UNIVERSITÄT SALZBURG

03.03.2015
Prof. Dr. Verena Bögelein

Analysis 1

1. Übungsblatt

Aufgabe 1

Man zeige: Es gelten die folgenden Regeln für das Bruchrechnen ($a, b, c, d \in \mathbb{R}$, $b \neq 0$, $d \neq 0$):

1. $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$ gilt genau dann, wenn $ad = bc$ ist.
2. $\frac{a}{b} \pm \frac{c}{d} = \frac{ad \pm bc}{bd}$.
3. $\frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d} = \frac{ac}{bd}$
4. $\frac{\frac{a}{b}}{\frac{c}{d}} = \frac{ad}{bc}$, falls $b, c \neq 0$ ist.

Aufgabe 2

Berechnen Sie folgende Ausdrücke:

1. $\frac{1}{2} \cdot \frac{3}{4} \cdot \frac{5}{6}$
2. $\frac{\frac{3}{4}}{\frac{5}{2}} + \frac{7}{10}$
3. $\frac{\left(\frac{1}{4} - \frac{1}{6}\right) \cdot \frac{3}{4} + \frac{2}{3}}{\frac{5}{3} - \frac{2}{6}}$
4. $\frac{\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{6}\right)\left(\frac{2}{5} - \frac{3}{4}\right)}{\frac{3}{4} - \frac{5}{12} + \frac{1}{3}}$

Aufgabe 3

Zeigen Sie, dass für alle reellen Zahlen a, b gilt

$$ab \leq \frac{a^2}{2} + \frac{b^2}{2}.$$

Außerdem gilt für $\varepsilon > 0$

$$ab \leq \varepsilon a^2 + \frac{1}{4\varepsilon} b^2.$$

(Hinweis: Verwenden Sie ohne Beweis, dass es eine Zahl $\tau > 0$ gibt mit $\tau^2 = \varepsilon$.)

Aufgabe 4

Es sei $0 < a \leq b$. Zeigen Sie die beiden folgenden Aussagen: Es gilt

$$a^2 \leq \left(\frac{2ab}{a+b}\right)^2 \leq ab \leq \left(\frac{a+b}{2}\right)^2 \leq b^2.$$

Trifft an irgendeiner Stelle dieser Ungleichungskette das Gleichheitszeichen zu, so ist $a = b$.