um die Ausdrücke geeignet nach oben abzuschätzen. Unterscheiden Sie dabei die Fälle $t < 0$, $0 \leq t \leq 1$ und $1 < t$ sowie $0 < q < 1$ und $1 \leq q$. Benutzen Sie für $y \mapsto \log(y)$ eine fundamentale Abschätzung aus der Vorlesung. Folgern Sie anschließend durch Anwendung eines Satzes aus der Vorlesung, dass obige Behauptungen gelten.

Aufgabe 40.
Beweisen Sie die sogenannte *Substitutionsregel* für Grenzwerte von Funktionen:
Ist $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = b$ und $\lim\limits_{B \ni y \to b} g(y) = c$ für eine Menge B, welche das Bild einer punktierten Umgebung von x_0 umfasst, so gilt $\lim\limits_{x \to x_0} g(f(x)) = c$, wobei im Fall $f(x) = b$ für ein $x \in U_{\neq x_0}$ noch $g(b) = c$ vorausgesetzt werden muss.

Aufgabe 41.
Bestimmen Sie für $t > 0$ folgende Grenzwerte für Funktionen, indem Sie die Substitutionsregel aus Aufgabe 40 anwenden:

(a) $\lim\limits_{x \downarrow 0} x^t \log(x) = 0$,

(b) $\lim\limits_{x \to \infty} \dfrac{(\log(x))^r}{x^t} = 0$ für $r > 0$,

(c) $\lim\limits_{x \downarrow 0} x^t |\log(x)|^r = 0$ für $r > 0$.