UNIVERSITÄT SALZBURG

26.05.2015
Prof. Dr. Verena Bögelein

Analysis 1

11. Übungsblatt

Aufgabe 45

Seien $M_1 := \{z \in \mathbb{C}\colon |z| \le 2\}$ und $M_2 := \{z \in \mathbb{C}\colon \mathrm{Re}(z) \ge 0,\, \mathrm{Im}(z) < 0\}$ zwei Mengen.

(a) Untersuchen Sie M_1 und M_2 auf (Folgen-) Kompaktheit.

(b) Sind M_1, M_2 offen?

(c) Bestimmen Sie das Innere, d. h. die Menge aller inneren Punkte, $\mathring{M}_1$ bzw. $\mathring{M}_2$ von M_1 und M_2 .

(d) Bestimmen Sie die Menge aller Randpunkte ∂M_1 bzw. ∂M_2 von M_1 und M_2.

Aufgabe 46

(a) Untersuchen Sie die Funktion $p\colon \mathbb{R}\setminus\{0\} \to \mathbb{R}$, definiert durch $p(x) := \frac{1}{x}$, auf Stetigkeit.

(b) Untersuchen Sie die Funktion $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit

$$f(x) := \begin{cases} 0 & \text{falls } x = 0, \\ x \sin\left(\frac{1}{x}\right) & \text{sonst} \end{cases}$$

auf Stetigkeit.

(c) Es seien $g, h\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ stetige Funktionen mit $g(x) = h(x)$ für alle $x \in \mathbb{Q}$. Zeigen Sie, dass g und h auf ganz $\mathbb{R}$ übereinstimmen.

Aufgabe 47

Für jedes $n \in \mathbb{N} \setminus \{1\}$ sei $f_n\colon [0,1] \to \mathbb{R}$ die Funktion

$$f_n(x) := \begin{cases} 0 & \text{falls } x \in \left[0, \frac{1}{2} - \frac{1}{n}\right], \\ \frac{1}{4}\big((2x-1)n + 2\big) & \text{falls } x \in \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{n}, \frac{1}{2} + \frac{1}{n}\right), \\ 1 & \text{falls } x \in \left[\frac{1}{2} + \frac{1}{n}, 1\right]. \end{cases}$$

(a) Zeigen Sie, dass alle f_n stetig sind.

(b) Berechnen Sie den punktweisen Grenzwert $g\colon [0,1] \to \mathbb{R}$, $g(x) = \lim_{n\to\infty} f_n(x)$ der Funktionenfolge $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

(c) Ist g stetig?

Aufgabe 48

Es sei $f\colon (0,1) \to \mathbb{R}$ gegeben durch

$$f(x) := \begin{cases} \frac{1}{q} & \text{falls } x = \frac{p}{q}, \text{ wobei } p, q \in \mathbb{N} \text{ teilerfremd sind,} \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$$

(a) Zeigen Sie, dass an jeder Stelle $x \in \mathbb{Q} \cap (0,1)$ die Funktion nicht stetig ist.

(b) Sei $n \in \mathbb{N}$. Weisen Sie nach, dass die Menge $\{x \in (0,1)\colon f(x) \geq \frac{1}{n}\}$ endlich ist.

(c) Bestimmen Sie für jedes $n \in \mathbb{N}$ und für jedes $a \in (0,1) \setminus \mathbb{Q}$ ein $\delta_{a,n} > 0$, sodass $|f(x)| < \frac{1}{n}$ für alle $x \in (0,1)$ mit $|x - a| < \delta_{a,n}$.

(d) Begründen Sie damit, dass f stetig ist auf $(0,1) \setminus \mathbb{Q}$.

Aufgrund des freien Dienstags nach Pfingsten wird der zehnte Übungszettel am 02.06.2015 besprochen. Die Bearbeitungszeit für den elften Übungszettel geht bis 09.06.2015.