Fachbereich Mathematik
Univ.-Prof. Dr. Verena Bögelein
Wintersemester 2017/18

1. Blatt zur Übung Analysis I

(Besprechung am 09.10.2017)

Theorieaufgaben:

1. Formulieren Sie präzise die *Körperaxiome* der reellen Zahlen $\mathbb{R}$.
2. Formulieren Sie präzise die *Anordnungsaxiome* der reellen Zahlen $\mathbb{R}$.

Beweisaufgaben:

Aufgabe 1.

(a) Für $x \in \mathbb{R}$ sei die Betragsungleichung

$$||x| - 1| < |x - 1|$$

sowie die Betragsgleichung

$$||x| - 1| \cdot ||x| + 1| = |x^2 - 1|$$

gegeben. Bestimmen Sie deren Lösungsmenge, d.h. begründen Sie, welche $x \in \mathbb{R}$ die Ungleichung bzw. die Gleichung erfüllen.

(b) Desweiteren definieren wir für $x, y \in \mathbb{R}$ die Funktionen

$$\max\{x, y\} := \begin{cases} x & \text{falls } x \geq y, \\ y & \text{sonst} \end{cases} \qquad \text{sowie} \qquad \min\{x, y\} := \begin{cases} x & \text{falls } x \leq y, \\ y & \text{sonst.} \end{cases}$$

Finden Sie je eine Formel, welche das Maximum $\max\{x, y\}$ bzw. das Minimum $\min\{x, y\}$ zweier reeller Zahlen $x, y \in \mathbb{R}$ durch die Terme x, y und $|x - y|$ ausdrückt und beweisen Sie diese.

Aufgabe 2. Sei $(\mathbb{K}, +, \cdot)$ ein Körper. Zeigen Sie, dass für $x, y, 0, 1 \in \mathbb{K}$ folgende Aussagen gelten:

(a) Ein neutrales Element 1 der Multiplikation und ein multiplikativ inverses Element x^{-1} zu x sind eindeutig bestimmt.
Anmerkung: Man darf also von *der* Eins und *dem* multiplikativ Inversen zu x sprechen.
Hinweis: Nehmen Sie für den Beweis an, es gäbe eine zweite Eins $\tilde{1}$ mit den gleichen Eigenschaften wie 1 und zeigen Sie, dass $\tilde{1} = 1$ gelten muss. Verfahren Sie ähnlich mit x^{-1} und einem zweiten Inversen $\tilde{x}^{-1}$ zu x.

(b) $x \cdot 0 = 0$ für alle $x \in \mathbb{K}$.
Anmerkung: Aufgrund dieser Eigenschaft hat 0 kein multiplikativ Inverses.
Hinweis: $0 = 0 + 0$.

(c) $x \cdot y = 0$ gilt genau dann, wenn $x = 0$ oder $y = 0$ gilt.
Anmerkung: Diese Eigenschaft bedeutet, dass es keine Elemente ungleich 0 in einem Körper geben kann, welche die 0 teilen.

Aufgabe 3. Sei $(\mathbb{K}, +, \cdot)$ ein Körper. Zeigen Sie, dass für $a, b, c, d \in \mathbb{K}$ mit $b, d \neq 0$ folgende „Rechenregeln“ gelten:

(a) $a \cdot b^{-1} = c \cdot d^{-1}$ gilt genau dann, wenn $a \cdot d = b \cdot c$ gilt.

(b) $(a \cdot b^{-1}) \pm (c \cdot d^{-1}) = (a \cdot d \pm b \cdot c) \cdot (b \cdot d)^{-1}$.

(c) $(a \cdot b^{-1}) \cdot (c \cdot d^{-1}) = (a \cdot c) \cdot (b \cdot d)^{-1}$.

(d) $(a \cdot b^{-1}) \cdot (c \cdot d^{-1})^{-1} = (a \cdot d) \cdot (b \cdot c)^{-1}$, falls zusätzlich auch $c \neq 0$ ist.

Aufgabe 4. Beweisen Sie, dass für alle reellen Zahlen $x, y \in \mathbb{R}$ die *Youngsche Ungleichung*

$$xy \leq \frac{x^2}{2} + \frac{y^2}{2}$$

gilt. Beweisen Sie außerdem - wiederum für $x, y \in \mathbb{R}$ sowie für $\varepsilon > 0$ - folgende *Verallgemeinerung der Youngschen Ungleichung*:

$$xy \leq \varepsilon x^2 + \frac{1}{4\varepsilon} y^2.$$

Hinweis: Sie dürfen hierbei ohne Beweis annehmen, dass es eine reelle Zahl $\tau > 0$ gibt mit $\tau^2 = 2\varepsilon$.

Literaturvorschläge zur Vorlesung:

- **M. Barner, F. Flohr**; *Analysis I*; Verlag Walter de Gruyter.
- **O. Forster**; *Analysis I*; Vieweg-Verlag.
- **H. Heuser**; *Lehrbuch der Analysis, Teil 1*; Teubner-Verlag.
- **S. Hildebrandt**; *Analysis 1*; Springer-Verlag.
- **K. Königsberger**; *Analysis 1*; Springer-Verlag.
- **W. Rudin**; *Analysis*; Oldenbourg-Verlag.
- **W. Walter**; *Analysis I*; Springer-Verlag.
